Valószínűségszámítás **3. feladatsor** **2009. szeptember 24.**

1. Háromszor dobunk fel egy szabályos pénzdarabot. Jelentse A azt az eseményt, hogy a dobások között fej és írás is előfordul, B pedig azt az eseményt, hogy legfeljebb egy írás fordul elő. Független-e A és B?

2. Legyen $\Omega = \{1, 2, \ldots, 8\}$ az eseménytér, és tekintsük Ω-n az egyenletes eloszlást, azaz legyen minden elemi esemény valószínűsége 1/8. Legyen $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 5, 6\}$, $C = \{1, 3, 5, 6\}$. Igaz-e, hogy az A, B, C események teljesen függetlenek?

3. Válasszunk találomra egyet az $1, 2, \ldots, n$ számok közül úgy, hogy a számok bármelyikének kiválasztása egyformán valószínű. Jelölje A_p azt az eseményt, hogy a kiválasztott szám a p természetes számmal osztható.
a) Mutassuk meg, hogy ha p_1 és p_2 relatív prímek, és n osztható $p_1 \cdot p_2$-vel, akkor A_{p_1} és A_{p_2} függetlenek.
b) Bizonyítsuk be, hogy ha C_n jelenti azt az eseményt, hogy a találomra választott szám n-hez relatív prím, akkor
$$P(C_n) = \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$
ahol a szorzat n összes különböző p prímtényezőire terjesztendő ki.

4. Mennyi a valószínűsége, hogy ha 3 000 000 lottószelvényt véletlenszerűen és egymástól függetlenül kitöltenek, ezek között pontosan 5 darab öttalálatos szelvény lesz?

5. Egy érmével kétszer dobunk. Ha két fej jött ki, akkor még kétszer, különben még egyszer dobunk. Jelölje X a dobott fejek számát. Határozzuk meg X eloszlását.

6. Egy olyan érmével dobunk sokszor egymás után, ahol p a fej és $1 - p$ az írás dobásának valószínűsége. Határozzuk meg az első futam (egyforma dobásokból álló sorozat) eloszlását.

7. Rendeljünk az $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ eseménytér pontjaihoz olyan valószínűségeket, hogy az $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$, $C = \{1, 4\}$ események páronként függetlenek legyenek, de ne legyenek teljesen függetlenek.

8. Egy dobozban M piros és $N - M$ fehér golyó van. Visszatevés nélkül húzunk, minden alkalommal a dobozban levő golyók közül egyenletesen választva addig, amíg el nem fogynak a golyók. Jelölje A_i azt az eseményt, hogy az i.-re pirosat húzunk ($i = 1, 2, \ldots, N$). Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $1 \le i < j \le N$ párokra $P(A_i) = P(A_1)$, és $P(A_i \cap A_j) = P(A_1 \cap A_2)$.

   Beadható feladat: mi a helyzet a Pólya-féle urnamodell esetén, amikor minden alkalommal a kihúzott golyó helyett $R + 1$ ugyanolyan színűt teszünk vissza a dobozba?

9. Beadható feladat október 1-ig:
Tegyük fel, hogy r darab vírus támad n darab sejtet oly módon, hogy minden egyes vírus egymástól függetlenül és $\frac{1}{n}$ valószínűséggel próbál bejutni az egyes sejtekbe. Minden vírus egymástól függetlenül p valószínűséggel jut be a megtámadott sejtbe. A_j jelentse azt az eseményt, hogy a j-edik sejtbe nem jutott be vírus.
a) Határozzuk meg a $P(A_1 A_2 \ldots A_i)$ valószínűséget ($1 \le i \le n$).
b) Határozzuk meg annak a P_k valószínűségét, hogy pontosan k sejtbe nem jut be vírus.

Valószínűségszámítás **3. feladatsor** **2009. szeptember 24.**

1. Háromszor dobunk fel egy szabályos pénzdarabot. Jelentse A azt az eseményt, hogy a dobások között fej és írás is előfordul, B pedig azt az eseményt, hogy legfeljebb egy írás fordul elő. Független-e A és B?

2. Legyen $\Omega = \{1, 2, \ldots, 8\}$ az eseménytér, és tekintsük Ω-n az egyenletes eloszlást, azaz legyen minden elemi esemény valószínűsége 1/8. Legyen $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 5, 6\}$, $C = \{1, 3, 5, 6\}$. Igaz-e, hogy az A, B, C események teljesen függetlenek?

3. Válasszunk találomra egyet az $1, 2, \ldots, n$ számok közül úgy, hogy a számok bármelyikének kiválasztása egyformán valószínű. Jelölje A_p azt az eseményt, hogy a kiválasztott szám a p természetes számmal osztható.
a) Mutassuk meg, hogy ha p_1 és p_2 relatív prímek, és n osztható $p_1 \cdot p_2$-vel, akkor A_{p_1} és A_{p_2} függetlenek.
b) Bizonyítsuk be, hogy ha C_n jelenti azt az eseményt, hogy a találomra választott szám n-hez relatív prím, akkor
$$P(C_n) = \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$
ahol a szorzat n összes különböző p prímtényezőire terjesztendő ki.

4. Mennyi a valószínűsége, hogy ha 3 000 000 lottószelvényt véletlenszerűen és egymástól függetlenül kitöltenek, ezek között pontosan 5 darab öttalálatos szelvény lesz?

5. Egy érmével kétszer dobunk. Ha két fej jött ki, akkor még kétszer, különben még egyszer dobunk. Jelölje X a dobott fejek számát. Határozzuk meg X eloszlását.

6. Egy olyan érmével dobunk sokszor egymás után, ahol p a fej és $1 - p$ az írás dobásának valószínűsége. Határozzuk meg az első futam (egyforma dobásokból álló sorozat) eloszlását.

7. Rendeljünk az $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ eseménytér pontjaihoz olyan valószínűségeket, hogy az $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$, $C = \{1, 4\}$ események páronként függetlenek legyenek, de ne legyenek teljesen függetlenek.

8. Egy dobozban M piros és $N - M$ fehér golyó van. Visszatevés nélkül húzunk, minden alkalommal a dobozban levő golyók közül egyenletesen választva addig, amíg el nem fogynak a golyók. Jelölje A_i azt az eseményt, hogy az i.-re pirosat húzunk ($i = 1, 2, \ldots, N$). Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $1 \le i < j \le N$ párokra $P(A_i) = P(A_1)$, és $P(A_i \cap A_j) = P(A_1 \cap A_2)$.

   Beadható feladat: mi a helyzet a Pólya-féle urnamodell esetén, amikor minden alkalommal a kihúzott golyó helyett $R + 1$ ugyanolyan színűt teszünk vissza a dobozba?

9. Beadható feladat október 1-ig:
Tegyük fel, hogy r darab vírus támad n darab sejtet oly módon, hogy minden egyes vírus egymástól függetlenül és $\frac{1}{n}$ valószínűséggel próbál bejutni az egyes sejtekbe. Minden vírus egymástól függetlenül p valószínűséggel jut be a megtámadott sejtbe. A_j jelentse azt az eseményt, hogy a j-edik sejtbe nem jutott be vírus.
a) Határozzuk meg a $P(A_1 A_2 \ldots A_i)$ valószínűséget ($1 \le i \le n$).
b) Határozzuk meg annak a P_k valószínűségét, hogy pontosan k sejtbe nem jut be vírus.