

Diszkrét valószínűségi változók várható értéke (5. ea.)

Definíció (Várható érték, diszkrét eset)

Legyen $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ olyan diszkrét valószínűségi változó, melynek eloszlása $(x_1, p_1), (x_2, p_2), \dots$, azaz $\mathbb{P}(X = x_i) = p_i$, ahol $i = 1, 2, \dots$. Ekkor X várható értéke:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i, \quad \text{ha} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i < \infty.$$

Diszkrét valószínűségi változók várható értéke (5. ea.)

Definíció (Várható érték, diszkrét eset)

Legyen $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ olyan diszkrét valószínűségi változó, melynek eloszlása $(x_1, p_1), (x_2, p_2), \dots$, azaz $\mathbb{P}(X = x_i) = p_i$, ahol $i = 1, 2, \dots$. Ekkor X várható értéke:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i, \quad \text{ha} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i < \infty.$$

Példa: három gyerek. Legyen X a fiúk száma a három gyerek közül. Ekkor

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Példa: szabályos kockadobás. Legyen Y egy szabályos dobókockával dobott szám. Ekkor

$$\mathbb{E}(Y) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3,5.$$

Diszkrét valószínűségi változók várható értéke

- (elfajult eloszlás) Ha $X = c$ fennáll 1 valószínűséggel: $\mathbb{E}(X) = c \cdot \mathbb{P}(X = c) = c$.
- (korlátosság) Ha $a \leq X \leq b$ valamely $a < b$ számokra, akkor $a \leq \mathbb{E}(X) \leq b$.
- (egyenletes eloszlás) Ha az x_1, x_2, \dots, x_n számok mindegyikének $1/n$ a valószínűsége, akkor a várható érték a számok számtani közepe: $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)$.
- (indikátor) Legyen \mathbb{I}_A az A esemény indikátora, vagyis 1, ha A bekövetkezik, és 0 különben. Ekkor $\mathbb{E}(\mathbb{I}_A) = 1 \cdot \mathbb{P}(\mathbb{I}_A = 1) = \mathbb{P}(A)$.
- (összeg) Ha X, Y valószínűségi változók és $X + Y$ várható értéke létezik, akkor

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).$$

Függvény várható értéke

Állítás

Legyen $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ diszkrét valószínűségi változó, melynek lehetséges értékei x_1, x_2, \dots , továbbá $\mathbb{P}(X = x_k) = p_k$ teljesül $k \geq 1$ esetén. Legyen továbbá $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény. Ekkor

$$\mathbb{E}(g(X)) = g(x_1)p_1 + g(x_2)p_2 + g(x_3)p_3 \dots,$$

ha ez a várható érték létezik.

Például: legyen Y egy szabályos dobókockával dobott szám. Ekkor $g(x) = x^2$ -tel:

$$\mathbb{E}(Y^2) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{6} = 15,17.$$

Függvény várható értéke

Állítás

Legyen $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ diszkrét valószínűségi változó, melynek lehetséges értékei x_1, x_2, \dots , továbbá $\mathbb{P}(X = x_k) = p_k$ teljesül $k \geq 1$ esetén. Legyen továbbá $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény. Ekkor

$$\mathbb{E}(g(X)) = g(x_1)p_1 + g(x_2)p_2 + g(x_3)p_3 \dots,$$

ha ez a várható érték létezik.

Például: legyen Y egy szabályos dobókockával dobott szám. Ekkor $g(x) = x^2$ -tel:

$$\mathbb{E}(Y^2) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{6} = 15,17.$$

Valószínűségi változó szórása

Lehetséges motiváció: nem mindegy, hogy a buszok ütemesen (szabályosan) tíz percenként érkeznek, vagy a követési idő várható értéke tíz perc, de hol öt, hol tizenöt percenként jönnek; egy mérőeszköztől a mérési hiba, vagyis a mérés bizonytalansága is fontos, például nem mindegy, hogy adott pontosság eléréséhez hány mérést kell átlagolni.

Definíció (Szórásnégyzet (variancia))

Legyen $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}(X^2)$ létezik. Ekkor X szórásnégyzete:

$$D^2(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}X)^2\right).$$

Valószínűségi változó szórása

Lehetséges motiváció: nem mindegy, hogy a buszok ütemesen (szabályosan) tíz percenként érkeznek, vagy a követési idő várható értéke tíz perc, de hol öt, hol tizenöt percenként jönnek; egy mérőeszköztől a mérési hiba, vagyis a mérés bizonytalansága is fontos, például nem mindegy, hogy adott pontosság eléréséhez hány mérést kell átlagolni.

Definíció (Szórásnégyzet (variancia))

Legyen $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}(X^2)$ létezik. Ekkor X szórásnégyzete:

$$D^2(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}X)^2\right).$$

Definíció (Szórás (standard deviation))

Legyen $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}(X^2)$ létezik. Ekkor X szórásnégyzete:

$$D(X) = \sqrt{\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}X)^2\right)}.$$

A szórás kiszámítása

Állítás

Legyen X olyan diszkrét valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}(X^2)$ létezik. Ekkor

$$D^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2.$$

A szórás kiszámítása

Állítás

Legyen X olyan diszkrét valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}(X^2)$ létezik. Ekkor

$$D^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2.$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} D^2(X) &= \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}X)^2\right) = \mathbb{E}\left(X^2 - 2X\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2\right) = \\ &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(2X\mathbb{E}(X)) + \mathbb{E}(X)^2 = \\ &= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2, \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy összeg várható értéke a várható értékek összege, illetve hogy a konstans szorzó kiemelhető.

A szórás kiszámítása

Állítás

Legyen X olyan diszkrét valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}(X^2)$ létezik. Ekkor

$$D^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2.$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} D^2(X) &= \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}X)^2\right) = \mathbb{E}\left(X^2 - 2X\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2\right) = \\ &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(2X\mathbb{E}(X)) + \mathbb{E}(X)^2 = \\ &= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2, \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy összeg várható értéke a várható értékek összege, illetve hogy a konstans szorzó kiemelhető.

Megjegyzés: az x_1, x_2, \dots, x_n számok tapasztalati szórása

$$\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2}.$$

Diszkrét valószínűségi változó szórása

Állítás

Legyen X olyan diszkrét valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}(X^2)$ létezik. Ekkor

$$D^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2.$$

Állítás (A szórás kiszámítása egész értékek esetén)

Legyen X olyan diszkrét valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}(X^2)$ létezik, és melynek lehetséges értékei nemnegatív egészek. Ekkor

$$D^2(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \mathbb{P}(X = k) - \mathbb{E}(X)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \mathbb{P}(X = k) - \left[\sum_{k=0}^{\infty} k \mathbb{P}(X = k) \right]^2.$$

Diszkrét valószínűségi változó szórása

Legyen továbbra is X a fiúk száma három gyerek közül:

$$\mathbb{P}(X = 0) = 1/8; \quad \mathbb{P}(X = 1) = 3/8; \quad \mathbb{P}(X = 2) = 3/8; \quad \mathbb{P}(X = 3) = 1/8.$$

Diszkrét esetben így számolhatunk:

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^3 k^2 \mathbb{P}(X = k) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 4 \cdot \frac{3}{8} + 9 \cdot \frac{1}{8} = \frac{24}{8} = 3.$$

Ebből és a korábbi számolásból

$$D^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = 3 - 1,5^2 = 3 - 2,25 = 0,75 = \frac{3}{4}.$$

Végül pedig a fiúk számának szórása:

$$D(X) = \sqrt{\frac{3}{4}} = 0,866.$$

A kockadobás szórása

Legyen X egy szabályos dobókockával dobott szám. Ekkor

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{6} \cdot 1^2 + \frac{1}{6} \cdot 2^2 + \frac{1}{6} \cdot 3^2 + \frac{1}{6} \cdot 4^2 + \frac{1}{6} \cdot 5^2 + \frac{1}{6} \cdot 6^2 = \frac{91}{6}.$$

Másrészt

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = \frac{7}{2}.$$

Ebből

$$D^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 2,92.$$

A kockadobás szórása: $D(X) = \sqrt{2,92} = 1,71$.

Általában n oldalú dobókocka esetén: $D(X) = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$.

Binomiális eloszlás: példa

Egy munkahelyi csapatban **hatan** dolgoznak együtt.
Tegyük fel, hogy egy tetszőleges napon **egymástól függetlenül**
mindannyian $p = 0,03$ valószínűséggel **hiányoznak**.

Mennyi a valószínűsége, hogy egy munkanapon
pontosan ketten hiányoznak a csapatból?

Binomiális eloszlás: példa

Egy munkahelyi csapatban **hatan** dolgoznak együtt.
Tegyük fel, hogy egy tetszőleges napon **egymástól függetlenül**
mindannyian $p = 0,03$ valószínűséggel **hiányoznak**.

Mennyi a valószínűsége, hogy egy munkanapon
pontosan ketten hiányoznak a csapatból?



néhány jó lehetőség és a valószínűsége:

0,03	0,03	0,97	0,97	0,97	0,97	$\rightarrow 0,03^2 \cdot 0,97^4$
0,03	0,97	0,03	0,97	0,97	0,97	$\rightarrow 0,03^2 \cdot 0,97^4$
0,03	0,97	0,97	0,03	0,97	0,97	$\rightarrow 0,03^2 \cdot 0,97^4$

...

0,97	0,03	0,03	0,97	0,97	0,97	$\rightarrow 0,03^2 \cdot 0,97^4$
------	------	------	------	------	------	-----------------------------------

...

0,97	0,97	0,97	0,97	0,03	0,03	$\rightarrow 0,03^2 \cdot 0,97^4$
------	------	------	------	------	------	-----------------------------------

szorzás

Binomiális eloszlás: példa

Egy munkahelyi csapatban **hatan** dolgoznak együtt.

Tegyük fel, hogy egy tetszőleges napon **egymástól függetlenül** mindannyian $p = 0,03$ valószínűséggel **hiányoznak**.

Mennyi a valószínűsége, hogy egy munkanapon **pontosan ketten hiányoznak a csapatból?**

0,97	0,03	0,03	0,97	0,97	0,97
------	------	------	------	------	------

 $\rightarrow 0,03^2 \cdot 0,97^4$

a jó lehetőségek száma, azaz
hányféleképpen választhatjuk ki a két hiányzót:

egy jó lehetőség valószínűsége:

tehát a valószínűség:

Binomiális eloszlás: példa

Egy munkahelyi csapatban **hatan** dolgoznak együtt.

Tegyük fel, hogy egy tetszőleges napon **egymástól függetlenül** mindannyian $p = 0,03$ valószínűséggel **hiányoznak**.

Mennyi a valószínűsége, hogy egy munkanapon **pontosan ketten hiányoznak a csapatból?**

0,97	0,03	0,03	0,97	0,97	0,97
------	------	------	------	------	------

 $\rightarrow 0,03^2 \cdot 0,97^4$

a jó lehetőségek száma, azaz
hányféleképpen választhatjuk ki a két hiányzót: $\binom{6}{2}$

egy jó lehetőség valószínűsége: $0,03^2 \cdot 0,97^4$

tehát a valószínűség:

$$\mathbb{P}(\text{pontosan két hiányzó}) = \binom{6}{2} \cdot 0,03^2 \cdot 0,97^4 = 1,2\%.$$

Binomiális eloszlás

- n független kísérletet végzünk;
- mindegyik p valószínűséggel sikerül;
- X a sikeres kísérletek száma.

Például:

- Visszatevéses mintavétel, n húzás, p a fekete golyók aránya.
- Egy felmérésben $n = 1500$ embert kérdezőnk meg, egy adott kérdésre mindenki egymástól függetlenül $p = 0,8$ valószínűséggel válaszol. A válaszok száma binomiális eloszlású.
- Egy biztosító $n = 60000$ ügyfelének mindegyike egymástól függetlenül $p = 0,0001$ valószínűséggel okoz balesetet egy adott évben. A balesetet okozó ügyfelek száma binomiális eloszlású.
- Tegyük fel, hogy a nyár $n = 92$ napjának mindegyikén egymástól függetlenül $p = 0,02$ valószínűséggel lesz jégeső egy adott helyen. A nyári jégesős napok száma binomiális eloszlású.

Binomiális eloszlás

- n **független** kísérletet végzünk;
- mindegyik p **valószínűséggel** sikerül;
- X a sikeres kísérletek száma.

Mennyi a valószínűsége, hogy **pontosan k kísérlet sikerül**, azaz $X = k$?
Ahogyan a korábbi példában láttuk:

- A jó lehetőségek száma, azaz hányféleképpen választhatjuk ki, hogy melyik k kísérlet sikeres: $\binom{n}{k}$.
- Egy jó lehetőség valószínűsége: $p^k(1-p)^{n-k}$, hiszen a kísérletek függetlenek, ezért az együttes bekövetkezés (metszet) valószínűsége a valószínűségek szorzata, és k kísérlet sikerül, a többi $n-k$ nem.
- Mivel minden jó lehetőség ugyanolyan valószínű, az $X = k$ valószínűsége a lehetőségek számának és egy lehetőség valószínűségének szorzata:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Binomiális eloszlás: definíció

- n független kísérletet végzünk;
- mindegyik p valószínűséggel sikerül;
- X a sikeres kísérletek száma.

Az X valószínűségi változó **binomiális eloszlású** n renddel és p paraméterrel, ha lehetséges értékei:

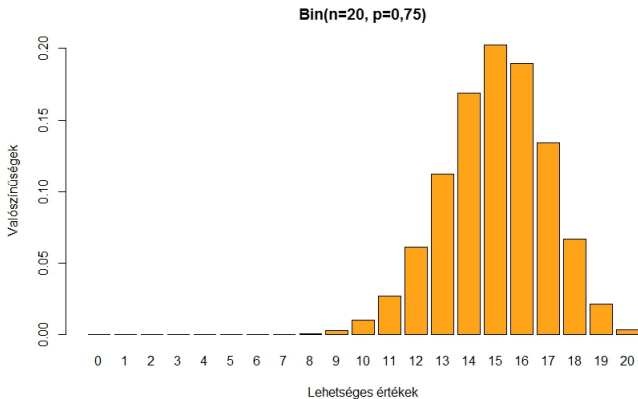
$$0, 1, 2, \dots, n,$$

és minden $0 \leq k \leq n$ egészre

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

($n \geq 1$ egész, $0 < p < 1$.) Jelölés: $\text{Bin}(n, p)$.

Példa: binomiális eloszlás



Binomiális eloszlás, $n = 20$, $p = 0,75$. Vízszintes tengely: lehetséges értékek, azaz $k = 0, 1, \dots, 20$, oszlopok magassága: a $\mathbb{P}(X = k)$ valószínűségek.

Példa: binomiális eloszlás

Egy felmérésben $n = 1500$ embert kérdezzük meg. Egy adott kérdésre minden résztvevő **egymástól függetlenül** $p = 0,8$ valószínűséggel válaszol. Jelölje X , hogy hányan válaszoltak erre a kérdésre. Ekkor

- X **binomiális eloszlású** $n = 1500$ renddel és $p = 0,8$ paraméterrel.
- Tetszőleges $0 \leq k \leq 1500$ esetén

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(k \text{ válasz}) &= \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \\ &= \binom{1500}{k} 0,8^k \cdot 0,2^{1500-k}.\end{aligned}$$

- Például annak valószínűsége, hogy pontosan $k = 1200$ -an válaszolnak a kérdésre:

$$\mathbb{P}(1200 \text{ válasz}) = \mathbb{P}(X = 1200) = \binom{1500}{1200} 0,8^{1200} \cdot 0,2^{300} = 2,57\%.$$

A binomiális eloszlás várható értéke és szórása

Ha az X valószínűségi változó **binomiális eloszlású** n ranggal és p paraméterrel, azaz

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, \dots, n),$$

akkor X **várható értéke**, illetve **szórása**:

$$\mathbb{E}(X) = np; \quad D(X) = \sqrt{np(1 - p)}.$$

A binomiális eloszlás várható értéke: bizonyítás

Állítás

Legyen X valószínűségi változó n renddel és p paraméterrel. Ekkor X várható értéke np .

A binomiális eloszlásra úgy is gondolhattunk, mint a sikeres kísérletek számára, n független, p valószínűséggel bekövetkező eseményből. Tekintsük az alábbi indikátor valószínűségi változókat minden $j = 1, 2, \dots, n$ -re:

$$\mathbb{I}_j = \begin{cases} 1, & \text{ha a } j. \text{ kísérlet sikerül;} \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

A binomiális eloszlás várható értéke: bizonyítás

Állítás

Legyen X valószínűségi változó n ranggal és p paraméterrel. Ekkor X várható értéke np .

A binomiális eloszlásra úgy is gondolhattunk, mint a sikeres kísérletek számára, n független, p valószínűséggel bekövetkező eseményből. Tekintsük az alábbi indikátor valószínűségi változókat minden $j = 1, 2, \dots, n$ -re:

$$\mathbb{I}_j = \begin{cases} 1, & \text{ha a } j. \text{ kísérlet sikerül;} \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Ekkor az \mathbb{I}_j indikátorok összege éppen X lesz. Így a várható érték additív tulajdonsága alapján

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^n \mathbb{I}_j\right) = \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(\mathbb{I}_j) = \sum_{j=1}^n 1 \cdot \mathbb{P}(\mathbb{I}_j = 1) = np. \quad \square$$

Példa: binomiális eloszlás

Egy felmérésben $n = 1500$ embert kérdezőnk meg. Egy adott kérdésre minden résztvevő **egymástól függetlenül** $p = 0,8$ valószínűséggel válaszol. Jelölje X , hogy hányan válaszoltak erre a kérdésre. Ekkor

- A válaszadók számának **várható értéke**:

$$\mathbb{E}(X) = np = 1500 \cdot 0,8 = 1200.$$

- A válaszadók számának **szórása**:

$$D(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{1500 \cdot 0,8 \cdot 0,2} = 15,5.$$

A binomiális eloszlás közelítése

Tegyük fel, hogy egy biztosító $n = 100000$ ügyfelének mindegyike egy év alatt egymástól függetlenül $p = 0,0001$ valószínűséggel okoz balesetet. A balesetet okozó ügyfelek számának (ezt jelöljük X -szel) **várható értéke**:

$$\mathbb{E}(X) = np = 100000 \cdot 0,0001 = 10.$$

Annak valószínűsége, hogy **pontosan k ügyfél okoz balesetet**:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{100000}{k} \cdot 0,0001^k \cdot 0,9999^{100000-k} =$$

A binomiális eloszlás közelítése

Tegyük fel, hogy egy biztosító $n = 100000$ ügyfelének mindegyike egy év alatt egymástól függetlenül $p = 0,0001$ valószínűséggel okoz balesetet. A balesetet okozó ügyfelek számának (ezt jelöljük X -szel) **várható értéke**:

$$\mathbb{E}(X) = np = 100000 \cdot 0,0001 = 10.$$

Annak valószínűsége, hogy **pontosan k ügyfél okoz balesetet**:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) &= \binom{100000}{k} \cdot 0,0001^k \cdot 0,9999^{100000-k} = \\ &= \frac{100000 \cdot 99999 \cdot \dots \cdot (100001 - k)}{k!} \cdot 0,0001^k \cdot 0,9999^{100000-k} \approx \end{aligned}$$

A binomiális eloszlás közelítése

Tegyük fel, hogy egy biztosító $n = 100000$ ügyfelének mindegyike egy év alatt egymástól függetlenül $p = 0,0001$ valószínűséggel okoz balesetet. A balesetet okozó ügyfelek számának (ezt jelöljük X -szel) **várható értéke**:

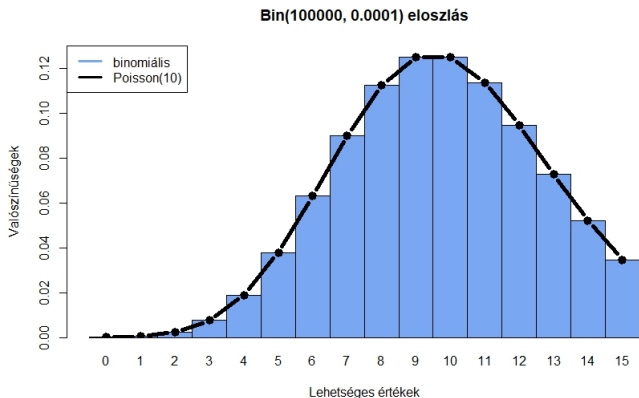
$$\mathbb{E}(X) = np = 100000 \cdot 0,0001 = 10.$$

Annak valószínűsége, hogy **pontosan k ügyfél okoz balesetet**:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) &= \binom{100000}{k} \cdot 0,0001^k \cdot 0,9999^{100000-k} = \\ &= \frac{100000 \cdot 99999 \cdot \dots \cdot (100001 - k)}{k!} \cdot 0,0001^k \cdot 0,9999^{100000-k} \approx \\ &\approx \frac{100000^k \cdot 0,0001^k}{k!} \left(1 - \frac{10}{100000}\right)^{100000} \approx \frac{10^k}{k!} e^{-10}, \end{aligned}$$

felhasználva, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = e^{-x}$ tetszőleges $x > 0$ -ra.

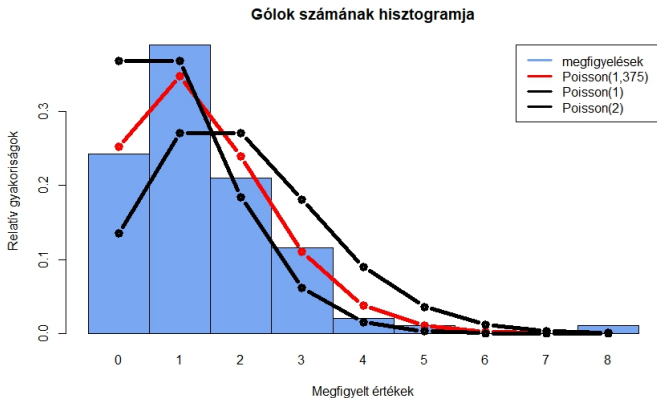
A binomiális eloszlás közelítése



Binomiális eloszlás $n = 100000$ renddel és $p = 0,0001$ paraméterrel (vízszintes tengely: k , oszlopok magassága: $\mathbb{P}(X = k)$).

Feketével a $\frac{10^k}{k!} e^{-10}$ függvény (ez lesz a Poisson(10)-eloszlás).

Poisson-eloszlás



A gólok számának hisztogramja $n = 95$ mérkőzésen, és különböző paraméterű Poisson-eloszlások

A Poisson-eloszlás alkalmazásai

- **ritkán bekövetkező események száma adott időszak alatt:**
 - ▶ lórúgás halálos áldozatainak száma a porosz hadseregben (ez volt az első statisztikai példa)
 - ▶ a balesetek száma egy városban egy hét vagy egy hónap alatt;
 - ▶ a földrengések száma egy év alatt
- egy rendszerbe beérkező igények száma egy adott időszakban:
 - ▶ egy üzletbe beérkező vásárlók száma egy óra alatt
 - ▶ egy weboldal letöltéseinek száma egy óra alatt

A Poisson-eloszlás alkalmazásai

- **ritkán bekövetkező események száma adott időszak alatt:**
 - ▶ lórúgás halálos áldozatainak száma a porosz hadseregben (ez volt az első statisztikai példa)
 - ▶ a balesetek száma egy városban egy hét vagy egy hónap alatt;
 - ▶ a földrengések száma egy év alatt
- egy rendszerbe beérkező igények száma egy adott időszakban:
 - ▶ egy üzletbe beérkező vásárlók száma egy óra alatt
 - ▶ egy weboldal letöltéseinek száma egy óra alatt
- **általában:** véletlen időközönként bekövetkező események száma adott időszak alatt

Poisson-folyamat: a t idő alatt bekövetkező események száma Poisson-eloszlású ct paraméterrel.

Ekkor a t idő alatt bekövetkező események számának várható értéke:

A Poisson-eloszlás alkalmazásai

- **ritkán bekövetkező események száma adott időszak alatt:**
 - ▶ lórúgás halálos áldozatainak száma a porosz hadseregben (ez volt az első statisztikai példa)
 - ▶ a balesetek száma egy városban egy hét vagy egy hónap alatt;
 - ▶ a földrengések száma egy év alatt
- egy rendszerbe beérkező igények száma egy adott időszakban:
 - ▶ egy üzletbe beérkező vásárlók száma egy óra alatt
 - ▶ egy weboldal letöltéseinek száma egy óra alatt
- **általában:** véletlen időközönként bekövetkező események száma adott időszak alatt

Poisson-folyamat: a t idő alatt bekövetkező események száma Poisson-eloszlású ct paraméterrel.

Ekkor a t idő alatt bekövetkező események számának várható értéke: ct , azaz az intervallum hosszával arányos.

Poisson-eloszlás: definíció

- ha n független kísérletből mindegyik p valószínűséggel sikeres, ahol n „nagy” és p „kicsi”: $\lambda = np$ a sikeres kísérletek számának várható értéke;
- annak valószínűsége, hogy pontosan k kísérlet sikeres, $\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ -val közelíthető (a számolás és az ábra alapján);
- ez a gyakran használt Poisson-eloszlás **ritkán bekövetkező események számának** modellezésére.

Definíció

Legyen $\lambda > 0$. Az X valószínűségi változó λ paraméterű Poisson-eloszlású, ha lehetséges értékei:

$$k = 0, 1, 2, \dots, \text{ és ekkor } \mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

A λ paraméterű Poisson-eloszlás **várható értéke** és **szórása**:

$$\mathbb{E}(X) = \lambda; \quad D(X) = \sqrt{\lambda}.$$

Poisson-eloszlás: példa

Az X valószínűségi változó λ paraméterű Poisson-eloszlású, ha lehetséges értékei:

$$k = 0, 1, 2, \dots, \text{ és ekkor } \mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

A λ paraméterű Poisson-eloszlás **várható értéke** és **szórása**:

$$\mathbb{E}(X) = \lambda; \quad D(X) = \sqrt{\lambda}.$$

Példa. Tegyük fel, hogy egy városban az egy nap alatt bekövetkező autóbalesetek száma Poisson-eloszlású, és **várható értéke 3,61**. Ekkor az egy nap alatt bekövetkező autóbalesetek számának **szórása**:

$$D(X) = \sqrt{3,61} = 1,9.$$

Annak valószínűsége, hogy pontosan 5 baleset lesz:

$$\mathbb{P}(X = 5) = \frac{3,61^5}{5!} e^{-5} = 14\%.$$

Binomális és Poisson-eloszlás az R-ben

- ha X binomiális eloszlású n renddel és p paraméterrel, akkor

$$\mathbb{P}(X = k) : \quad \text{dbinom}(k, \text{size} = n, \text{prob} = p)$$

és

$$\mathbb{P}(X \leq k) : \quad \text{pbinom}(k, \text{size} = n, \text{prob} = p).$$

- Továbbá az

```
minta<-rbinom(r, size=n, prob=p)
```

eredményeképpen a „minta” vektorba r darab *független* adott binomiális eloszlású valószínűségi változó kerül.

- ha X Poisson-eloszlású λ paraméterrel, akkor

$$\mathbb{P}(X = k) : \quad \text{dpois}(k, \text{lambdas} = \lambda)$$

és

$$\mathbb{P}(X \leq k) : \quad \text{ppois}(k, \text{lambdas} = \lambda).$$

- Továbbá az

```
minta<-rpois(r, lambdas=\lambda)
```

eredményeképpen a „minta” vektorba r darab *független* λ paraméterű eloszlású valószínűségi változó kerül.

Példa R-ben

```
> minta=rbinom(100, size=100000, prob=0.0001)
```

```
> hist(minta)
```

```
> dbinom(8, size=100000, prob=0.0001)
```

```
[1] 0.1126013
```

```
> minta=rpois(100, lambda=3.61)
```

```
> hist(minta)
```

```
> mean(minta)
```

```
[1] 3.91
```

```
> dpois(5, lambda=3.61)
```

```
[1] 0.1382139
```

Házi feladat október 9., hétfő, 10:15-ig

Péter kosarazik. Ha nem fáradt az edzésen, akkor a büntetőket egymástól függetlenül $0,7$ valószínűséggel dobja be, ha fáradt az edzésen, akkor (szintén egymástól függetlenül) $0,4$ valószínűséggel. Azt is tudjuk, hogy az edzések 20% -án szokott fáradt lenni.

Edzés után Péter találkozik Danival, akinek csak annyit mond, hogy ma 6 -ból 4 büntetőt dobott be (tehát azt nem tudjuk, hogy fáradt volt-e aznap, vagy sem). Ez alapján mennyi a feltételes valószínűsége, hogy Péter aznap fáradt volt?

Házi feladat október 9., hétfő, 10:15-ig

Legyen A az az esemény, hogy Péter a 6-ból 4 büntetőt dobott be, B pedig az az esemény, hogy fáradt volt az aznapi edzésen. A $\{B, \bar{B}\}$ teljes eseményrendszerre alkalmazva Bayes tételét, valamint felhasználva, hogy a sikeres dobások száma binomiális eloszlású:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B|A) &= \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|\bar{B})\mathbb{P}(\bar{B})} = \\ &= \frac{\binom{6}{4}0,4^4 \cdot 0,6^2 \cdot 0,2}{\binom{6}{4}0,4^4 \cdot 0,6^2 \cdot 0,2 + \binom{6}{4}0,7^4 \cdot 0,3^2 \cdot 0,8} = 9,6\%.\end{aligned}$$

Hipergeometriai eloszlás: példa

Egy sportcsapat $N = 20$ **tagja** közül $M = 9$ **balkezes**.

A pályán egyszerre $n = 7$ **különböző** játszik.

Tegyük fel, hogy minden hétfős összeállítás egyformán valószínű.

Milyen eloszlású a pályán a **balkezes játékosok száma**, X ?

Hipergeometriai eloszlás: példa

Egy sportcsapat $N = 20$ tagja közül $M = 9$ balkezes.

A pályán egyszerre $n = 7$ különböző játszik.

Tegyük fel, hogy minden hétfős összeállítás egyformán valószínű.

Milyen eloszlású a pályán a balkezes játékosok száma, X ?

A hétfős összeállítások száma:

k balkezes játékos kiválasztása:

$7 - k$ jobbkezes játékos kiválasztása:

A jó lehetőségek száma összesen:

Hipergeometriai eloszlás: példa

Egy sportcsapat $N = 20$ tagja közül $M = 9$ balkezes.

A pályán egyszerre $n = 7$ különböző játszik.

Tegyük fel, hogy minden hétfős összeállítás egyformán valószínű.

Milyen eloszlású a pályán a balkezes játékosok száma, X ?

A hétfős összeállítások száma: $\binom{20}{7}$

k balkezes játékos kiválasztása: $\binom{9}{k}$

$7 - k$ jobbkezes játékos kiválasztása: $\binom{11}{7-k}$

A jó lehetőségek száma összesen: $\binom{9}{k} \cdot \binom{11}{7-k} \leftarrow$

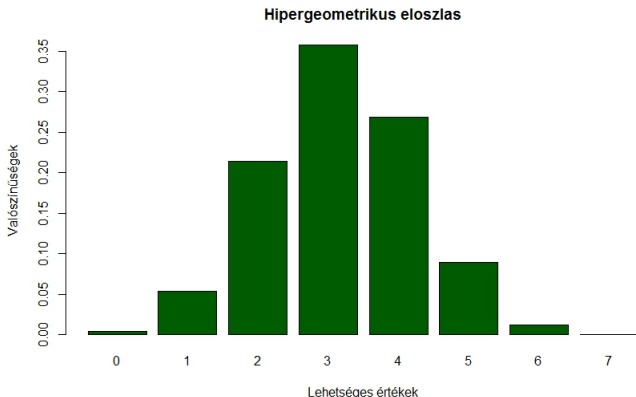
osztás: minden lehetőség egyformán valószínű

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{9}{k} \cdot \binom{11}{7-k}}{\binom{20}{7}}$$

szorzás: bármely balkezes választás bármely jobbkezesessel jó

visszatevés nélküli mintavétel

Hipergeometriai eloszlás: példa



A kiválasztott balkezes játékosok számának eloszlása hipergeometriai eloszlás, $N = 20$, $M = 9$, $n = 7$

vízszintes: k , oszlopok magassága: $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{9}{k} \cdot \binom{11}{7-k}}{\binom{20}{7}}$.

Hipergeometriai eloszlás

Legyenek N, M, n pozitív egészek úgy, hogy $1 \leq n \leq M \leq N$. Az X valószínűségi változó **hipergeometriai eloszlású**, ha

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

- **visszatevés nélküli mintavételnél** a húzott fekete golyók száma: N golyó, ebből M fekete, n -szer húzunk visszatevés nélkül
- lottósorsolásnál a találatok száma, X , hipergeometrikus eloszlású $N = 90$, $M = 5$, $n = 5$ paraméterekkel:

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(k \text{ találat}) = \frac{\binom{5}{k} \binom{85}{5-k}}{\binom{90}{5}} \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

A hipergeometriai eloszlás várható értéke és szórása

Ha az X valószínűségi változó hipergeometriai eloszlású M, N, n paraméterekkel, azaz

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad (k = 0, 1, \dots, n),$$

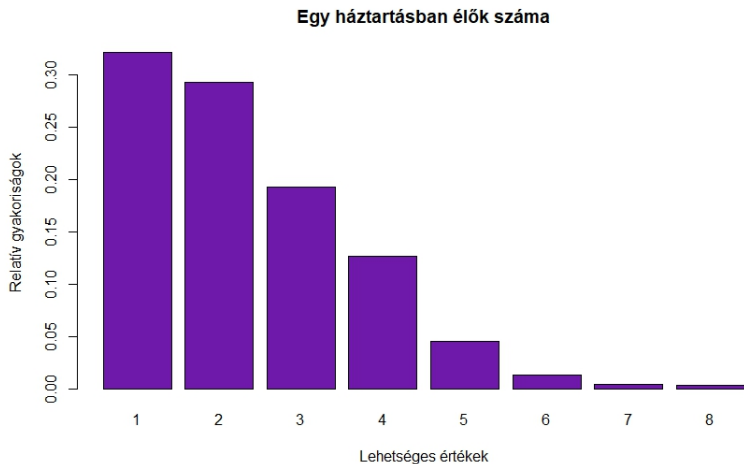
akkor

$$\mathbb{E}(X) = \frac{M}{N}n; \quad D(X) = \sqrt{n \frac{M}{N} \left(1 - \frac{M}{N}\right) \frac{N-n}{N-1}}.$$

Például, ha $N = 20$ játékos közül $M = 9$ balkezes, és $n = 7$ -et választunk visszatevés nélkül, akkor a balkezes játékosok számának, X -nek **várható értéke** és **szórása**:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{9}{20} \cdot 7 = 3,15; \quad D(X) = \sqrt{7 \cdot \frac{9}{20} \cdot \left(1 - \frac{9}{20}\right) \cdot \frac{13}{19}} = 1,09.$$

Megfigyelések



Egy háztartásban élők számának hisztogramja (forrás: KSH, 2011)
($n = 4105698$ a háztartások száma)

Geometriai eloszlás

Egy közvéleménykutatásban mindenki a többiektől függetlenül 0,2 valószínűséggel válaszol egy adott kérdésre. Jelölje Y , hogy hány embert kell megkérdezni, míg találunk egy válaszadót.

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(\text{az első ember válaszol}) = 0,2;$$

$$\mathbb{P}(Y = 2) = \mathbb{P}(\text{az első nem válaszol, a második igen}) =$$

Geometriai eloszlás

Egy közvéleménykutatásban mindenki a többiektől függetlenül 0,2 valószínűséggel válaszol egy adott kérdésre. Jelölje Y , hogy hány embert kell megkérdezni, míg találunk egy válaszadót.

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(\text{az első ember válaszol}) = 0,2;$$

$$\mathbb{P}(Y = 2) = \mathbb{P}(\text{az első nem válaszol, a második igen}) = 0,8 \cdot 0,2;$$

$$\mathbb{P}(Y = 3) = \mathbb{P}(\text{az első kettő nem válaszol, a harmadik igen}) =$$

Geometriai eloszlás

Egy közvéleménykutatásban mindenki a többiektől függetlenül $0,2$ valószínűséggel válaszol egy adott kérdésre. Jelölje Y , hogy hány embert kell megkérdezni, míg találunk egy válaszadót.

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(\text{az első ember válaszol}) = 0,2;$$

$$\mathbb{P}(Y = 2) = \mathbb{P}(\text{az első nem válaszol, a második igen}) = 0,8 \cdot 0,2;$$

$$\mathbb{P}(Y = 3) = \mathbb{P}(\text{az első kettő nem válaszol, a harmadik igen}) = 0,8^2 \cdot 0,2;$$

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(\text{az első } k - 1 \text{ nem válaszol, a } k. \text{ igen}) =$$

Geometriai eloszlás

Egy közvéleménykutatásban mindenki a többiektől függetlenül $0,2$ valószínűséggel válaszol egy adott kérdésre. Jelölje Y , hogy hány embert kell megkérdezni, míg találunk egy válaszadót.

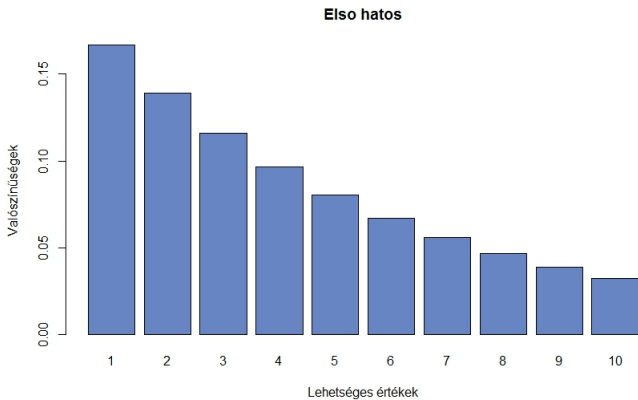
$$\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(\text{az első ember válaszol}) = 0,2;$$

$$\mathbb{P}(Y = 2) = \mathbb{P}(\text{az első nem válaszol, a második igen}) = 0,8 \cdot 0,2;$$

$$\mathbb{P}(Y = 3) = \mathbb{P}(\text{az első kettő nem válaszol, a harmadik igen}) = 0,8^2 \cdot 0,2;$$

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(\text{az első } k - 1 \text{ nem válaszol, a } k. \text{ igen}) = 0,8^{k-1} \cdot 0,2.$$

Példa: geometriai eloszlás



Az első hatos eloszlása: geometriai eloszlás, $p = 1/6$, $k = 10$ -ig

Geometriai eloszlás

- független kísérleteket végzünk;
- mindegyik p valószínűséggel sikerül;
- Y : hányadik kísérlet az első sikeres.

Geometriai eloszlás

- független kísérleteket végzünk;
- mindegyik p valószínűséggel sikerül;
- Y : hányadik kísérlet az első sikeres.

Definíció

Az Y valószínűségi változó **geometriai eloszlású** p paraméterrel, ha lehetséges értékei:

$$1, 2, 3 \dots$$

és minden $1 \leq k$ egészre

$$\mathbb{P}(Y = k) = (1 - p)^{k-1} p.$$

($0 < p < 1$.) Jelölés: $\text{Geo}(p)$. Másik elnevezés: Pascal-eloszlás.

Mivel $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - p)^{k-1} p = 1$, ez valóban valószínűségeloszlás (annak valószínűsége, hogy sosem sikerül a kísérlet, 1).

Geometriai eloszlás várható értéke és szórása

Állítás

Ha az X valószínűségi változó geometriai eloszlású p paraméterrel, azaz

$$\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1} p \quad (k = 1, 2, \dots),$$

akkor

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}; \quad D(X) = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}}.$$

Geometriai eloszlás várható értéke és szórása

Állítás

Ha az X valószínűségi változó geometriai eloszlású p paraméterrel, azaz

$$\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1} p \quad (k = 1, 2, \dots),$$

akkor

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}; \quad D(X) = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}}.$$

Példa. Tegyük fel, hogy egy adott pártot mindenki a többiektől függetlenül $p = 0,06$ valószínűséggel támogat. Jelölje X , hogy hány embert kell megkérdezni, míg az első olyan embert megtaláljuk, aki ezt a pártot támogatná. Ekkor

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{0,06} = 16,67; \quad D(X) = \sqrt{\frac{0,94}{0,06^2}} = 16,16.$$

Nevezetes diszkrét eloszlások várható értéke és szórása

- Ha X binomiális eloszlású n renddel és p paraméterrel:

$$\mathbb{E}(X) = np; \quad D(X) = \sqrt{np(1-p)}.$$

- Ha X hipergeometriai eloszlású N, M, n paraméterekkel:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{M}{N}n; \quad D(X) = \sqrt{n \frac{M}{N} \left(1 - \frac{M}{N}\right) \frac{N-n}{N-1}}.$$

- Ha X Poisson-eloszlású λ paraméterrel:

$$\mathbb{E}(X) = \lambda; \quad D(X) = \sqrt{\lambda};$$

- Ha X geometriai eloszlású p paraméterrel:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}; \quad D(X) = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}}.$$

Függetlenség: példa

Mely valószínűségi változók tekinthetők egymástól függetlennek, és melyek között van kapcsolat? Zsófia egy felmérés véletlenszerűen választott résztvevője.

Zsófia autóinak száma

csapadékmennyiség holnap Budapesten

Zsófia havi jövedelme

napsütéses órák száma holnap Budaörsön

Zsófia életkora

csapadékmennyiség holnap New Yorkban

Függetlenség: példa

Mely valószínűségi változók tekinthetők egymástól függetlennek, és melyek között van kapcsolat? Zsófia egy felmérés véletlenszerűen választott résztvevője.



Függetlenség: példa

Emlékeztető: az A és B események **függetlenek**, ha

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Ha például X a csapadékmennyiség holnap Budapesten (mm-ben), és Y New Yorkban, akkor például

$$A : X \leq 5; \quad B : Y \leq 5$$

esetén ez a feltétel így írható:

$$\mathbb{P}(X \leq 5, Y \leq 5) = \mathbb{P}(X \leq 5) \cdot \mathbb{P}(Y \leq 5).$$

Azaz, feltételezve, hogy a két város időjárása egymástól független: annak valószínűsége, hogy **mindkét helyen legfeljebb 5 mm csapadék lesz**, a két esemény **valószínűségének szorzata**.

Valószínűségi változók függetlensége

- **két valószínűségi változóra:** az $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változók **függetlenek**, ha

$$\mathbb{P}(X \leq t_1, Y \leq t_2) = \mathbb{P}(X \leq t_1) \cdot \mathbb{P}(Y \leq t_2)$$

teljesül tetszőleges $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ valós számokra.

- **véges sok valószínűségi változóra:** $X_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változók **függetlenek**, ha

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 \leq t_1, X_2 \leq t_2, \dots, X_n \leq t_n) &= \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq t_1) \cdot \mathbb{P}(X_2 \leq t_2) \dots \mathbb{P}(X_n \leq t_n) \end{aligned}$$

teljesül tetszőleges t_1, t_2, \dots, t_n valós számokra.

- **megszámlálható sok valószínűségi változóra:** az $X_1, X_2, X_3 \dots$ valószínűségi változók **függetlenek**, ha közülük bármely véges sokat kiválasztva független valószínűségi változókat kapunk.

Függetlenség diszkrét esetben

Ha a valószínűségi változók **diszkrét**, azaz lehetséges értékeik halmaza véges vagy megszámlálhatóan végtelen, akkor a függetlenséget az alábbi módon is ellenőrizhetjük.

Az X és Y **diszkrét** valószínűségi változók pontosan akkor **függetlenek**, ha az X minden lehetséges x_k értékére és az Y minden lehetséges y_l értékére teljesül, hogy

$$\mathbb{P}(X = x_k, Y = y_l) = \mathbb{P}(X = x_k) \cdot \mathbb{P}(Y = y_l) \quad (k, l = 1, 2, \dots).$$

Vagyis: annak valószínűsége, hogy X értéke x_k és Y értéke y_l , ennek a két eseménynek **a valószínűségének a szorzata**.

Valószínűségi változók függetlensége: példa

Kétszer dobunk egy szabályos dobókockával. Igaz-e, hogy az **első dobott szám** és a **második dobott szám** értéke egymástól független?

Valószínűségi változók függetlensége: példa

Kétszer dobunk egy szabályos dobókockával. Igaz-e, hogy az **első dobott szám** és a **második dobott szám** értéke egymástól független?

Tipp. a második dobásnál az első dobás értéke „elfelejtődik”, nincs kapcsolat a két dobás között \Rightarrow a két dobott szám **független**.

Valószínűségi változók függetlensége: példa

Kétszer dobunk egy szabályos dobókockával. Igaz-e, hogy az **első dobott szám** és a **második dobott szám** értéke egymástól független?

Tipp. a második dobásnál az első dobás értéke „elfelejtődik”, nincs kapcsolat a két dobás között \Rightarrow a két dobott szám **független**.

Indoklás. Legyen X az első dobás, Y a második. Legyen például $x_k = 3, y_l = 5$. Ekkor a feltétel teljesül:

$$\frac{1}{36} = \mathbb{P}(X = 3, Y = 5) = \mathbb{P}(X = 3) \cdot \mathbb{P}(Y = 5) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}.$$

Valószínűségi változók függetlensége: példa

Kétszer dobunk egy szabályos dobókockával. Igaz-e, hogy az **első dobott szám** és a **második dobott szám** értéke egymástól független?

Tipp. a második dobásnál az első dobás értéke „elfelejtődik”, nincs kapcsolat a két dobás között \Rightarrow a két dobott szám **független**.

Indoklás. Legyen X az első dobás, Y a második. Legyen például $x_k = 3, y_l = 5$. Ekkor a feltétel teljesül:

$$\frac{1}{36} = \mathbb{P}(X = 3, Y = 5) = \mathbb{P}(X = 3) \cdot \mathbb{P}(Y = 5) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}.$$

Hasonlóképpen tetszőleges (x_k, y_l) lehetséges értékekre (azaz 1 és 6 közötti egészekre) igaz, hogy

$$\frac{1}{36} = \mathbb{P}(X = x_k, Y = y_l) = \mathbb{P}(X = x_k) \cdot \mathbb{P}(Y = y_l) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}.$$

Ezért valóban **a két dobás egymástól független**.

Valószínűségi változók függetlensége: példa

Kétszer dobunk egy szabályos dobókockával. Igaz-e, hogy a dobott számok **összege** és **szorzata** független egymástól?

Valószínűségi változók függetlensége: példa

Kétszer dobunk egy szabályos dobókockával. Igaz-e, hogy a dobott számok **összege** és **szorzata** független egymástól?

Tipp: minél nagyobb az összeg, annál valószínűbb, hogy a szorzat értéke is inkább nagy lesz \Rightarrow **nem függetlenek**.

Indoklás: legyen X az összeg, Y a szorzat. Ha például $X = 2$: ez csak úgy lehet, hogy mindkét dobás 1-es, vagyis ekkor Y értéke biztosan 1. Ezért ha például $x_1 = 2$ és $y_2 = 2$ -t választunk, $X = 2$ és $Y = 2$ egyszerre nem következhetnek be, és így:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{P}(X = 2, Y = 2) \neq \mathbb{P}(X = 2) \cdot \mathbb{P}(Y = 2) = \\ &= \mathbb{P}(11) \cdot \mathbb{P}(12 \text{ vagy } 21) = \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{18} > 0. \end{aligned}$$

Vagyis az $x_1 = 2$ és $y_2 = 2$ párra nem teljesül az előírt feltétel, az **összeg és szorzat nem függetlenek**.

Házi feladat október 15., kedd, 8:15-ig

Tegyük fel, hogy egy országban az emberek fele diplomás, a másik fele nem, továbbá az, hogy egy ember hányszor utazik külföldre egy év alatt, a diplomások esetében Poisson-eloszlású $1,5$ várható értékkel, a nem diplomások esetében pedig szintén Poisson-eloszlású $0,8$ várható értékkel.

a) Megkérdeztünk egy véletlenszerűen választott embert, és ő azt mondta, hogy a tavalyi évben $k = 4$ -szer járt külföldön. Erre feltételesen mennyi a valószínűsége, hogy a megkérdezett ember diplomás?

b) Számítsuk ki ugyanezt a feltételes valószínűséget tetszőleges k -ra, és ábrázoljuk is k függvényében $k = 0, 1, 2, \dots, 4$ -re, vagy még több értékre.