Konvolúció (9. előadás)

Állítás

Legyenek X és Y független, nemnegatív egész értékű valószínűségi változók. Ekkor az $X+Y$ valószínűségi változó eloszlását az alábbi módon határozhatjuk meg:

$$\mathbb{P}(X+Y=k)=\sum_{l=0}^{k}\mathbb{P}(X=l)\mathbb{P}(Y=k-l) \qquad (k\geq 0).$$

Továbbá

$$\mathbb{E}(X+Y)=\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y); \qquad D(X+Y)=\sqrt{D^2(X)+D^2(Y)}.$$

Bizonyítás. Diszjunkt eseményekre való szétbontással, illetve a függetlenség definíciójának felhasználásával:

$$\mathbb{P}(X+Y=k)=\sum_{l=0}^{k}\mathbb{P}(X=l,Y=k-l)=\sum_{l=0}^{k}\mathbb{P}(X=l)\mathbb{P}(Y=k-l).$$

Konvolúció: példa

Állítás

Legyenek X és Y független Poisson-eloszlású valószínűségi változók, X paramétere λ, az Y paramétere μ. Ekkor az $X+Y$ valószínűségi változó is Poisson-eloszlású, paramétere $\lambda+\mu$, várható értéke és szórásnégyzete is $\lambda+\mu$.

Bizonyítás. Legyen $k \geq 0$ tetszőleges. Ekkor a Poisson-eloszlás definíciója alapján

$$\mathbb{P}(X+Y=k)=\sum_{l=0}^{k}\mathbb{P}(X=l)\mathbb{P}(Y=k-l)=\sum_{l=0}^{k}\frac{\lambda^l}{l!}e^{-\lambda}\cdot\frac{\mu^{k-l}}{(k-l)!}e^{-\mu}=$$

$$=e^{-(\lambda+\mu)}\frac{1}{k!}\sum_{l=0}^{k}\frac{k!}{l!(k-l)!}\lambda^l\mu^{k-l}=$$

$$=e^{-(\lambda+\mu)}\frac{1}{k!}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\lambda^l\mu^{k-l}=e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^k}{k!},$$

ahol az utolsó lépésben a binomiális tételt használtuk.

Nevezetes eloszlások összege

- X, Y független Poisson-eloszlásúak λ_1 és λ_2 paraméterrel $\Rightarrow X + Y$ Poisson-eloszlású $\lambda_1 + \lambda_2$ paraméterrel;
- X, Y független binomiális eloszlásúak, n_1, illetve n_2 renddel, és azonos p paraméterrel

Nevezetes eloszlások összege

- X, Y független Poisson-eloszlásúak λ_1 és λ_2 paraméterrel $\Rightarrow X + Y$ Poisson-eloszlású $\lambda_1 + \lambda_2$ paraméterrel;
- X, Y független binomiális eloszlásúak, n_1, illetve n_2 renddel, és azonos p paraméterrel $\Rightarrow X + Y$ binomiális eloszlású $n_1 + n_2$ renddel és p paraméterrel;
- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ függgetlen normális eloszlásúak $\Rightarrow$ az összegük és az átlaguk is normális eloszlású;

Az átlag várható értéke és szórása

A statisztikában alapvető kérdés, hogy ha

- **ugyanazt a mérést**
- sokszor, **egymástól függetlenül** megismételjük,
- majd a kapott eredményeket **átlagoljuk**,
- akkor az átlag, mint valószínűségi változó hogyan viselkedik

Vagyis: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ **független**, **azonos eloszlású** valószínűségi változók, akkor mit mondhatunk az

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

átlagról: mennyi a **várható értéke** és mennyi a **szórása**?

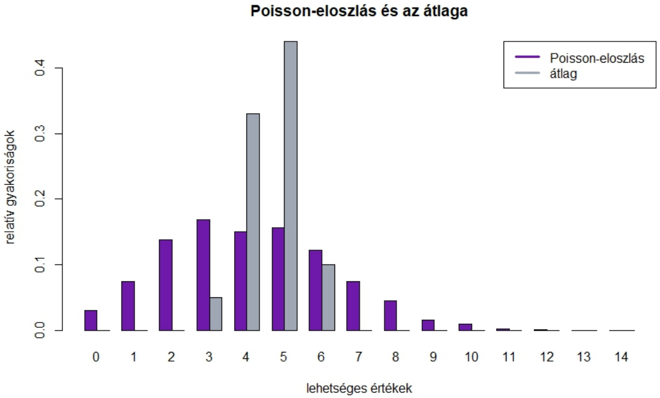
Azonos eloszlás: $\mathbb{P}(X_j \in A) = \mathbb{P}(X_1 \in A)$ tetszőleges j-re és $A \subseteq \mathbb{R}$ „megfelelő" halmazra, vagy: X_j és X_1 eloszlásfüggvénye megegyezik tetszőleges j-re.

azonos eloszlás $\Rightarrow$ **azonos várható érték**, **azonos szórás**

Valószínűségi változók függetlensége

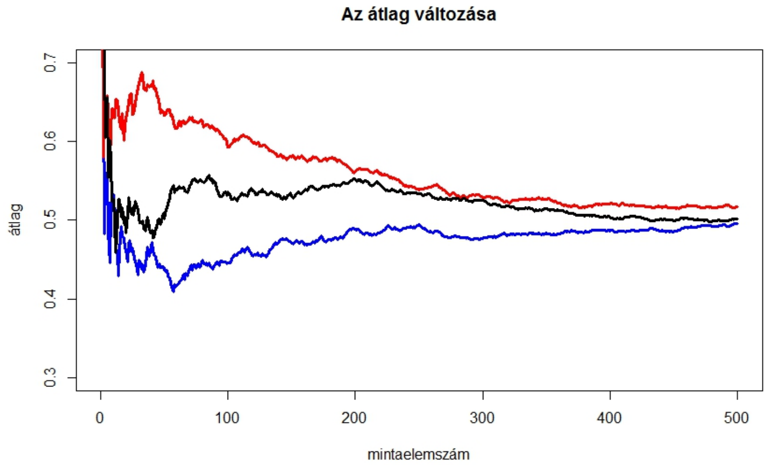
- **két valószínűségi változóra**: az $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változók **függetlenek**, ha
$$\mathbb{P}(X \leq t_1, Y \leq t_2) = \mathbb{P}(X \leq t_1) \cdot \mathbb{P}(Y \leq t_2)$$
teljesül tetszőleges $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ valós számokra.
- **véges sok valószínűségi változóra**: $X_1, \dots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változók **függetlenek**, ha
$$\mathbb{P}(X_1 \leq t_1, X_2 \leq t_2, \dots, X_n \leq t_n) = \\ = \mathbb{P}(X_1 \leq t_1) \cdot \mathbb{P}(X_2 \leq t_2) \dots \mathbb{P}(X_n \leq t_n)$$
teljesül tetszőleges $t_1, t_2, \dots, t_n$ valós számokra.
- **megszámlálható sok valószínűségi változóra**: az $X_1, X_2, X_3 \dots$ valószínűségi változók **függetlenek**, ha közülük bármely véges sokat kiválasztva független valószínűségi változókat kapunk.

Az átlag viselkedése



1000 darab $\lambda = 5$ paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változó, illetve 100 darab, tíz független, $\lambda = 5$ paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változó átlagaként előálló megfigyelés hisztogramja $\rightarrow$ **átlagolásnál a várható érték nem változik**, ez mindkét esetben 5, **a szórás csökken**

Az átlag konvergenciája



A $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlásból vett minta átlaga $n = 500$-ig

Az átlag várható értéke

Állítás

Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ *független azonos eloszlású valószínűségi változók, melyekre* $m = \mathbb{E}(X_1) < \infty$. *Ekkor*

$$\mathbb{E}(\overline{X}) = \mathbb{E}\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right) = \mathbb{E}(X_1) = m.$$

Az átlag várható értéke

Állítás

Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ *független azonos eloszlású valószínűségi változók, melyekre* $m = \mathbb{E}(X_1) < \infty$. *Ekkor*

$$\mathbb{E}(\overline{X}) = \mathbb{E}\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right) = \mathbb{E}(X_1) = m.$$

Bizonyítás.

$$\mathbb{E}(\overline{X}) = \mathbb{E}\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\mathbb{E}(X_1 + \ldots + X_n) = \frac{1}{n} \cdot nm = m.$$

Felhasználtuk a várható érték linearitását, és hogy csak eloszlástól függ:

- $\mathbb{E}(cX) = c\mathbb{E}(X)$, ha $c \in \mathbb{R}$;
- $\mathbb{E}(Y + Z) = \mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(Z)$;
- ha Y és Z eloszlása (azaz eloszlásfüggvényük) megegyezik, akkor $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(Z)$

Az átlag szórása

Állítás

Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ *független azonos eloszlású valószínűségi változók, melyekre* $\sigma = D(X_1) < \infty$. *Ekkor*

$$D(\overline{X}) = D\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{D(X_1)}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Az átlag szórása

Állítás

Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ *független azonos eloszlású valószínűségi változók, melyekre* $\sigma = D(X_1) < \infty$. *Ekkor*

$$D(\overline{X}) = D\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{D(X_1)}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Bizonyítás.

$$D(\overline{X}) = D\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{D(X_1 + \ldots + X_n)}{n} = \frac{\sqrt{n\sigma^2}}{n} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Felhasználtuk a szórás alábbi tulajdonságait:

- $D(cX) = |c|D(X)$, ha $c \in \mathbb{R}$;
- $D^2(Y + Z) = D^2(Y) + D^2(Z)$, ha Y és Z függetlenek;
- ha Y és Z eloszlása megegyezik, akkor $D(Y) = D(Z)$

Egyenlőtlenségek

Tegyük fel, hogy egy véletlenszerűen választott ember p valószínűséggel szavaz egy adott pártra – azonban p-t **nem ismerjük**.

Legalább hány embert kell megkérdeznünk (feltételezve, hogy mindenki a többiektől függetlenül válaszol és igazat mond), hogy annak valószínűsége, hogy a pártra szavazók aránya **legfeljebb** 1%**-kal** tér el p-től, **tetszőleges** p **esetén legalább** 95% **legyen**?

Egyenlőtlenségek

Tegyük fel, hogy egy véletlenszerűen választott ember p valószínűséggel szavaz egy adott pártra – azonban p-t **nem ismerjük**.

Legalább hány embert kell megkérdeznünk (feltételezve, hogy mindenki a többiektől függetlenül válaszol és igazat mond), hogy annak valószínűsége, hogy a pártra szavazók aránya **legfeljebb** 1%**-kal** tér el p-től, **tetszőleges** p **esetén legalább** 95% **legyen**?

Ennek megértéséhez ezekre van szükség:

- az arány átlagolás $\rightarrow$ milyen gyorsan csökken a szórás?
- ha a **szórás kicsi**, abból hogyan következik, hogy nagy valószínűséggel csak keveset tévedünk $\rightarrow$ ebben segít a **Markov– és a Csebisev-egyenlőtlenség**.

A Markov-egyenlőtlenség bizonyítása

Markov-egyenlőtlenség. Legyen $t > 0$, és X **nemnegatív, véges várható értékű** valószínűségi változó, vagyis melyre $X \geq 0$ biztosan teljesül. Ekkor

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{t}.$$

Bizonyítás. Tekintsük az alábbi Y valószínűségi változót:

$$Y = \begin{cases} t, & \text{ha } X \geq t; \\ 0, & \text{ha } X < t. \end{cases}$$

A Markov-egyenlőtlenség bizonyítása

Markov-egyenlőtlenség. Legyen $t > 0$, és X **nemnegatív, véges várható értékű** valószínűségi változó, vagyis melyre $X \geq 0$ biztosan teljesül. Ekkor

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{t}.$$

Bizonyítás. Tekintsük az alábbi Y valószínűségi változót:

$$Y = \begin{cases} t, & \text{ha } X \geq t; \\ 0, & \text{ha } X < t. \end{cases}$$

Mindkét esetben Y értéke legfeljebb X értéke (hiszen $X \geq 0$):

$$Y \leq X \qquad \Rightarrow \qquad \mathbb{E}(Y) \leq \mathbb{E}(X).$$

Másrészt, mivel Y értéke összesen kétféle lehet, a várható értékét kiszámítva:

$$\mathbb{E}(Y) = 0 \cdot \mathbb{P}(Y = 0) + t \cdot \mathbb{P}(Y = t) = t \cdot \mathbb{P}(X \geq t) \leq \mathbb{E}(X).$$

A Markov-egyenlőtlenség bizonyítása

Markov-egyenlőtlenség. Legyen $t > 0$, és X **nemnegatív, véges várható értékű** valószínűségi változó, vagyis melyre $X \geq 0$ biztosan teljesül. Ekkor

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{t}.$$

Bizonyítás. Tekintsük az alábbi Y valószínűségi változót:

$$Y = \begin{cases} t, & \text{ha } X \geq t; \\ 0, & \text{ha } X < t. \end{cases}$$

Mindkét esetben Y értéke legfeljebb X értéke (hiszen $X \geq 0$):

$$Y \leq X \qquad \Rightarrow \qquad \mathbb{E}(Y) \leq \mathbb{E}(X).$$

Másrészt, mivel Y értéke összesen kétféle lehet, a várható értékét kiszámítva:

$$\mathbb{E}(Y) = 0 \cdot \mathbb{P}(Y = 0) + t \cdot \mathbb{P}(Y = t) = t \cdot \mathbb{P}(X \geq t) \leq \mathbb{E}(X).$$

Az utolsó egyenlőtlenség mindkét oldalát a t pozitív számmal osztva a Markov-egyenlőtlenséget kapjuk.

A Csebisev-egyenlőtlenség bizonyítása

Markov-egyenlőtlenség. Legyen $t > 0$, és X **nemnegatív, véges várható értékű** valószínűségi változó, vagyis melyre $X \geq 0$ biztosan teljesül. Ekkor

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{t}.$$

Csebisev-egyenlőtlenség. Legyen X **véges szórású** valószínűségi változó, $t > 0$ pozitív szám. Ekkor

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t) \leq \frac{D^2(X)}{t^2}.$$

Bizonyítás. Legyen $Z = (X - \mathbb{E}(X))^2$. Ez a valószínűségi változó nemnegatív, ezért alkalmazható a Markov-egyenlőtlenség, a t^2 pozitív számmal:

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t) = \mathbb{P}((X - \mathbb{E}(X))^2 \geq t^2) = \mathbb{P}(Z \geq t^2) \leq$$

$$\overset{Markov}{\leq} \frac{\mathbb{E}(Z)}{t^2} = \frac{\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)}{t^2} = \frac{D^2(X)}{t^2}$$

a szórásnégyzet definíciója alapján.

A Csebisev-egyenlőtlenség alkalmazása

Legalább hány embert kell megkérdeznünk (feltételezve, hogy mindenki a többiektől függetlenül válaszol és igazat mond), hogy annak valószínűsége, hogy a pártra szavazók aránya **legfeljebb** 1%**-kal** tér el p-től, **tetszőleges** p **esetén legalább** 95% **legyen**?

n megkérdezett, mindenki p valószínűséggel támogatja a pártot

X: a pártot támogatók száma a megkérdezettek között

Kell:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \leq 0,01\right) \geq 0,95$$

teljesüljön minden $0 \leq p \leq 1$-re – hiszen p-t nem ismerjük.

A Csebisev-egyenlőtlenség alkalmazása

n megkérdezett, mindenki p valószínűséggel támogatja a pártot

X: a pártot támogatók száma a megkérdezettek között

Mivel X binomiális eloszlású:

$$\mathbb{E}\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot np = p; \qquad D\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n}\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}.$$

A Csebisev-egyenlőtlenség alkalmazása

n megkérdezett, mindenki p valószínűséggel támogatja a pártot

X: a pártot támogatók száma a megkérdezettek között

Mivel X binomiális eloszlású:

$$\mathbb{E}\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot np = p; \qquad D\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n}\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}.$$

Csebisev-egyenlőtlenség alkalmazva az X/n valószínűségi változóra:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq 0,01\right) \leq \frac{D^2\left(\frac{X}{n}\right)}{0,01^2} = \frac{p(1-p)}{0,01^2 \cdot n} \leq \frac{1}{4 \cdot 0,01^2 \cdot n},$$

mivel $p(1-p) \leq 1/4$ a számtani-mértani közepek közötti egyenlőtlenség szerint.

A Csebisev-egyenlőtlenség alkalmazása

n megkérdezett, mindenki p valószínűséggel támogatja a pártot

X: a pártot támogatók száma a megkérdezettek között

A Csebisev-egyenlőtlenség szerint

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|\geq 0,01\right)\leq\frac{1}{4\cdot 0,01^2\cdot n}$$

Kell:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|\leq 0,01\right)\geq 0,95,$$

azaz

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|> 0,01\right)\leq 0,05.$$

Tehát ennyi embert **biztosan elég megkérdezni**:

$$\frac{1}{4\cdot 0,01^2\cdot n}\leq 0,05 \quad\Leftrightarrow\quad n\geq\frac{1}{4\cdot 0,01^2\cdot 0,05}=50000.$$

A Csebisev-egyenlőtlenség alkalmazása

n megkérdezett, mindenki p valószínűséggel támogatja a pártot

X: a pártot támogatók száma a megkérdezettek között

A Csebisev-egyenlőtlenség szerint

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq 0,01\right) \leq \frac{1}{4 \cdot 0,01^2 \cdot n}$$

Kell:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \leq 0,01\right) \geq 0,95,$$

azaz

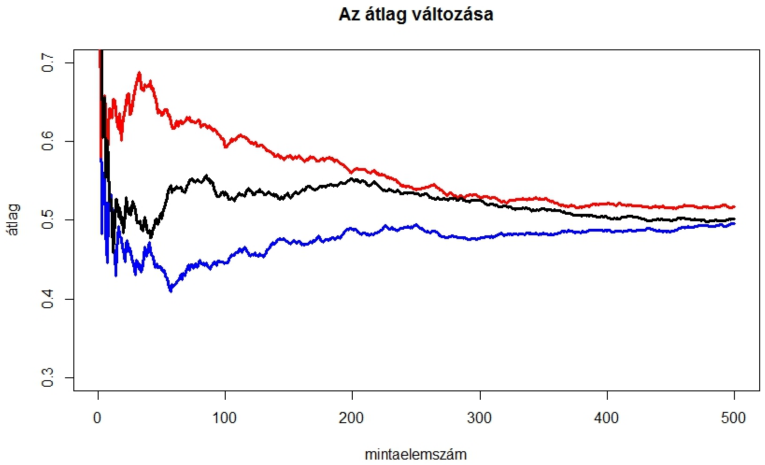
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| > 0,01\right) \leq 0,05.$$

Tehát ennyi embert **biztosan elég megkérdezni**:

$$\frac{1}{4 \cdot 0,01^2 \cdot n} \leq 0,05 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq \frac{1}{4 \cdot 0,01^2 \cdot 0,05} = 50000.$$

Ha $0,01$ helyett $0,005$-öt írnánk (a felét), $n \geq 200000$ (négyszer annyi) adódna.

Az átlag konvergenciája



A $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlásból vett minta átlaga $n = 500$-ig

Konvergenciafajták

Valószínűségi változók sorozatának (mint amilyen az átlagok sorozata) **többféle értelemben** definiálhatjuk a határértékét.

A $Z_1, Z_2, \ldots,$ valószínűségi változókból álló sorozat **sztochasztikusan konvergál** az Z valószínűségi változóhoz, ha minden $\varepsilon > 0$-ra

$$\mathbb{P}(|Z_n - Z| > \varepsilon) \to 0$$

teljesül $n \to \infty$ esetén.

Konvergenciafajták

Valószínűségi változók sorozatának (mint amilyen az átlagok sorozata) **többféle értelemben** definiálhatjuk a határértékét.

A $Z_1, Z_2, \ldots,$ valószínűségi változókból álló sorozat **sztochasztikusan konvergál** az Z valószínűségi változóhoz, ha minden $\varepsilon > 0$-ra

$$\mathbb{P}(|Z_n - Z| > \varepsilon) \to 0$$

teljesül $n \to \infty$ esetén.

A $Z_1, Z_2, \ldots,$ valószínűségi változókból álló sorozat **1 valószínűséggel** konvergál az Z valószínűségi változóhoz, ha

$$\mathbb{P}(\omega \in \Omega : Z_n(\omega) \to Z(\omega) \ n \to \infty \text{ esetén}) = 1.$$

Konvergenciafajták

Valószínűségi változók sorozatának (mint amilyen az átlagok sorozata) **többféle értelemben** definiálhatjuk a határértékét.

A $Z_1, Z_2, \ldots,$ valószínűségi változókból álló sorozat **sztochasztikusan konvergál** az Z valószínűségi változóhoz, ha minden $\varepsilon > 0$-ra

$$\mathbb{P}(|Z_n - Z| > \varepsilon) \to 0$$

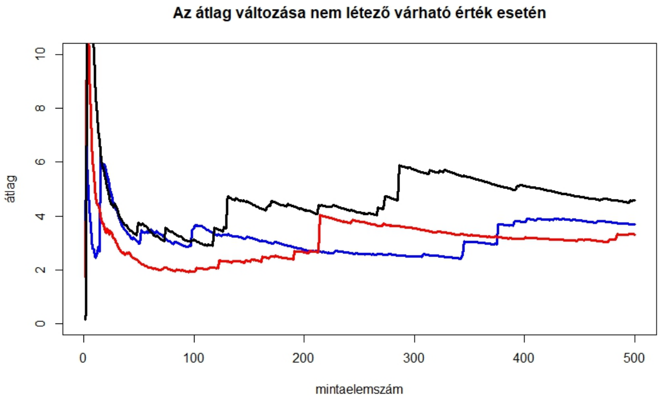
teljesül $n \to \infty$ esetén.

A $Z_1, Z_2, \ldots,$ valószínűségi változókból álló sorozat **1 valószínűséggel** konvergál az Z valószínűségi változóhoz, ha

$$\mathbb{P}(\omega \in \Omega : Z_n(\omega) \to Z(\omega) \ n \to \infty \text{ esetén}) = 1.$$

1 valószínűséggel konvergál a sorozat $\Rightarrow$ sztochasztikusan is, de fordítva nem feltétlenül.

Az átlag változása



Az átlag változása egy olyan esetben, amikor nem létezik a várható érték (nincs abszolút konvergencia a definícióban)

A nagy számok gyenge törvénye: bizonyítás

Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ független azonos eloszlású véges szórású valószínűségi változók. Legyen $m = \mathbb{E}(X_1)$ és $\sigma = D(X_1)$.

A korábbiak szerint
$$\mathbb{E}(\overline{X}) = m; \qquad D^2(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

A nagy számok gyenge törvénye: bizonyítás

Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ független azonos eloszlású véges szórású valószínűségi változók. Legyen $m = \mathbb{E}(X_1)$ és $\sigma = D(X_1)$.

A korábbiak szerint

$$\mathbb{E}(\overline{X}) = m; \qquad D^2(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

A Csebisev-egyenlőtlenség szerint minden $\varepsilon > 0$-ra

$$\mathbb{P}(|\overline{X} - m| > \varepsilon) \leq \frac{D^2(\overline{X})}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Tehát $\overline{X} \to m = \mathbb{E}(X_1)$ sztochasztikusan.

A nagy számok törvénye

Tétel (A nagy számok gyenge törvénye)

Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ *olyan valószínűségi változók, melyek függetlenek és azonos eloszlásúak. Tegyük fel, hogy* $D(X_1) < \infty$. *Ekkor minden* $\varepsilon > 0$ *esetén*

$$\mathbb{P}(|\overline{X}_n - \mathbb{E}(X_1)| > \varepsilon) \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

azaz $\overline{X}_n \to \mathbb{E}(X_1)$ *sztochasztikusan.*

A nagy számok törvénye

Tétel (A nagy számok gyenge törvénye)

Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ *olyan valószínűségi változók, melyek függetlenek és azonos eloszlásúak. Tegyük fel, hogy* $D(X_1) < \infty$. *Ekkor minden* $\varepsilon > 0$ *esetén*

$$\mathbb{P}(|\overline{X}_n - \mathbb{E}(X_1)| > \varepsilon) \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

azaz $\overline{X}_n \to \mathbb{E}(X_1)$ *sztochasztikusan.*

Tétel (A nagy számok erős törvénye)

Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ *valószínűségi változók, melyek függetlenek és azonos eloszlásúak. Tegyük fel még, hogy* $m = \mathbb{E}(X_1) < \infty$. *Ekkor*

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \to \mathbb{E}(X_1) = m$$

teljesül 1 *valószínűséggel* $n \to \infty$ *esetén.*

A második esetben gyengébb feltevésből erősebb állítás következik.