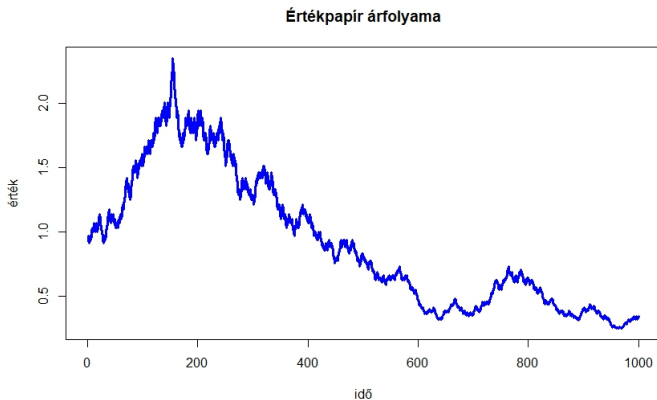


## Eloszlásfüggvény: példa (8. előadás)



Egy elképzelt értékpapír árfolyama 1000 napon keresztül, 1000 forintban

# Eloszlásfüggvény: bevezetés

- $X$  valószínűségi változó: egy véletlen kísérlet eredménye
- eddig:  $X$  **diszkrét**, és a  $\mathbb{P}(X = x)$  valószínűségekkel lehet leírni az eloszlását
- ha a lehetséges értékek halmaza „túl nagy”, vagy a valószínűségek „túl kicsik”, ez nem informatív
- például:  $X$  az értékpapír árfolyama holnap,  $\mathbb{P}(X = 784) = 0,0038$ ,  $\mathbb{P}(X = 785) = 0,004$ , stb. egy előrejelzés szerint  $\rightarrow$  ennél hasznosabb információ lehet, hogy

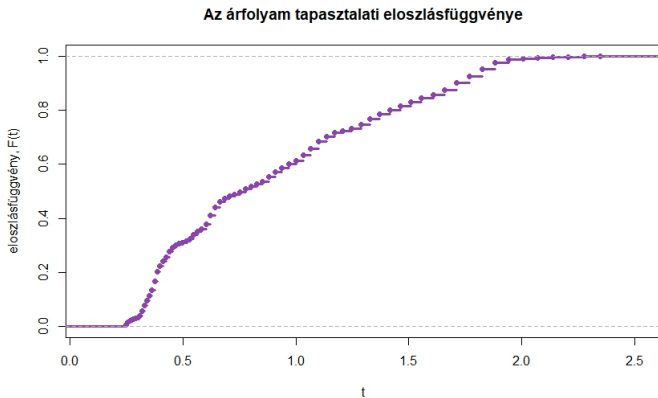
$$\mathbb{P}(X \leq 785) = 0,5,$$

azaz az értékpapír 50% valószínűséggel nem haladja meg a 785 szintet

- **eloszlásfüggvény**:  $F(t)$  annak valószínűsége, hogy **a valószínűségi változó értéke legfeljebb  $t$** , azaz

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t).$$

# Eloszlásfüggvény: példa



$t$  függvényében a  $t$ -nél nem nagyobb árfolyamú napok aránya az előző példában

## Eloszlásfüggvény: definíció

Legyen  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  valószínűségi változó. Ekkor  $X$  **eloszlásfüggvénye** az alábbi  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  függvény:

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\})$$

tetszőleges  $t \in \mathbb{R}$  valós számra.

Ez **minden valószínűségi változóra** és minden  $t \in \mathbb{R}$  valós számra értelmes: éppen úgy definiáltuk a valószínűségi változót, hogy  $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\} \in \mathcal{A}$  egy esemény, tehát van valószínűsége.

## Eloszlásfüggvény: példa

Valakinek három gyereke születik, a gyerekek mindegyike egymástól függetlenül  $1/2$  valószínűséggel fiú. Nyolc egyformán valószínű eset van:

$$\{\text{LLL, FLL, LFL, LLF, FFL, FLF, LFF, FFF}\}$$

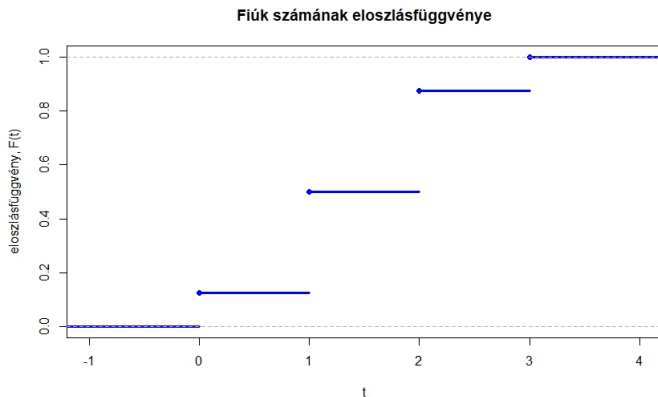
Legyen  $X$  a fiúk száma.  $X$  diszkrét valószínűségi változó, lehetséges értékei: 0, 1, 2, 3, és

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{8}, \quad \mathbb{P}(X = 1) = \frac{3}{8}, \quad \mathbb{P}(X = 2) = \frac{3}{8}, \quad \mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{8}.$$

Az  $X$  **eloszlásfüggvényének**,  $F$ -nek az értéke néhány helyen:

$$\begin{aligned} F(0) &= \mathbb{P}(X \leq 0) = \frac{1}{8}; & F(1) &= \mathbb{P}(X \leq 1) = \frac{1}{2}; \\ F(2, 4) &= \mathbb{P}(X \leq 2, 4) = \frac{7}{8}; & F(4) &= \mathbb{P}(X \leq 4) = 1. \end{aligned}$$

# Eloszlásfüggvény: példa



Három gyerek közül a fiúk számának eloszlásfüggvénye vízszintes:  $t$ , függőleges:  $F(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$ .

# Eloszlásfüggvény

## Definíció (Eloszlásfüggvény)

Legyen  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  valószínűségi változó. Ekkor  $X$  eloszlásfüggvénye az alábbi  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  függvény:

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\}) \quad \text{minden } t \in \mathbb{R} \text{ valós számra.}$$

Az eloszlásfüggvény minden  $t$  valós számhoz hozzárendeli, hogy mennyi annak valószínűsége, hogy a valószínűségi változó értéke legfeljebb  $t$ . Például ha  $X$  a fiúk száma három gyerek közül:

$$F(1) = \mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(\text{legfeljebb egy fiú van}) = 1/2;$$

$$F(2) = \mathbb{P}(X \leq 2) = \mathbb{P}(\text{legfeljebb két fiú van}) = 7/8;$$

$$F(2,3) = \mathbb{P}(X \leq 2,3) = \mathbb{P}(\text{legfeljebb 2,3 fiú van}) = 7/8;$$

# Eloszlásfüggvény

## Definíció (Eloszlásfüggvény)

Legyen  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  valószínűségi változó. Ekkor  $X$  eloszlásfüggvénye az alábbi  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  függvény:

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\}) \quad \text{minden } t \in \mathbb{R} \text{ valós számra.}$$

Az eloszlásfüggvény minden  $t$  valós számhoz hozzárendeli, hogy mennyi annak valószínűsége, hogy a valószínűségi változó értéke legfeljebb  $t$ . Például ha  $X$  a fiúk száma három gyerek közül:

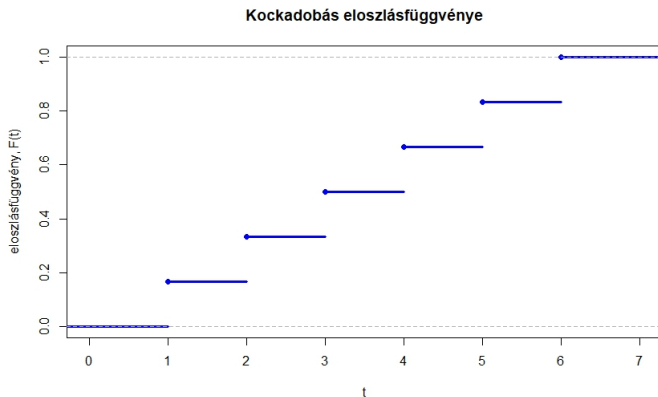
$$F(1) = \mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(\text{legfeljebb egy fiú van}) = 1/2;$$

$$F(2) = \mathbb{P}(X \leq 2) = \mathbb{P}(\text{legfeljebb két fiú van}) = 7/8;$$

$$F(2,3) = \mathbb{P}(X \leq 2,3) = \mathbb{P}(\text{legfeljebb 2,3 fiú van}) = 7/8;$$

Véges értékészletű valószínűségi változók esetén az eloszlásfüggvény lépcsős (véges sok értéket vesz fel), és az ugrások nagyságát az egyes lehetséges értékek valószínűségei adják meg.

# Eloszlásfüggvény: példa



Szabályos dobókockával dobott szám eloszlásfüggvénye  
vízszintes:  $t$ , függőleges:  $F(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$ .

# Az eloszlásfüggvény tulajdonságai

Ha  $a, b \in \mathbb{R}$  valós számok, és  $F$  az  $X$  eloszlásfüggvénye, akkor

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a),$$

hiszen annak valószínűségét, hogy  $X$  az  $a$  és  $b$  közé esik, megkaphatjuk úgy, hogy  $\mathbb{P}(X \leq b)$ -ből levonjuk  $\mathbb{P}(X \leq a)$ -t.

Legyen  $F$  egy tetszőleges valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. Ekkor

- i)  $F$  monoton növekvő:  $a < b$  esetén  $F(a) \leq F(b)$ .
- ii)  $\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 0$ ;  $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1$ .
- iii)  $F$  jobbról folytonos, azaz minden  $t \in \mathbb{R}$  valós számra  $\lim_{s \rightarrow t+} F(s) = F(t)$ .

*Fordítva:* ha  $F$ -re érvényesek ezek a tulajdonságok, akkor van olyan  $X$ , aminek  $F$  az eloszlásfüggvénye.

## Eloszlásfüggvény: példa

Legyen  $X$  négy rendű  $1/2$  paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó.  
Mennyi  $X$  eloszlásfüggvényének az értéke az 1,5 helyen?

## Eloszlásfüggvény: példa

Legyen  $X$  négy rendű  $1/2$  paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó. Mennyi  $X$  eloszlásfüggvényének az értéke az  $1,5$  helyen?

$X$ -re a következőképpen gondolhatunk:  $n = 4$  független kísérlet, mindegyik  $p = 0,5$  valószínűséggel sikerül,  $X$  a **sikeres kísérletek száma**.

Definíció szerint, ha  $F$  az  $X$  eloszlásfüggvénye, akkor

$$F(1,5) = \mathbb{P}(X \leq 1,5) = \mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1),$$

hiszen  $X$  értéke nemnegatív egész. Így

$$F(1,5) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{16}.$$

# Kvantilisek

## Definíció (Kvantilis)

Legyen  $0 \leq z \leq 1$ , és  $X$  egy valószínűségi változó. Ekkor az  $X$  valószínűségi változó  $z$ -kvantilise:

$$q_z = \inf\{t \in \mathbb{R} : F(t) \geq z\}.$$

Ha az  $X$  eloszlásfüggvénye, azaz az  $F(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$  függvény folytonos, akkor az igaz, hogy

$$F(q_z) = \mathbb{P}(X \leq q_z) = z,$$

azaz  $q_z$  az a szám, aminél  $X$  éppen  $z$  valószínűséggel kisebb.

# Kvantilisek

## Definíció (Kvantilis)

Legyen  $0 \leq z \leq 1$ , és  $X$  egy valószínűségi változó. Ekkor az  $X$  valószínűségi változó  $z$ -kvantilise:

$$q_z = \inf\{t \in \mathbb{R} : F(t) \geq z\}.$$

Ha az  $X$  eloszlásfüggvénye, azaz az  $F(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$  függvény folytonos, akkor az igaz, hogy

$$F(q_z) = \mathbb{P}(X \leq q_z) = z,$$

azaz  $q_z$  az a szám, aminél  $X$  éppen  $z$  valószínűséggel kisebb.

A  $z = 1/2$ -kvantilis a medián:  $\mathbb{P}(X \leq m) = 1/2$ .

A  $z = 1/4$ -hez és  $z = 3/4$ -hez tartozó értékek a kvartilisek.

# Kvantilisek

## Definíció (Kvantilis)

Legyen  $0 \leq z \leq 1$ , és  $X$  egy valószínűségi változó. Ekkor az  $X$  valószínűségi változó  $z$ -kvantilise:

$$q_z = \inf\{t \in \mathbb{R} : F(t) \geq z\}.$$

Ha az  $X$  eloszlásfüggvénye, azaz az  $F(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$  függvény folytonos, akkor az igaz, hogy

$$F(q_z) = \mathbb{P}(X \leq q_z) = z,$$

azaz  $q_z$  az a szám, aminél  $X$  éppen  $z$  valószínűséggel kisebb.

A  $z = 1/2$ -kvantilis a medián:  $\mathbb{P}(X \leq m) = 1/2$ .

A  $z = 1/4$ -hez és  $z = 3/4$ -hez tartozó értékek a kvartilisek.

A medián fontos tulajdonsága: a  $\mathbb{E}(|X - u|)$  érték az  $u = m$  esetén a legkisebb, ahol  $m$  a medián.

Összehasonlításképpen: az  $\mathbb{E}((X - u)^2)$  érték az  $u = \mathbb{E}(X)$  esetén a legkisebb.

# Egyenletes eloszlás

Tekintsük a következő hétköznapi példát.

- Csomagot várunk, amit a futár véletlen  $Y$  időpontban hoz ki.
- Feltételezzük, hogy  $Y$  egyenletes eloszlású a  $[8, 12]$  intervallumon (órában mérve).
- Mennyi a valószínűsége, hogy a futár 11 óráig megérkezik?
- **Feltéve, hogy a futár 10 óráig még nem érkezett meg, mennyi a valószínűsége, hogy 11 óra előtt megérkezik?**

Legyen  $X$  a futár érkezésének időpontja. Így fogunk tudni számolni:

$$\mathbb{P}(X \leq 11)$$

## Egyenletes eloszlás

Tekintsük a következő hétköznapi példát.

- Csomagot várunk, amit a futár véletlen  $Y$  időpontban hoz ki.
- Feltételezzük, hogy  $Y$  egyenletes eloszlású a  $[8, 12]$  intervallumon (órában mérve).
- Mennyi a valószínűsége, hogy a futár 11 óráig megérkezik?
- **Feltéve, hogy a futár 10 óráig még nem érkezett meg, mennyi a valószínűsége, hogy 11 óra előtt megérkezik?**

Legyen  $X$  a futár érkezésének időpontja. Így fogunk tudni számolni:

$$\mathbb{P}(X \leq 11) = \frac{11 - 8}{12 - 8} = \frac{3}{4} = 75\%.$$

$$\mathbb{P}(X \leq 11 | X > 10)$$

# Egyenletes eloszlás

Tekintsük a következő hétköznapi példát.

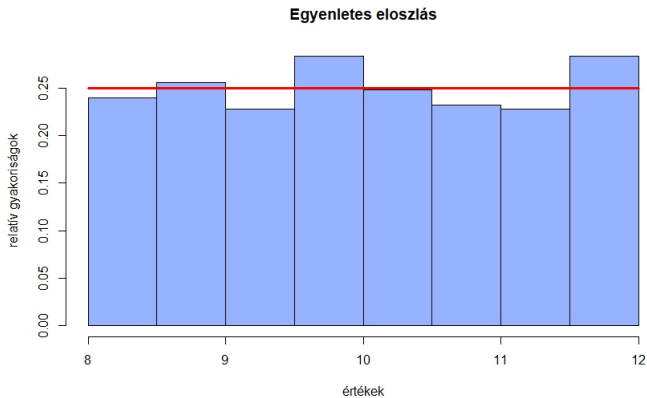
- Csomagot várunk, amit a futár véletlen  $Y$  időpontban hoz ki.
- Feltételezzük, hogy  $Y$  egyenletes eloszlású a  $[8, 12]$  intervallumon (órában mérve).
- Mennyi a valószínűsége, hogy a futár 11 óráig megérkezik?
- **Feltéve, hogy a futár 10 óráig még nem érkezett meg, mennyi a valószínűsége, hogy 11 óra előtt megérkezik?**

Legyen  $X$  a futár érkezésének időpontja. Így fogunk tudni számolni:

$$\mathbb{P}(X \leq 11) = \frac{11 - 8}{12 - 8} = \frac{3}{4} = 75\%.$$

$$\mathbb{P}(X \leq 11 | X > 10) = \frac{\mathbb{P}(\{X \leq 11\} \cap \{X > 10\})}{\mathbb{P}(X > 10)} = \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{2}.$$

# Egyenletes eloszlás



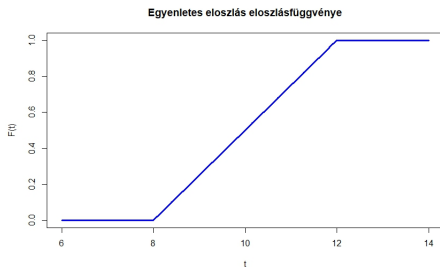
A  $[8, 12]$  intervallumon egyenletes eloszlásból vett 500 elemű minta hisztogramja

# Egyenletes eloszlás

## Definíció (Egyenletes eloszlás (uniform distribution))

Az  $X$  valószínűségi változó **egyenletes eloszlású** az  $[a, b]$  intervallumon, ha eloszlásfüggvénye:

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \leq a; \\ \frac{t-a}{b-a}, & \text{ha } a < t < b; \\ 1, & \text{ha } t \geq b. \end{cases}$$



# Egyenletes eloszlás

Csomagot várunk, a futár 10 és 12 óra között érkezik. Feltesszük, hogy érkezésének időpontja egyenletes eloszlású a  $[10, 12]$  intervallumon. Ekkor az előző állítás alapján az alábbiak igazak ( $a = 10, b = 12$ ).

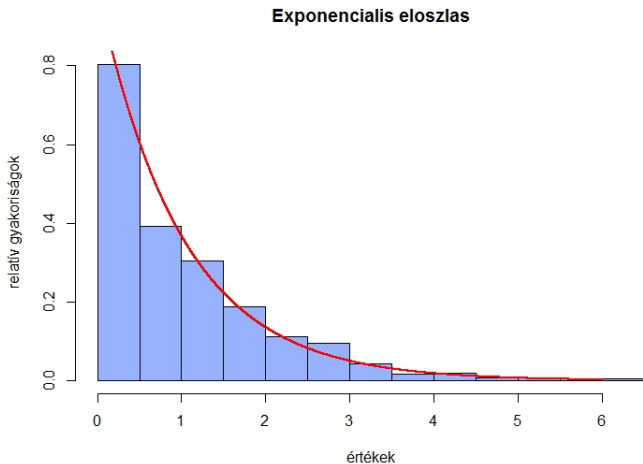
- Annak valószínűsége, hogy 10 és 11 óra között érkezik:  $(11 - 10)/(12 - 10) = 1/2$ .
- Annak valószínűsége, hogy 10:15 és 10:30 között érkezik:  $1/8 = 0,125$ .
- Annak valószínűsége, hogy 10 : 30 után érkezik:  $3/4 = 0,75$ .

# Exponenciális eloszlás

Az **exponenciális eloszlás** sokszor használható véletlen időtartamok modellezésére, például

- egy művelet elvégzésének ideje: egy ember kiszolgálása egy boltban, vagy egy számítás elvégzése egy számítógépen
- egy ember reakcióideje
- két esemény bekövetkezése között eltelt idő, például egy üzletben két ügyfél érkezése közötti idő
- járványterjedés modellezésénél: a fertőzés átadásának vagy a gyógyulásnak az ideje
- radioaktív részecske bomlási ideje

# Exponenciális eloszlás



$\lambda = 1$  paraméterű exponenciális eloszlás sűrűségfüggvénye és 500 darab független, 1 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változóból álló minta hisztogramja

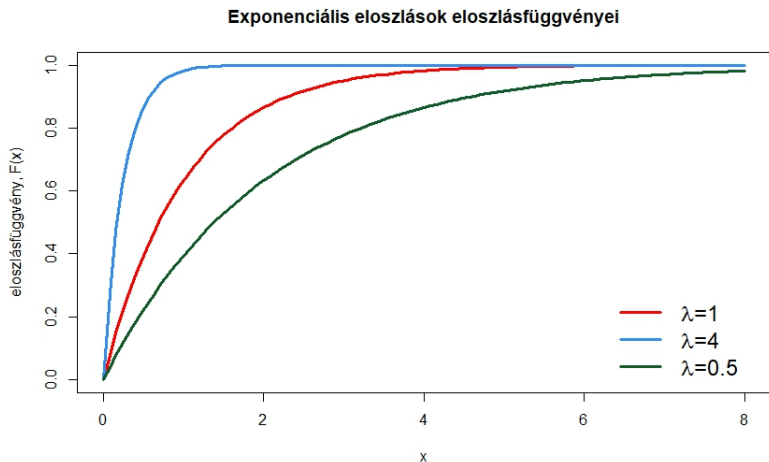
# Exponenciális eloszlás

## Definíció

Legyen  $\lambda > 0$  valós szám. Az  $X$  valószínűségi változó **exponenciális eloszlású**  $\lambda$  paraméterrel, ha eloszlásfüggvénye:

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & \text{ha } t > 0; \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

# Exponenciális eloszlás



Különböző paraméterű ( $\lambda = \frac{1}{2}$ , 1, illetve 4) exponenciális eloszlások eloszlásfüggvényei

# Exponenciális eloszlás

**Példa.** Tegyük fel, hogy egy boltban egy vevő kiszolgálásának ideje (percben számolva)  $1/3$  **paraméterű exponenciális eloszlású** valószínűségi változó.

Mennyi a valószínűsége, hogy a vevőt **legalább 5 percig** tart kiszolgálni? Mennyi a valószínűsége, hogy a vevő kiszolgálása **legalább 2, de legfeljebb 4 percig** tart?

# Exponenciális eloszlás

**Példa.** Tegyük fel, hogy egy boltban egy vevő kiszolgálásának ideje (percben számolva)  $1/3$  **paraméterű exponenciális eloszlású** valószínűségi változó.

Mennyi a valószínűsége, hogy a vevőt **legalább 5 percig** tart kiszolgálni? Mennyi a valószínűsége, hogy a vevő kiszolgálása **legalább 2, de legfeljebb 4 percig** tart?

Az eloszlásfüggvény definíciója alapján

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 5) &= 1 - \mathbb{P}(X < 5) = 1 - F(5) = 1 - (1 - e^{-\lambda \cdot 5}) = e^{-\lambda \cdot 5} = \\ &= e^{-5/3} = 18,9\%.\end{aligned}$$

# Exponenciális eloszlás

**Példa.** Tegyük fel, hogy egy boltban egy vevő kiszolgálásának ideje (percben számolva)  $1/3$  **paraméterű exponenciális eloszlású** valószínűségi változó.

Mennyi a valószínűsége, hogy a vevőt **legalább 5 percig** tart kiszolgálni? Mennyi a valószínűsége, hogy a vevő kiszolgálása **legalább 2, de legfeljebb 4 percig** tart?

Az eloszlásfüggvény definíciója alapján

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 5) &= 1 - \mathbb{P}(X < 5) = 1 - F(5) = 1 - (1 - e^{-\lambda \cdot 5}) = e^{-\lambda \cdot 5} = \\ &= e^{-5/3} = 18,9\%.\end{aligned}$$

Hasonlóképpen

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(2 \leq X \leq 4) &= \mathbb{P}(X \leq 4) - \mathbb{P}(X \leq 2) = F(4) - F(2) = \\ &= (1 - e^{-4/3}) - (1 - e^{-2/3}) = e^{-2/3} - e^{-4/3} = 25\%.\end{aligned}$$

# Exponenciális eloszlás

## Állítás (Az exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonsága)

Legyen  $X$  exponenciális eloszlású valószínűségi változó,  $s, t$  pozitív számok. Ekkor

$$\mathbb{P}(X \geq s + t | X \geq s) = \mathbb{P}(X \geq t).$$

*Bizonyítás.* A feltételes valószínűség definícióját és az exponenciális eloszlás eloszlásfüggvényének alakját felhasználva

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq s + t | X \geq s) &= \frac{\mathbb{P}(\{X \geq s + t\} \cap \{X \geq s\})}{\mathbb{P}(X \geq s)} = \frac{1 - \mathbb{P}(X < s + t)}{1 - \mathbb{P}(X < s)} = \\ &= \frac{1 - F(s + t)}{1 - F(s)} = \frac{1 - (1 - e^{-\lambda(s+t)})}{1 - (1 - e^{-\lambda s})} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = \\ &= e^{-\lambda t} = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = 1 - F(t) = \mathbb{P}(X \geq t).\end{aligned}$$

□

# Pareto-eloszlás

Biztosításmatematikában, vagy például a jövedelmek eloszlásának modellezésére használják gyakran az alábbi eloszlást.

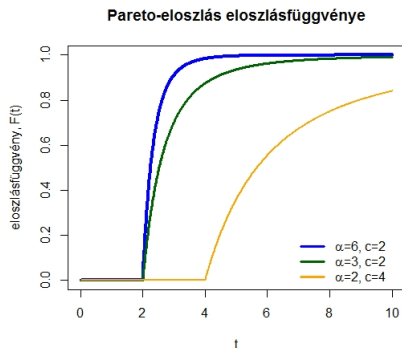
## Definíció (Pareto-eloszlás)

Az  $X$  valószínűségi változó Pareto-eloszlású  $\alpha > 0$  és  $c > 0$  paraméterekkel, ha eloszlásfüggvénye

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \begin{cases} 0; & \text{ha } t \leq c; \\ 1 - \left(\frac{c}{t}\right)^\alpha; & \text{ha } t > c. \end{cases}$$

A definícióból látszik, hogy a Pareto-eloszlás a  $c$  paraméternél kisebb értékeket nem vehet fel. Gyakran használják jövedelmek eloszlásának modellezésére. Ahogy később látni fogjuk, van olyan  $\alpha$ , melyre az eloszlás várható értéke nem létezik, és olyan is, amire a várható érték létezik, de a szórás nem.

# Pareto-eloszlás



Különböző paraméterű Pareto-eloszlások eloszlásfüggvényei

# Együttes eloszlásfüggvény

Az  $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$  valószínűségi vektorváltozó **együttes eloszlásfüggvénye** az  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$  függvény, melyre

$$F(\underline{t}) = F(t_1, \dots, t_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq t_1, X_2 \leq t_2, \dots, X_n \leq t_n),$$

ha  $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$  valós számok. Például:

- egy véletlenszerűen választott embert megkérdezzük a havi jövedelméről ( $X_1$ ), a havi kiadásairól ( $X_2$ ), és az életkoráról ( $X_3$ );
- ekkor  $(X_1, X_2, X_3)$  valószínűségi vektorváltozó, és
- ha eloszlásfüggvénye  $F$ , akkor például

$$F(200000, 150000, 40) = \mathbb{P}(X_1 \leq 200000, X_2 \leq 150000, X_3 \leq 40)$$

annak valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott ember havi jövedelme legfeljebb 200000 (forint), havi kiadása legfeljebb 150000 (forint), életkora pedig legfeljebb 40 (év).