Valószínűségszámítás

Survey statisztika és adattudomány mesterszak

Backhausz Ágnes
agnes.backhausz@ttk.elte.hu

fogadóóra: hétfő 10-11, csütörtök 10-11, D 3-415
(kivéve okt. 6.)

2025/2026. őszi félév

A valószínűségszámítás kurzus céljai

- **a matematikai statisztika megalapozása**: a véletlen mintavételből származó adatok elemzésére alkalmazott módszerekhez szükséges alapfogalmak megismerése
- a valószínűségszámítás alapjai, szemlélete: **események, véletlen mennyiségek (valószínűségi változók), várható érték, szórás, korreláció és a kapcsolódó fogalmak**
- feladatmegoldási készség fejlesztése (gyakorlaton)

A valószínűségszámítás kurzus céljai

- **a matematikai statisztika megalapozása**: a véletlen mintavételből származó adatok elemzésére alkalmazott módszerekhez szükséges alapfogalmak megismerése
- a valószínűségszámítás alapjai, szemlélete: **események, véletlen mennyiségek (valószínűségi változók), várható érték, szórás, korreláció és a kapcsolódó fogalmak**
- feladatmegoldási készség fejlesztése (gyakorlaton)

Számonkérés: írásbeli vizsga (ponthatárok: 40, 56, 72, 89); a vizsgán legalább 40 pontot el kell érni; ha ez megvan, a jegyen a félév során beadható házi feladatokkal lehet javítani, **legfeljebb egy jegyet.**

A házi feladatot páronként együtt dolgozva lehet beadni, de a párok munkája önálló munka. Minden házi feladat 3 pontot ér.

tematika, mintafeladatsor, elméleti összefoglaló, házi feladat, gyakorló feladatok: **moodle4.elte.hu**

Ajánlott irodalom

- Denkinger: Valószínűségszámítás
- Ross: A first course in probability
- Arató Miklós, Prokaj Vilmos és Zempléni András: Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba: példákkal, szimulációkkal
  http://elte.prompt.hu/sites/default/files/tananyagok/valszam/zempleni.pdf
- Bognárné, Mogyoródi, Prékopa, Rényi, Szász: Valószínűségszámítási feladatgyűjtemény
- Fazekas: Valószínűségszámítás és statisztika jegyzet
  https://gyires.inf.unideb.hu/KMITT/b21/valseg.pdf

A valószínűségszámításról és statisztikáról

Célok:

- felmérésekből, kísérletekből származó adatok elemzése
- ismeretlen mennyiségek becslése a mérések alapján
- hipotézisek ellenőrzése vagy cáfolata
- véletlen folyamatok modellezése
- múltbeli adatok alapján a jövőbeli folyamatok előrejelzése

A valószínűségszámításról és statisztikáról

Célok:

- felmérésekből, kísérletekből származó adatok elemzése
- ismeretlen mennyiségek becslése a mérések alapján
- hipotézisek ellenőrzése vagy cáfolata
- véletlen folyamatok modellezése
- múltbeli adatok alapján a jövőbeli folyamatok előrejelzése

Alkalmazási területek:

- statisztika a társadalomtudományokban: felmérések értékelése, elemzése
- statisztika a természettudományokban: mérések, kísérleti eredmények értelmezése
- előrejelzés: társadalmi, gazdasági, pénzügyi folyamatok
- biztosításmatematika

A valószínűségszámításról

- a matematika egy területe
- axiomatikus felépítés (Kolmogorov, 1933)
- alkalmazható gyakorlati feladatokban (például: ha egy érmével 1000 dobásból 550 fej lett, és azt állítjuk, hogy az érme nem szabályos, $99,9\%$ valószínűséggel helyes az állításunk
- az alkalmazásnál **a modell kiválasztása, felépítése** kulcsfontosságú, ettől függ a végeredmény
- **mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott magyar háztartásban négyen élnek?** – ez attól függ, hogy **melyik háztartást mennyi valószínűséggel** választjuk („találjuk meg”)

A valószínűségszámításról

- a matematika egy területe
- axiomatikus felépítés (Kolmogorov, 1933)
- alkalmazható gyakorlati feladatokban (például: ha egy érmével 1000 dobásból 550 fej lett, és azt állítjuk, hogy az érme nem szabályos, $99,9\%$ valószínűséggel helyes az állításunk
- az alkalmazásnál **a modell kiválasztása, felépítése** kulcsfontosságú, ettől függ a végeredmény
- **mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott magyar háztartásban négyen élnek?** – ez attól függ, hogy **melyik háztartást mennyi valószínűséggel** választjuk („találjuk meg”)
- **mennyi a valószínűsége, hogy holnap Budapesten lesz csapadék?**

A valószínűségszámításról

- a matematika egy területe
- axiomatikus felépítés (Kolmogorov, 1933)
- alkalmazható gyakorlati feladatokban (például: ha egy érmével 1000 dobásból 550 fej lett, és azt állítjuk, hogy az érme nem szabályos, $99,9\%$ valószínűséggel helyes az állításunk
- az alkalmazásnál **a modell kiválasztása, felépítése** kulcsfontosságú, ettől függ a végeredmény
- **mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott magyar háztartásban négyen élnek?** – ez attól függ, hogy **melyik háztartást mennyi valószínűséggel** választjuk („találjuk meg")
- **mennyi a valószínűsége, hogy holnap Budapesten lesz csapadék?**

  egy megfelelő matematikai modellben van értelme a kérdésnek, de a válasz **különböző modellekben különböző**

A valószínűségszámításról

- a matematika egy területe
- axiomatikus felépítés (Kolmogorov, 1933)
- alkalmazható gyakorlati feladatokban (például: ha egy érmével 1000 dobásból 550 fej lett, és azt állítjuk, hogy az érme nem szabályos, $99,9\%$ valószínűséggel helyes az állításunk
- az alkalmazásnál **a modell kiválasztása, felépítése** kulcsfontosságú, ettől függ a végeredmény
- **mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott magyar háztartásban négyen élnek?** – ez attól függ, hogy **melyik háztartást mennyi valószínűséggel** választjuk („találjuk meg”)
- **mennyi a valószínűsége, hogy holnap Budapesten lesz csapadék?**

  egy megfelelő matematikai modellben van értelme a kérdésnek, de a válasz **különböző modellekben különböző**
- cél: **minél jobb modell illesztése** a statisztika segítségével (jól illeszkedik a megfigyelt adatokra, egyszerű, interpretálható, de más szempontok is lehetségesek)

A valószínűségszámítás történetéről

- **osztozkodási probléma**, 1494: egy félbehagyott játékban az aktuális állás alapján hogyan osszák el a tétet (megoldás: Pascal, 1656)
- Cardano könyve a kockajátékokról, 1564 (amit 1663-ban adtak ki)
- életjáradék-számítás, de Witt, Haley, 1671
- nagy számok törvénye, Jacob Bernoulli, 1713
- XIX. század első fele: de Moivre, Bayes, Gauss, Poisson, Buffon
- XIX. század vége: Csebisev, Markov, Ljapunov
- **axiomatikus felépítés**: Kolmogorov, 1933

A valószínűségszámítás történetéről

XX. századi alkalmazások és kezdetük

- sztochasztikus folyamatok (Wiener, 1923)
- matematikai statisztika (Fisher, 1925)
- játékelmélet (Neumann, 1928)
- információelmélet (Shannon, 1948)
- idősorok
- pénzügyi folyamatok (Black–Scholes, 1973)
- hierarchikus tanulási algoritmusok $\rightarrow$ mesterséges intelligencia

Események és valószínűségük

Cél: véletlen jelenségek matematikai modellezése

Mennyi lehet egy **esemény** **valószínűsége**?

Események és valószínűségük

Cél: véletlen jelenségek matematikai modellezése

Mennyi lehet egy **esemény** **valószínűsége**?

holnap Budapesten esik az eső $\longrightarrow$

egy véletlenül választott ember balkezes $\longrightarrow$

egy véletlenül választott felnőtt diplomás $\longrightarrow$

júliusban csökken az infláció $\longrightarrow$

A **esemény** $\longrightarrow$

Események és valószínűségük

Cél: véletlen jelenségek matematikai modellezése

Mennyi lehet egy **esemény valószínűsége**?

holnap Budapesten esik az eső $\longrightarrow$

egy véletlenül választott ember balkezes $\longrightarrow$

egy véletlenül választott felnőtt diplomás $\longrightarrow$

júliusban csökken az infláció $\longrightarrow$

A **esemény** $\longrightarrow$

az események valószínűsége attól függ, hogy milyen modellt választunk

Események és valószínűségük

Cél: véletlen jelenségek matematikai modellezése

Mennyi lehet egy **esemény** **valószínűsége**?

holnap Budapesten esik az eső $\longrightarrow$

egy véletlenül választott ember balkezes $\longrightarrow$

egy véletlenül választott felnőtt diplomás $\longrightarrow$

júliusban csökken az infláció $\longrightarrow$

A **esemény** $\longrightarrow$

az események valószínűsége attól függ, hogy

milyen modellt választunk

attól, hogy hogyan vesszük figyelembe a méréseket, megfigyeléseket

Események és valószínűségük

Cél: véletlen jelenségek matematikai modellezése

Mennyi lehet egy **esemény valószínűsége**?

holnap Budapesten esik az eső	$\longrightarrow$	15%
egy véletlenül választott ember balkezes	$\longrightarrow$	10%
egy véletlenül választott felnőtt diplomás	$\longrightarrow$	22%
júliusban csökken az infláció	$\longrightarrow$	44%
A **esemény**	$\longrightarrow$	$P(A)$

az események valószínűsége attól függ, hogy

milyen modellt választunk

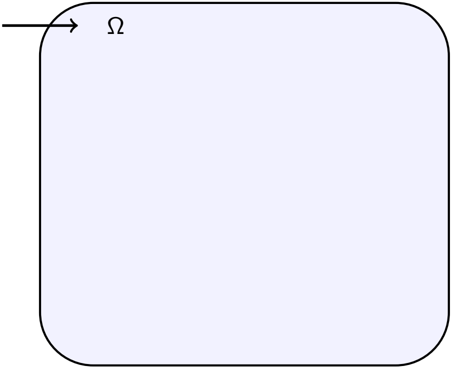
attól, hogy hogyan vesszük figyelembe a méréseket, megfigyeléseket

ha más modellt választunk, az értékek is másképp alakulnak

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

eseménytér

összes lehetőség: Ω



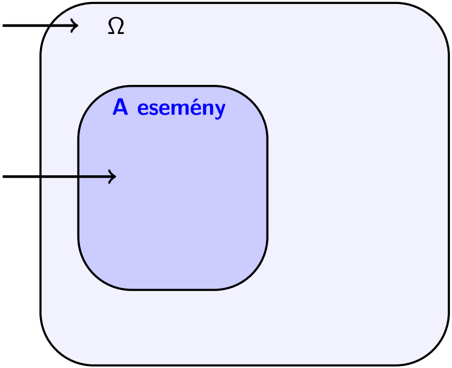
A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

eseménytér

összes lehetőség: Ω

esemény

$A \subseteq \Omega$ részhalmaz



A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

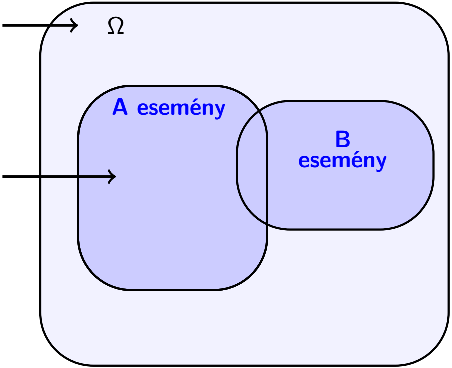
eseménytér

összes lehetőség: Ω

$\boxed{\mathbb{P}(\Omega) = 1}$

esemény

$A \subseteq \Omega$ részhalmaz



A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Ω: (magyar) **felnőtt emberek**

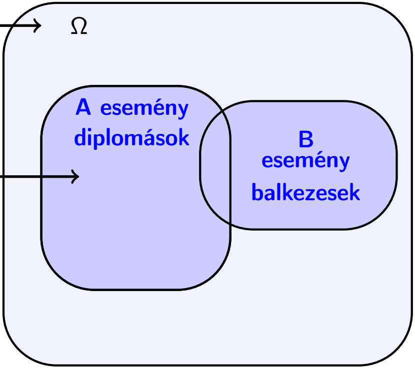
eseménytér

összes lehetőség: Ω

$\boxed{\mathbb{P}(\Omega) = 1}$

esemény

$A \subseteq \Omega$ részhalmaz



A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Ω: (magyar) **felnőtt emberek**

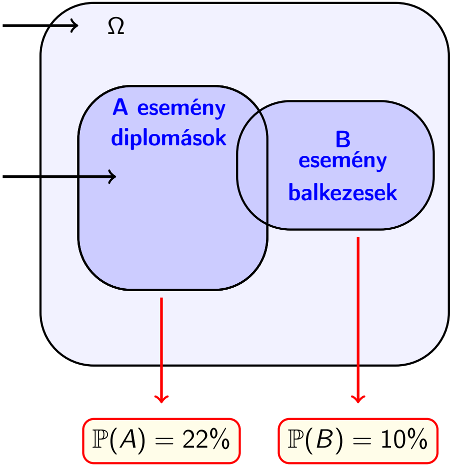
eseménytér

összes lehetőség: Ω

$\boxed{\mathbb{P}(\Omega) = 1}$

esemény

$A \subseteq \Omega$ részhalmaz



A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Ω: (magyar) **felnőtt emberek**

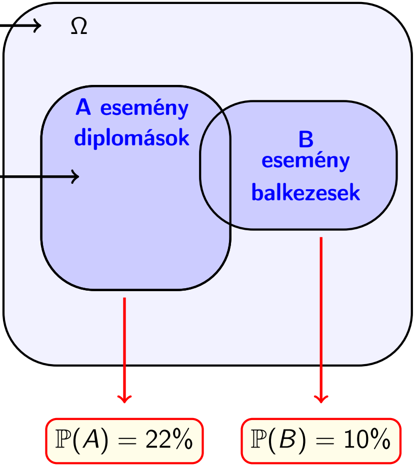
eseménytér

összes lehetőség: Ω

$\boxed{\mathbb{P}(\Omega) = 1}$

esemény

$A \subseteq \Omega$ részhalmaz



valószínűség: eseményekhez $[0,1]$-beli számokat rendelő függvény

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Ω: (magyar) **felnőtt emberek**

eseménytér

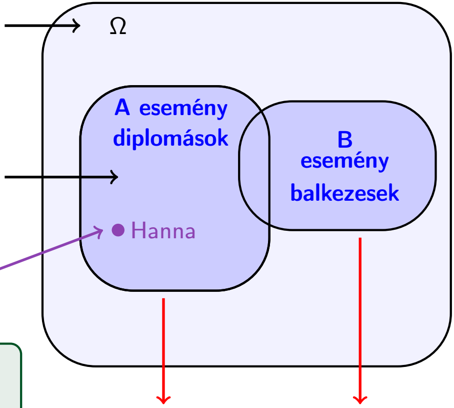
összes lehetőség: Ω

$\boxed{\mathbb{P}(\Omega) = 1}$

esemény

$A \subseteq \Omega$ részhalmaz

elemi esemény



$\boxed{\mathbb{P}(A) = 22\%}$ $\boxed{\mathbb{P}(B) = 10\%}$

valószínűség: eseményekhez $[0, 1]$-beli számokat rendelő függvény

Eseménytér

- **eseménytér**: az összes lehetőség halmaza, Ω (például a magyar felnőttek)

Eseménytér

- **eseménytér**: az összes lehetőség halmaza, Ω (például a magyar felnőttek)
- **elemi esemény:** a kísérlet egy lehetséges kimenetele, Ω egy eleme (például Hanna vagy Gábor)

Eseménytér

- **eseménytér**: az összes lehetőség halmaza, Ω (például a magyar felnőttek)
- **elemi esemény:** a kísérlet egy lehetséges kimenetele, Ω egy eleme (például Hanna vagy Gábor)
- **esemény**: az eseménytér egy részhalmaza, $A \subseteq \Omega$
  például: diplomások (A) vagy a balkezesek (B)

Eseménytér

- **eseménytér**: az összes lehetőség halmaza, Ω (például a magyar felnőttek)
- **elemi esemény:** a kísérlet egy lehetséges kimenetele, Ω egy eleme (például Hanna vagy Gábor)
- **esemény**: az eseménytér egy részhalmaza, $A \subseteq \Omega$
  például: diplomások (A) vagy a balkezesek (B)
- **valószínűség**: eseményekhez $[0, 1]$-beli számokat rendelő függvény (például: $\mathbb{P}(A) = 22\%$)

Eseménytér

- **eseménytér**: az összes lehetőség halmaza, Ω (például a magyar felnőttek)
- **elemi esemény:** a kísérlet egy lehetséges kimenetele, Ω egy eleme (például Hanna vagy Gábor)
- **esemény**: az eseménytér egy részhalmaza, $A \subseteq \Omega$
  például: diplomások (A) vagy a balkezesek (B)
- **valószínűség**: eseményekhez $[0,1]$-beli számokat rendelő függvény (például: $\mathbb{P}(A) = 22\%$)

További példák:

- eseménytér: magyar férfiak; esemény: 50 évesnél idősebbek
- két érmedobásnál az eseménytér $\{FF, FI, IF, II\}$, esemény: különbözőt dobtunk, azaz $\{FI, IF\}$
- egy érmével addig dobunk, amíg fejet nem kapunk, ekkor az eseménytér: $\{F, IF, IIF, IIIF, \dots,$ minden dobás írás$\}$

Események valószínűsége

1) Egy esemény valószínűsége mindig 0 és 1 közé esik:

$$\boxed{0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1}$$

Események valószínűsége

1) Egy esemény valószínűsége mindig 0 és 1 közé esik:

$$\boxed{0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1}$$

2) Egy találkozóra öt embert hívtak.

Mennyi a valószínűsége, hogy legalább négyen eljönnek?

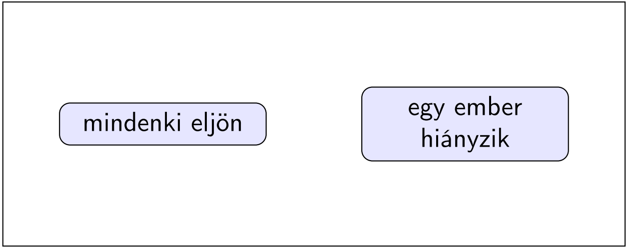
Események valószínűsége

1) Egy esemény valószínűsége mindig 0 és 1 közé esik:

$$\boxed{0 \le \mathbb{P}(A) \le 1}$$

2) Egy találkozóra öt embert hívtak.

Mennyi a valószínűsége, hogy legalább négyen eljönnek?



Események valószínűsége

1) Egy esemény valószínűsége mindig 0 és 1 közé esik:

$$\boxed{0 \le \mathbb{P}(A) \le 1}$$

2) Egy találkozóra öt embert hívtak.

Mennyi a valószínűsége, hogy legalább négyen eljönnek?

$$\boxed{\text{mindenki eljön}} \; + \; \boxed{\text{egy ember hiányzik}}$$

$\mathbb{P}(\text{legalább négyen vannak}) =$

$$= \mathbb{P}(\text{mindenki eljön}) \qquad \mathbb{P}(\text{egy ember hiányzik})$$

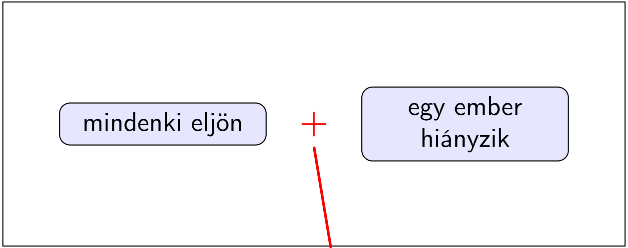
Események valószínűsége

1) Egy esemény valószínűsége mindig 0 és 1 közé esik:

$$\boxed{0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1}$$

2) Egy találkozóra öt embert hívtak.

Mennyi a valószínűsége, hogy legalább négyen eljönnek?



$\mathbb{P}(\text{legalább négyen vannak}) =$

$$= \mathbb{P}(\text{mindenki eljön}) + \mathbb{P}(\text{egy ember hiányzik})$$

Események valószínűsége

1) Egy esemény valószínűsége mindig 0 és 1 közé esik:

$$\boxed{0 \le \mathbb{P}(A) \le 1}$$

2) Általában:

Ha az A és B események kizáróak, azaz metszetük üres,
akkor annak valószínűsége, hogy legalább az egyik bekövetkezik,
a valószínűségük összege:

Események valószínűsége

1) Egy esemény valószínűsége mindig 0 és 1 közé esik:

$$\boxed{0 \le \mathbb{P}(A) \le 1}$$

2) Általában:

Ha az A és B események kizáróak, azaz metszetük üres,
akkor annak valószínűsége, hogy legalább az egyik bekövetkezik,
a valószínűségük összege:

$$\boxed{A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)}$$

Események valószínűsége

1) Egy esemény valószínűsége mindig 0 és 1 közé esik:

$$\boxed{0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1}$$

2) Általában:

Ha az A és B események kizáróak, azaz metszetük üres,
akkor annak valószínűsége, hogy legalább az egyik bekövetkezik,
a valószínűségük összege:

$$\boxed{A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)}$$

kizáróak: egyszerre
nem következhetnek be

unió: legalább az
egyik bekövetkezik

Kitérő: a terület additivitása

Legyenek A, B síkbeli halmazok, és jelölje t a területet.

A fentihez hasonlóan, **ha a két halmaz metszete üres, akkor az uniójuk területe a területük összege**:

$$A \cap B = \emptyset \qquad \Rightarrow \qquad t(A \cup B) = t(A) + t(B).$$

Kitérő: a terület additivitása

Legyenek A, B síkbeli halmazok, és jelölje t a területet.

A fentihez hasonlóan, **ha a két halmaz metszete üres, akkor az uniójuk területe a területük összege**:

$$A \cap B = \emptyset \qquad \Rightarrow \qquad t(A \cup B) = t(A) + t(B).$$

Ez **véges sok halmazra** is igaz: ha a halmazok páronkénti metszete üres, akkor az uniójuk területe a területük összege.

Kitérő: a terület additivitása

Legyenek A, B síkbeli halmazok, és jelölje t a területet.

A fentihez hasonlóan, **ha a két halmaz metszete üres, akkor az uniójuk területe a területük összege**:

$$A \cap B = \emptyset \qquad \Rightarrow \qquad t(A \cup B) = t(A) + t(B).$$

Ez **véges sok halmazra** is igaz: ha a halmazok páronkénti metszete üres, akkor az uniójuk területe a területük összege.

Végtelen sok halmazra nem feltétlenül igaz ez a tulajdonság: egy 1×1-es négyzet területe 1. A négyzet felbontható végtelen sok, 0 területű pont uniójára. A pontok páronként diszjunktak, semmit nem számoltunk kétszer, mégsem adódnak össze a területek (a nullák összege mindig 0).

A valószínűség alaptulajdonságai

1. **Egy esemény valószínűsége mindig** 0 **és** 1 **közé esik:**

A valószínűség alaptulajdonságai

1. **Egy esemény valószínűsége mindig** 0 **és** 1 **közé esik:**

$$0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$$

bármely A eseményre,

A valószínűség alaptulajdonságai

1. **Egy esemény valószínűsége mindig** 0 **és** 1 **közé esik:**

$$0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$$

bármely A eseményre, **és a biztos esemény valószínűsége** 1**.**

A valószínűség alaptulajdonságai

1. **Egy esemény valószínűsége mindig 0 és 1 közé esik:**

   $$0 \le \mathbb{P}(A) \le 1$$

   bármely A eseményre, **és a biztos esemény valószínűsége 1.**

2. **Additivitás:** ha $A_1, A_2, \ldots$ események, és semelyik kettő nem következhet be egyszerre, azaz

A valószínűség alaptulajdonságai

1. **Egy esemény valószínűsége mindig 0 és 1 közé esik:**

$$0 \le \mathbb{P}(A) \le 1$$

bármely A eseményre, **és a biztos esemény valószínűsége 1.**

2. **Additivitás:** ha $A_1, A_2, \dots$ események, és semelyik kettő nem következhet be egyszerre, azaz

$$A_i \cap A_j = \emptyset \qquad \text{minden } 1 \le i < j\text{-re,}$$

akkor annak valószínűsége, hogy legalább az egyik bekövetkezik, a valószínűségük összege:

A valószínűség alaptulajdonságai

1. **Egy esemény valószínűsége mindig 0 és 1 közé esik:**

   $$0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$$

   bármely A eseményre, **és a biztos esemény valószínűsége 1.**

2. **Additivitás:** ha $A_1, A_2, \ldots$ események, és semelyik kettő nem következhet be egyszerre, azaz

   $$A_i \cap A_j = \emptyset \qquad \text{minden } 1 \leq i < j\text{-re},$$

   akkor annak valószínűsége, hogy legalább az egyik bekövetkezik, a valószínűségük összege:

   $$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) + \ldots.$$

A valószínűség alaptulajdonságai

1. **Egy esemény valószínűsége mindig 0 és 1 közé esik:**

$$0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$$

bármely A eseményre, **és a biztos esemény valószínűsége 1.**

2. **Additivitás:** ha $A_1, A_2, \ldots$ események, és semelyik kettő nem következhet be egyszerre, azaz

$$A_i \cap A_j = \emptyset \qquad \text{minden } 1 \leq i < j\text{-re},$$

akkor annak valószínűsége, hogy legalább az egyik bekövetkezik, a valószínűségük összege:

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) + \ldots.$$

Ugyanez más jelöléssel:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j).$$

A valószínűség tulajdonságai

- Egy **esemény valószínűsége** mindig 0 és 1 közé esik:

$$0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$$

.

- A **biztos esemény** (összes lehetőség, ezek halmaza Ω) valószínűsége 1:

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1; \qquad \mathbb{P}(\emptyset) = 0,$$

míg a **lehetetlen esemény** (üres halmaz) valószínűsége 0.

A valószínűség tulajdonságai

- Egy **esemény valószínűsége** mindig 0 és 1 közé esik:

$$0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$$

.

- A **biztos esemény** (összes lehetőség, ezek halmaza Ω) valószínűsége 1:

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1; \qquad \mathbb{P}(\emptyset) = 0,$$

míg a **lehetetlen esemény** (üres halmaz) valószínűsége 0.

- **Komplementer** valószínűsége: ha $A \subseteq \Omega$ esemény, akkor annak valószínűsége, hogy A **nem következik be**:

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(\Omega \setminus A) = 1 - \mathbb{P}(A).$$

- **Különbség** valószínűsége:

$$\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

A valószínűség axiomatikus felépítése

Ω: eseménytér (a lehetséges kimenetelek összessége)

$\mathcal{A}$: az események halmaza

$\mathbb{P}$: **valószínűség**, amire az alábbiak teljesülnek:

- **eseményekhez rendel nemnegatív számokat**, azaz $A \in \mathcal{A}$ esetén $\mathbb{P}(A) \geq 0$
- **additív**: ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ események, és bármely kettő metszete üres, akkor

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) + \ldots$$

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, azaz a biztos esemény valószínűsége 1

Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ hármast **valószínűségi mezőnek** nevezzük.

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ hármas **Kolmogorov-féle valószínűségi mező**, ha

- az Ω **eseménytér** egy nem üres halmaz;

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ hármas **Kolmogorov-féle valószínűségi mező**, ha

- az Ω **eseménytér** egy nem üres halmaz;
- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ az **az események halmaza**, azaz minden $A \in \mathcal{A}$-ra $A \subseteq \Omega$ úgy, hogy
  1. $\Omega \in \mathcal{A}$;
  2. ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, akkor $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ (azaz megszámlálható sok $\mathcal{A}$-beli elem uniója is $\mathcal{A}$-beli);
  3. ha $A \in \mathcal{A}$, akkor $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ (azaz $\mathcal{A}$-beli halmazok komplementere is $\mathcal{A}$-beli.

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ hármas **Kolmogorov-féle valószínűségi mező**, ha

- az Ω **eseménytér** egy nem üres halmaz;
- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ az **az események halmaza**, azaz minden $A \in \mathcal{A}$-ra $A \subseteq \Omega$ úgy, hogy
  1. $\Omega \in \mathcal{A}$;
  2. ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, akkor $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ (azaz megszámlálható sok $\mathcal{A}$-beli elem uniója is $\mathcal{A}$-beli);
  3. ha $A \in \mathcal{A}$, akkor $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ (azaz $\mathcal{A}$-beli halmazok komplementere is $\mathcal{A}$-beli.
- a **valószínűség** egy $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$ függvény, melyre
  1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, azaz a biztos esemény valószínűsége 1;
  2. ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ és minden $1 \leq i < j$-re $A_i \cap A_j = \emptyset$, akkor

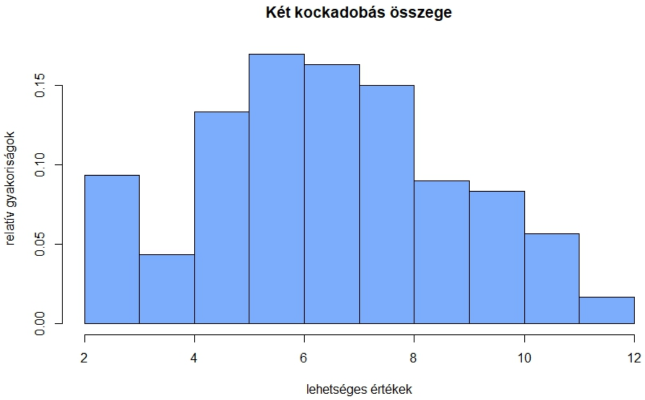
     $$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n),$$

     azaz megszámlálható sok kizáró esemény uniójának valószínűsége a valószínűségek összege.

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

- Ω: **eseménytér** vagy elemi események halmaza.
- Ω elemei ($\omega \in \Omega$): **elemi események**.
- $\mathcal{A}$: **események halmaza** (vagy események σ-algebrája).
- $\mathcal{A}$ elemei ($A \in \mathcal{A}$): **események**.
- $\mathbb{P}$: **valószínűség** (probability).
- Ω esemény neve: biztos esemény.
- $\emptyset$ (üres halmaz) esemény neve: lehetetlen esemény.
- $A \in \mathcal{A}$ és $B \in \mathcal{A}$ **kizáró események**, ha $A \cap B = \emptyset$, azaz **egyszerre nem következhetnek be**.

Példa: két szabályos kockadobás összege



Kísérlet: két szabályos dobókockával dobva mennyi a dobott számok összege. Ezt 300-szor megismételve az egyes lehetséges értékek **relatív gyakorisága** (előfordulásuk aránya) látható az ábrán.

Példa: két szabályos kockadobás

Két szabályos dobókockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7?

Példa: két szabályos kockadobás

Két szabályos dobókockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7?

A dobókockák, emberek, tárgyak stb. mindig különbözőek.

- **eseménytér**: lehetséges dobássorozatok. Ezek száma:

Példa: két szabályos kockadobás

Két szabályos dobókockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7?

A dobókockák, emberek, tárgyak stb. mindig különbözőek.

- **eseménytér**: lehetséges dobássorozatok. Ezek száma:

$$6 \cdot 6 = 36; \text{mindkét dobás hatféle lehet.}$$

Példa: két szabályos kockadobás

Két szabályos dobókockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7?

A dobókockák, emberek, tárgyak stb. mindig különbözőek.

- **eseménytér**: lehetséges dobássorozatok. Ezek száma:

$$6 \cdot 6 = 36; \text{mindkét dobás hatféle lehet.}$$

- A dobássorozatok egyformán valószínűek: mindegyiknek $1/36$ a valószínűsége.
- A kedvező dobássorozatok száma:

Példa: két szabályos kockadobás

Két szabályos dobókockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7?

A dobókockák, emberek, tárgyak stb. mindig különbözőek.

- **eseménytér**: lehetséges dobássorozatok. Ezek száma:

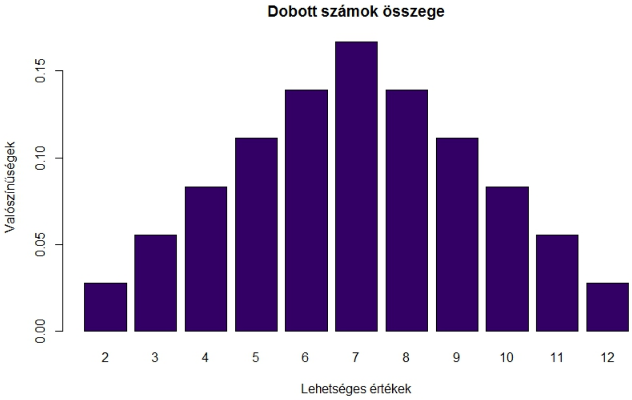
$$6 \cdot 6 = 36; \text{mindkét dobás hatféle lehet.}$$

- A dobássorozatok egyformán valószínűek: mindegyiknek $1/36$ a valószínűsége.
- A kedvező dobássorozatok száma: 6.

11	12	13	14	15	**16**
21	22	23	24	**25**	26
31	32	33	**34**	35	36
41	42	**43**	44	45	46
51	**52**	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

Tehát $\mathbb{P}(\text{az összeg } 7) = 6/36 = 1/6$.

Példa: két szabályos kockadobás



Az összeg lehetséges értékei és a valószínűségek

Példa: két szabályos kockadobás

- **elemi esemény:** a kísérlet egy lehetséges kimenetele, egy dobássorozat, például: **15** vagy **22**
- **eseménytér**: az elemi események összessége, az Ω halmaz most az alábbi 36 elemű halmaz: $\Omega = \{11, 12, 13, \ldots, 16, 21, \ldots, 26, \ldots, 61, \ldots, 66\}$.

Példa: két szabályos kockadobás

- **elemi esemény:** a kísérlet egy lehetséges kimenetele, egy dobássorozat, például: **15** vagy **22**
- **eseménytér**: az elemi események összessége, az Ω halmaz most az alábbi 36 elemű halmaz: $\Omega = \{11, 12, 13, \ldots, 16, 21, \ldots, 26, \ldots, 61, \ldots, 66\}$.
- **esemény**: az eseménytér, azaz Ω részhalmazai
  például: a dobott számok összege 7, azaz $A = \{16, 25, 34, 43, 52, 61\}$
  vagy: a dobott számok összege legfeljebb 3, azaz $B = \{11, 12, 21\}$

  $\mathcal{A}$: az események halmaza, ez most Ω összes részhalmaza

  az összes esemény száma: $|\mathcal{A}| = 2^{36}$

Példa: két szabályos kockadobás

- **elemi esemény:** a kísérlet egy lehetséges kimenetele, egy dobássorozat, például: **15** vagy **22**
- **eseménytér**: az elemi események összessége, az Ω halmaz most az alábbi 36 elemű halmaz: $\Omega = \{11, 12, 13, \ldots, 16, 21, \ldots, 26, \ldots, 61, \ldots, 66\}$.
- **esemény**: az eseménytér, azaz Ω részhalmazai
  például: a dobott számok összege 7, azaz $A = \{16, 25, 34, 43, 52, 61\}$
  vagy: a dobott számok összege legfeljebb 3, azaz $B = \{11, 12, 21\}$

  $\mathcal{A}$: az események halmaza, ez most Ω összes részhalmaza

  az összes esemény száma: $|\mathcal{A}| = 2^{36}$
- **valószínűség**: $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$ az eseményekhez $[0, 1]$-beli számokat rendelő függvény. Például

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}; \qquad \mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

Kapcsolat a relatív gyakorisággal

Legyen Ω az eseménytér, a lehetséges kimenetelek halmaza, és $A \subseteq \Omega$ egy esemény, vagyis ennek egy részhalmaza.

Az A esemény **relatív gyakorisága** n kísérletből:

$$r(A) = \frac{A \text{ bekövetkezéseinek száma}}{\text{az összes kísérlet száma}} = \frac{A \text{ bekövetkezéseinek száma}}{n}.$$

A relatív gyakoriságra az alábbiak igazak:

- **eseményekhez rendel nemnegatív számokat**, azaz $A \in \mathcal{A}$ esetén $r(A) \geq 0$
- **additív**: ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ események, és bármely kettő metszete üres, akkor

$$r(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = r(A_1) + r(A_2) + r(A_3) + \ldots$$

- $r(\Omega) = 1$, azaz a biztos esemény relatív gyakorisága 1

Vagyis a valószínűség azon tulajdonságait, amikből kiindultunk, a relatív gyakoriság is teljesíti.

Halmazok és részhalmazok

Legyen $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ egy véges halmaz.

Az Ω elemei: $a_1 \in \Omega$, $a_2 \in \Omega$, stb.

Az Ω részhalmazai: $A \subseteq \Omega$ részhalmaza Ω-nak, ha A egy olyan halmaz, melynek minden eleme Ω-nak is eleme. Például: $A = \{a_2, a_3, a_5\} \subseteq \Omega$.

Például: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, ekkor $A = \{2, 4\} \subseteq \Omega$ részhalmaza Ω-nak, de $B = \{2, 4, 6\}$ nem részhalmaza Ω-nak.

Az $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ részhalmazai: $\emptyset$ (üres halmaz, ez minden halmaznak a részhalmaza), $\{1\}, \{2\}, \ldots, \{5\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \ldots, \{1, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Összesen $2^5 = 32$ részhalmaza van: mind az öt elemről külön-külön eldönthetjük, hogy bekerüljön-e a részhalmazba.

Általában, egy n elemű halmaznak 2^n részhalmaza van. Például egy egyeleműnek 2 (az üres és saját maga), egy kételeműnek 4, egy háromeleműnek 8, és így tovább.

Jelölések és műveletek eseményekkel

- Ω az eseménytér, ez a biztos esemény
- $\emptyset$ (üres halmaz) esemény neve: lehetetlen esemény
- az események összessége, halmaza: $\mathcal{A}$ (minden eleme Ω egy részhalmaza)

Jelölések és műveletek eseményekkel

- Ω az eseménytér, ez a biztos esemény
- $\emptyset$ (üres halmaz) esemény neve: lehetetlen esemény
- az események összessége, halmaza: $\mathcal{A}$ (minden eleme Ω egy részhalmaza)
- $A, B \in \mathcal{A}$ események **uniója** (jelölés: $A \cup B$) azon elemi események halmaza, melyek A és B közül legalább az egyikben benne vannak
- $A, B \in \mathcal{A}$ események **metszete** (jelölés: $A \cap B$) azon elemi események halmaza, melyek A-ban és B-ben is benne vannak
- $A \in \mathcal{A}$ és $B \in \mathcal{A}$ **kizáró események**, ha $A \cap B = \emptyset$, azaz nincs olyan elemi esemény, mely A-ban és B-ben is benne van
- $A \in \mathcal{A}$ esemény **ellentettje/komplementere**: $\overline{A} = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$, azaz azokból az elemi eseményekből áll, melyek nincsenek A-ban

Házi feladat szeptember 18., csütörtök, 14:00-ig

Egy iskolában 16 osztály van, és minden osztályba 30-an járnak.

a) Egy közvéleménykutatáshoz kiválasztunk 60 különböző diákot ebből az iskolából. Mik az elemi események, és hány darab van belőlük?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott diákok halmaza két teljes osztály (az a kiválasztott diákok összesen két különböző osztályba járnak)?

c) Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott diákok halmaza úgy alakul, hogy hat osztály mindegyikéből választottunk 10-10 diákot?