Függetlenség (4. előadás)

Mely események tekinthetők egymástól függetlennek, és melyek között van kapcsolat? Péter egy felmérés véletlenszerűen választott résztvevője.

Péternek van saját autója

holnap Budapesten lesz csapadék

Péter jövedelme több az átlagosnál

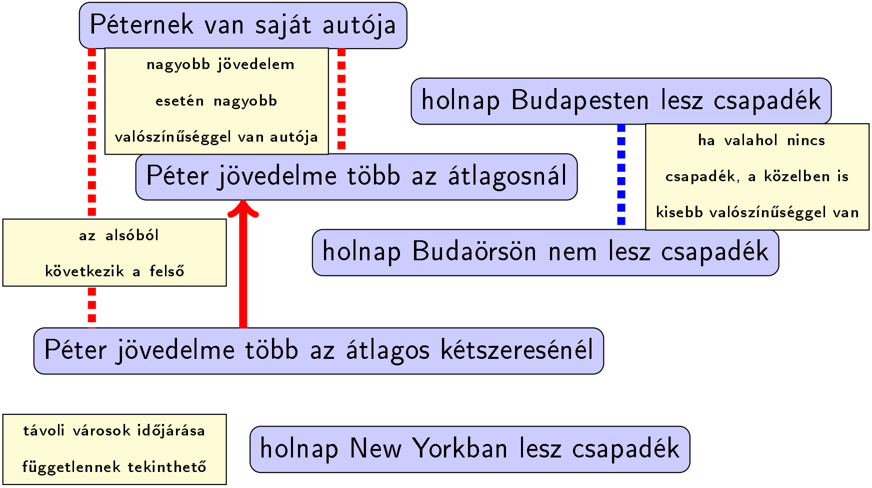
holnap Budaörsön nem lesz csapadék

Péter jövedelme több az átlagos kétszeresénél

holnap New Yorkban lesz csapadék

Függetlenség (4. előadás)

Mely események tekinthetők egymástól függetlennek, és melyek között van kapcsolat? Péter egy felmérés véletlenszerűen választott résztvevője.



Események függetlensége: példa

Tegyük fel, hogy egy városban

- összesen 100000 ember él;
- 15000 embernek **van saját autója (A esemény)**:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{15000}{100000} = 0,15.$$

- 25000-nek **több a jövedelme az átlagosnál** (B esemény):

$$\mathbb{P}(B) = \frac{25000}{100000} = 0,25.$$

- 10000 ember van, akinek **több a jövedelme az átlagosnál és saját autóval rendelkezik**:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{10000}{100000} = 0,1.$$

Független-e A és B, vagyis az, hogy egy véletlenszerűen választott lakos jövedelme több az átlagosnál, és saját autóval rendelkezik?

Események függetlensége: példa

Hasonlítsuk össze **az autóval rendelkezők arányát**

Események függetlensége: példa

Hasonlítsuk össze **az autóval rendelkezők arányát a teljes lakosságban**,

Az autóval rendelkezők aránya a teljes lakosságban:
$\mathbb{P}(A) = \frac{15000}{100000} = 0,15$

Események függetlensége: példa

Hasonlítsuk össze **az autóval rendelkezők arányát a teljes lakosságban**, illetve **az átlagosnál nagyobb jövedelműek között**. Saját autó (A): 10000, nagy jövedelem (B): 25000,
mindkettő ($A \cap B$): 10000, összes lakos: 100000.

Ha független a két esemény, akkor a két arány megegyezik.

Az autóval rendelkezők aránya a teljes lakosságban: $\mathbb{P}(A) = \frac{15000}{100000} = 0,15$	Az autóval rendelkezők aránya az átlagosnál nagyobb jövedelműek között: $\frac{10000}{25000} = 0,4$

Események függetlensége: példa

Hasonlítsuk össze **az autóval rendelkezők arányát a teljes lakosságban**, illetve **az átlagosnál nagyobb jövedelműek között**. Saját autó (A): 10000, nagy jövedelem (B): 25000,
mindkettő ($A \cap B$): 10000, összes lakos: 100000.

Ha független a két esemény, akkor a két arány megegyezik.

Az autóval rendelkezők aránya a teljes lakosságban: $\mathbb{P}(A) = \frac{15000}{100000} = 0,15$	$\neq$	Az autóval rendelkezők aránya az átlagosnál nagyobb jövedelműek között: $\frac{10000}{25000} = 0,4$

Események függetlensége: példa

Hasonlítsuk össze **az autóval rendelkezők arányát a teljes lakosságban**, illetve **az átlagosnál nagyobb jövedelműek között**. Saját autó (A): 10000, nagy jövedelem (B): 25000,
mindkettő ($A \cap B$): 10000, összes lakos: 100000.

Ha független a két esemény, akkor a két arány megegyezik.

Az autóval rendelkezők aránya a teljes lakosságban: $\mathbb{P}(A) = \frac{15000}{100000} = 0,15$	$\neq$	Az autóval rendelkezők aránya az átlagosnál nagyobb jövedelműek között: $\frac{10000}{25000} = 0,4$

Az autóval rendelkezők aránya több az átlagosnál nagyobb jövedelműek között $\Rightarrow$ **a két esemény nem független.**

Események függetlensége: példa

Hasonlítsuk össze **az autóval rendelkezők arányát a teljes lakosságban**, illetve **az átlagosnál nagyobb jövedelműek között**. Saját autó (A): 10000, nagy jövedelem (B): 25000,
mindkettő ($A \cap B$): 10000, összes lakos: 100000.

Az autóval rendelkezők aránya a teljes lakosságban: $\mathbb{P}(A) = \frac{15000}{100000} = 0,15$	$\neq$	Az autóval rendelkezők aránya az átlagosnál nagyobb jövedelműek között: $\frac{10000}{25000} = 0,4$

Akkor egyezett volna meg a két arány, ha $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$, azaz

Események függetlensége: példa

Hasonlítsuk össze **az autóval rendelkezők arányát a teljes lakosságban**, illetve **az átlagosnál nagyobb jövedelműek között**. Saját autó (A): 10000, nagy jövedelem (B): 25000,
mindkettő ($A \cap B$): 10000, összes lakos: 100000.

Az autóval rendelkezők aránya a teljes lakosságban: $\mathbb{P}(A) = \frac{15000}{100000} = 0,15$	$\neq$	Az autóval rendelkezők aránya az átlagosnál nagyobb jövedelműek között: $\frac{10000}{25000} = 0,4$

Akkor egyezett volna meg a két arány, ha $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$, azaz

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \quad \Leftrightarrow$$

Események függetlensége: példa

Hasonlítsuk össze **az autóval rendelkezők arányát a teljes lakosságban**, illetve **az átlagosnál nagyobb jövedelműek között**. Saját autó (A): 10000, nagy jövedelem (B): 25000,
mindkettő ($A \cap B$): 10000, összes lakos: 100000.

Az autóval rendelkezők aránya a teljes lakosságban: $\mathbb{P}(A) = \frac{15000}{100000} = 0,15$	$\neq$	Az autóval rendelkezők aránya az átlagosnál nagyobb jövedelműek között: $\frac{10000}{25000} = 0,4$

Akkor egyezett volna meg a két arány, ha $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$, azaz

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B).}$$

Események függetlensége

Az $A, B \in \mathcal{A}$ események **függetlenek**, ha

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B),$$

vagyis **a metszet valószínűsége a valószínűségek szorzata**.

Események függetlensége

Az $A, B \in \mathcal{A}$ események **függetlenek**, ha

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B),$$

vagyis **a metszet valószínűsége a valószínűségek szorzata**.

Több eseménynél tetszőleges részhalmazra teljesülnie kell ennek a tulajdonságnak.

Az $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ események **függetlenek**, ha tetszőleges $k \geq 1$ és $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ számokra

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2}) \ldots \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

Függetlenség: példa

Két szabályos dobókockával dobunk. Független-e az alábbi két esemény: **az első dobás hatos**; **a második dobás hatos**?

Függetlenség: példa

Két szabályos dobókockával dobunk. Független-e az alábbi két esemény: **az első dobás hatos**; **a második dobás hatos**?

11	12	13	14	15	**16**
21	22	23	24	25	**26**
31	32	33	34	35	**36**
41	42	43	44	45	**46**
51	52	53	54	55	**56**
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**

A: az első dobás hatos; **B**: a második dobás hatos; $A \cap B$: mindkét dobás hatos

Függetlenség: példa

Két szabályos dobókockával dobunk. Független-e az alábbi két esemény: **az első dobás hatos**; **a második dobás hatos**?

11	12	13	14	15	**16**
21	22	23	24	25	**26**
31	32	33	34	35	**36**
41	42	43	44	45	**46**
51	52	53	54	55	**56**
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**

A: az első dobás hatos; **B**: a második dobás hatos; A ∩ B: mindkét dobás hatos

$$\frac{1}{36} = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}.$$

Az A és B események **függetlenek**.

Függetlenség: példa

Két szabályos dobókockával dobunk. Független-e az alábbi két esemény: **az első dobás hatos**; **az összeg** 10?

Függetlenség: példa

Két szabályos dobókockával dobunk. Független-e az alábbi két esemény: **az első dobás hatos**; **az összeg** 10?

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	**46**
51	52	53	54	**55**	56
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**

A: az első dobás hatos; **C**: az összeg 10; $A \cap C$: az első dobás hatos, a második négyes

Függetlenség: példa

Két szabályos dobókockával dobunk. Független-e az alábbi két esemény: **az első dobás hatos**; **az összeg** 10?

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	**46**
51	52	53	54	**55**	56
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**

A: az első dobás hatos; **C**: az összeg 10; A ∩ C: az első dobás hatos, a második négyes

$$\frac{1}{36} = \mathbb{P}(A \cap C) \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{12}.$$

Az A és C események **nem függetlenek**.

Függetlenség: példa

Két szabályos dobókockával dobunk. Független-e az alábbi két esemény: **az első dobás hatos**; **az összeg** 7?

Függetlenség: példa

Két szabályos dobókockával dobunk. Független-e az alábbi két esemény: **az első dobás hatos**; **az összeg** 7?

11	12	13	14	15	**16**
21	22	23	24	**25**	26
31	32	33	**34**	35	36
41	42	**43**	44	45	46
51	**52**	53	54	55	56
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**

A: az első dobás hatos; **D**: az összeg 7; $A \cap D$: az első dobás hatos, a második egyes

Függetlenség: példa

Két szabályos dobókockával dobunk. Független-e az alábbi két esemény: **az első dobás hatos**; **az összeg** 7?

11	12	13	14	15	**16**
21	22	23	24	**25**	26
31	32	33	**34**	35	36
41	42	**43**	44	45	46
51	**52**	53	54	55	56
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**

A: az első dobás hatos; **D**: az összeg 7; A ∩ D: az első dobás hatos, a második egyes

$$\frac{1}{36} = \mathbb{P}(A \cap D) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(D) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}.$$

Az A és D események **függetlenek**.

Páronkénti függetlenség

Az $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ események **páronként függetlenek**, ha minden $1 \leq i < j$ esetén A_i és A_j függetlenek, azaz

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j).$$

Páronkénti függetlenség

Az $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ események **páronként függetlenek**, ha minden $1 \leq i < j$ esetén A_i és A_j függetlenek, azaz

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j).$$

Mi a kapcsolat a függetlenség és a páronkénti függetlenség között?

az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események függetlenek

az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események páronként függetlenek

Páronkénti függetlenség

Az $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ események **páronként függetlenek**, ha minden $1 \leq i < j$ esetén A_i és A_j függetlenek, azaz

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j).$$

Mi a kapcsolat a függetlenség és a páronkénti függetlenség között?

az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események függetlenek	$\Rightarrow$	az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események páronként függetlenek

Páronkénti függetlenség

Az $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ események **páronként függetlenek**, ha minden $1 \leq i < j$ esetén A_i és A_j függetlenek, azaz

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j).$$

Mi a kapcsolat a függetlenség és a páronkénti függetlenség között?

az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események függetlenek	$\Rightarrow$ $\not\Leftarrow$	az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események páronként függetlenek

Páronkénti függetlenség

Az $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ események **páronként függetlenek**, ha minden $1 \leq i < j$ esetén A_i és A_j függetlenek, azaz

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j).$$

Mi a kapcsolat a függetlenség és a páronkénti függetlenség között?

az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események függetlenek	$\Rightarrow$ $\not\Leftarrow$	az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események páronként függetlenek

Két dobókockával dobva tekintsük az alábbi eseményeket:

A_1: az első szám páros

A_2: a második szám páros

A_3: az összeg páros

Ekkor A_1, A_2, A_3 **páronként függetlenek, de nem függetlenek**.

Páronkénti függetlenség

Például két szabályos dobókockával dobunk.

A_1: az első dobás páros

A_2: a második dobás páros

A_3: a dobott számok összege páros

Az világos, hogy A_1 és A_2 függetlenek.

Páronkénti függetlenség

Például két szabályos dobókockával dobunk.

A_1: az első dobás páros

A_2: a második dobás páros

A_3: a dobott számok összege páros

Az világos, hogy A_1 és A_2 függetlenek.

A_1 és A_3 is függetlenek, hiszen $A_1 \cap A_3$ azt jelenti, hogy mindkét dobás páros, így

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3)$$

Hasonlóképpen A_2 és A_3 is függetlenek.

Páronkénti függetlenség

Például két szabályos dobókockával dobunk.

A_1: az első dobás páros

A_2: a második dobás páros

A_3: a dobott számok összege páros

Az világos, hogy A_1 és A_2 függetlenek.

A_1 és A_3 is függetlenek, hiszen $A_1 \cap A_3$ azt jelenti, hogy mindkét dobás páros, így

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3)$$

Hasonlóképpen A_2 és A_3 is függetlenek.

Viszont $(A_1 \cap A_2) \subseteq A_3$, és

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3).$$

Valószínűségi változók

események (egy kísérlet eredményéhez **igen vagy nem** tartozik):

- A: holnap lesz csapadék Budapesten
- B: egy véletlenszerűen választott magyar ember Budapesten lakik
- C: egy véletlenszerűen választott magyar ember 500000 forintnál többet keres

valószínűségi változók (egy kísérlet eredményéhez egy **szám** tartozik):

- X: a holnap Budapesten lehulló csapadék mennyisége mm-ben
- Y: egy véletlenszerűen választott magyar ember lakcímének irányítószáma
- Z: egy véletlenszerűen választott magyar ember bruttó havi keresete forintban

Valószínűségi változók: jelölések és definíció

- X: a holnap lehulló csapadék mennyisége mm-ben $\to \mathbb{P}(X \leq 5)$, azaz mennyi annak valószínűsége, hogy holnap **legfeljebb** 5 **mm** csapadék esik;
- Y: egy véletlenszerűen választott magyar ember lakcímének irányítószáma $\to \mathbb{P}(Y = 2092)$, azaz mennyi annak valószínűsége, hogy a kiválasztott ember Budakeszin lakik, **irányítószáma pontosan** 2092
- Z: egy véletlenszerűen választott magyar ember bruttó havi keresete forintban $\to \mathbb{P}(Z \leq 500000)$, azaz mennyi annak valószínűsége, hogy a kiválasztott ember **legfeljebb bruttó** 500000 **forintot** keres havonta

Definíció (Valószínűségi változó)

Egy $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *függvény* **valószínűségi változó**, *ha tetszőleges* t *valós számra teljesül, hogy*

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\} \in \mathcal{A},$$

azaz tetszőleges t *valós számra a* $\mathbb{P}(X \leq t)$ *valószínűség értelmes.*

Valószínűségi változó: példa

Valakinek három gyereke születik. Legyen X a fiúk száma. Ekkor az összes lehetőség halmaza Ω, és $X : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény az alábbi módon:

$$\Omega = \{FFF, FFL, FLF, FLL, LFF, LFL, LLF, LLL\};$$
$$X(LLL) = 0; \qquad X(LLF) = X(LFL) = X(FLL) = 1;$$
$$X(FFL) = X(FLF) = X(LFF) = 2; \qquad X(FFF) = 3.$$

Az X **valószínűségi változó** **lehetséges értékei**:

$$\{0, 1, 2, 3\} \to \text{véges halmaz}$$

A lehetséges értékekhez tartozó valószínűségek, feltéve, hogy a gyerekek egymástól függetlenül $1/2$ valószínűséggel fiúk:

$$\mathbb{P}(X = 0) = 1/8, \qquad \mathbb{P}(X = 1) = 3/8,$$
$$\mathbb{P}(X = 2) = 3/8, \qquad \mathbb{P}(X = 3) = 1/8.$$

Diszkrét valószínűségi változó és eloszlása: definíciók

Definíció

Egy $X : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény **valószínűségi változó**, *ha tetszőleges t valós számra*

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\} \in \mathcal{A},$$

azaz tetszőleges t valós számra a $\mathbb{P}(X \leq t)$ valószínűség értelmes.

Ilyenkor a $\mathbb{P}(X = t)$ valószínűség is tetszőleges t-re értelmes.

Az $X : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változó **diszkrét**, ha **lehetséges értékeinek halmaza véges vagy megszámlálható végtelen**.

Diszkrét valószínűségi változó és eloszlása: definíciók

Definíció

Egy $X : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény **valószínűségi változó**, *ha tetszőleges t valós számra*

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\} \in \mathcal{A},$$

azaz tetszőleges t valós számra a $\mathbb{P}(X \leq t)$ valószínűség értelmes.

Ilyenkor a $\mathbb{P}(X = t)$ valószínűség is tetszőleges t-re értelmes.

Az $X : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változó **diszkrét**, ha **lehetséges értékeinek halmaza véges vagy megszámlálhatóan végtelen**.

Legyenek az X **diszkrét valószínűségi változó** lehetséges értékei:

$$\{x_1, x_2, \ldots\}, \qquad \text{és } p_k = \mathbb{P}(X = x_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Ekkor az $(x_1, p_1), (x_2, p_2), \ldots$ sorozat az X valószínűségi változó **eloszlása**. Ilyenkor

$$p_k \geq 0 \text{ minden } k\text{-ra, és } \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1,$$

Diszkrét valószínűségi változó eloszlása

Három gyerek. Valakinek három gyereke születik, X a fiúk száma, feltesszük, hogy mind a $2^3 = 8$ lehetőség egyformán valószínű. Ekkor X lehetséges értékei:

$$\{0, 1, 2, 3\} \to \text{véges halmaz} \to X \textbf{ diszkrét}.$$

Ahogy láttuk:

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{8}; \quad \mathbb{P}(X = 1) = \frac{3}{8}; \quad \mathbb{P}(X = 2) = \frac{3}{8}; \quad \mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{8}.$$

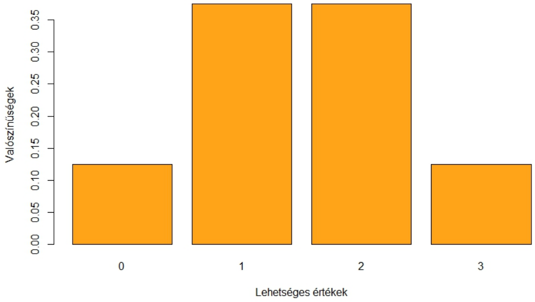
Mindezek alapján X **eloszlása** az alábbi sorozat:

$$(0, 1/8), \qquad (1, 3/8), \qquad (2, 3/8), \qquad (3, 1/8).$$

Szabályos kockadobás. Egyszer dobunk szabályos dobókockával, jelölje Y a dobott számot. Ekkor Y **diszkrét**, és az **eloszlása**:

$$(1, 1/6), \quad (2, 1/6), \quad (3, 1/6), \quad (4, 1/6), \quad (5, 1/6), \quad (6, 1/6).$$

Példa: a fiúk számának eloszlása



A fiúk számának eloszlása: a lehetséges értékek:

$$\{0, 1, 2, 3\}$$

és a hozzájuk tartozó valószínűségek:

$$1/8, \quad 3/8, \quad 3/8, \quad 1/8.$$

Valószínűségi változó eloszlása

Definíció (Valószínűségi változó)

Egy $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *függvény* **valószínűségi változó**, *ha tetszőleges* t *valós számra*

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\} \in \mathcal{A},$$

vagyis tetszőleges t *valós számra a* $\mathbb{P}(X \leq t)$ *valószínűség értelmes.*

Nem feltétlenül diszkrét $X : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változó **eloszlása**: Q_X mérték, melyre

$$Q_X(B) = \mathbb{P}(X \in B),$$

ahol $B \subseteq \mathbb{R}$ megfelelő feltételeket teljesítő halmaz (Borel-halmaz).

Például: $B = [a, b]$ intervallum esetén

$$Q_X([a, b]) = \mathbb{P}(X \in [a, b]) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b).$$

Vagy $B = (-\infty, t]$ félegyenes esetén

$$Q_X((-\infty, t]) = \mathbb{P}(X \in (-\infty, t]) = \mathbb{P}(X \leq t).$$

Diszkrét valószínűségi változók várható értéke

- Szerencsejáték igazságos ára: a nyeremény várható értéke, például ha $1/1000$ valószínűséggel 1000000 forintot nyerünk (különben semmit), akkor

Diszkrét valószínűségi változók várható értéke

- Szerencsejáték igazságos ára: a nyeremény várható értéke, például ha $1/1000$ valószínűséggel 1000000 forintot nyerünk (különben semmit), akkor 1000.
- Annyit nyerünk, amennyit egy szabályos dobókockával dobunk. A nyeremény várható értéke:

Diszkrét valószínűségi változók várható értéke

- Szerencsejáték igazságos ára: a nyeremény várható értéke, például ha 1/1000 valószínűséggel 1000000 forintot nyerünk (különben semmit), akkor 1000.
- Annyit nyerünk, amennyit egy szabályos dobókockával dobunk. A nyeremény várható értéke:

$$\frac{1}{6}(1+2+\ldots+6)=\frac{21}{6}=3,5.$$

- Ha szabálytalan a kocka, például az 1 helyett is 6 van:

Diszkrét valószínűségi változók várható értéke

- Szerencsejáték igazságos ára: a nyeremény várható értéke, például ha 1/1000 valószínűséggel 1000000 forintot nyerünk (különben semmit), akkor 1000.
- Annyit nyerünk, amennyit egy szabályos dobókockával dobunk. A nyeremény várható értéke:

$$\frac{1}{6}(1+2+\ldots+6) = \frac{21}{6} = 3,5.$$

- Ha szabálytalan a kocka, például az 1 helyett is 6 van:

$$\frac{1}{6}(6+2+3+4+5+6) = \frac{1}{6}(2+3+4+5) + \frac{1}{3}\cdot 6 = \frac{13}{3} = 4,33.$$

Diszkrét valószínűségi változók várható értéke

- Szerencsejáték igazságos ára: a nyeremény várható értéke, például ha 1/1000 valószínűséggel 1000000 forintot nyerünk (különben semmit), akkor 1000.
- Annyit nyerünk, amennyit egy szabályos dobókockával dobunk. A nyeremény várható értéke:

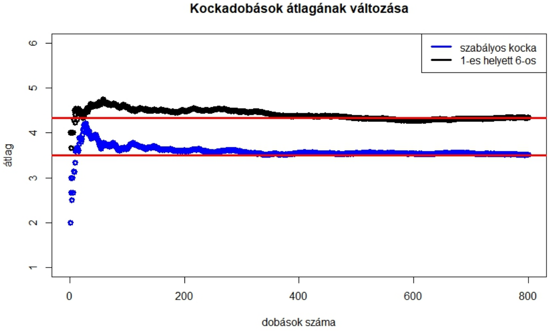
$$\frac{1}{6}(1+2+\ldots+6)=\frac{21}{6}=3,5.$$

- Ha szabálytalan a kocka, például az 1 helyett is 6 van:

$$\frac{1}{6}(6+2+3+4+5+6)=\frac{1}{6}(2+3+4+5)+\frac{1}{3}\cdot 6=\frac{13}{3}=4,33.$$

A lehetséges értékeket megszorozzuk a hozzájuk tartozó valószínűséggel, és ezeket összeadjuk.

Kockadobások átlaga



A dobások átlagának változása a dobások számának növelésével, szabályos kocka esetén, illetve ha 1 helyett is 6 szerepel.

Diszkrét valószínűségi változók várható értéke

Definíció (Várható érték, diszkrét eset)

Legyen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *olyan diszkrét valószínűségi változó, melynek eloszlása* $(x_1, p_1), (x_2, p_2), \ldots,$ *azaz* $\mathbb{P}(X = x_i) = p_i$*, ahol* $i = 1, 2, \ldots$. *Ekkor* X *várható értéke:*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i, \qquad \textit{ha} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i < \infty.$$

Diszkrét valószínűségi változók várható értéke

Definíció (Várható érték, diszkrét eset)

Legyen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *olyan diszkrét valószínűségi változó, melynek eloszlása* $(x_1, p_1), (x_2, p_2), \ldots,$ *azaz* $\mathbb{P}(X = x_i) = p_i$, *ahol* $i = 1, 2, \ldots$. *Ekkor* X *várható értéke:*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i, \qquad \text{ha} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i < \infty.$$

Példa: három gyerek. Legyen X a fiúk száma a három gyerek közül. Ekkor

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Példa: szabályos kockadobás. Legyen Y egy szabályos dobókockával dobott szám. Ekkor

$$\mathbb{E}(Y) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3,5.$$

Diszkrét valószínűségi változók várható értéke

- (elfajult eloszlás) Ha $X = c$ fennáll 1 valószínűséggel: $\mathbb{E}(X) = c \cdot \mathbb{P}(X = c) = c$.
- (korlátosság) Ha $a \leq X \leq b$ valamely $a < b$ számokra, akkor $a \leq \mathbb{E}(X) \leq b$.
- (egyenletes eloszlás) Ha az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számok mindegyikének $1/n$ a valószínűsége, akkor a várható érték a számok számtani közepe: $\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n)$.
- (indikátor) Legyen $\mathbb{I}_A$ az A esemény indikátora, vagyis 1, ha A bekövetkezik, és 0 különben. Ekkor $\mathbb{E}(\mathbb{I}_A) = 1 \cdot \mathbb{P}(\mathbb{I}_A = 1) = \mathbb{P}(A)$.
- (összeg) Ha X, Y valószínűségi változók és $X + Y$ várható értéke létezik, akkor
$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).$$

Függvény várható értéke

Állítás

Legyen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *diszkrét valószínűségi változó, melynek lehetséges értékei* $x_1, x_2, \ldots,$ *továbbá* $\mathbb{P}(X = x_k) = p_k$ *teljesül* $k \geq 1$ *esetén. Legyen továbbá* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény. Ekkor*

$$\mathbb{E}(g(X)) = g(x_1)p_1 + g(x_2)p_2 + g(x_3)p_3 \ldots,$$

ha ez a várható érték létezik.

Például: legyen Y egy szabályos dobókockával dobott szám. Ekkor $g(x) = x^2$-tel:

$$\mathbb{E}(Y^2) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^5 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{6} = 15,17.$$

Függvény várható értéke

Állítás

Legyen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ diszkrét valószínűségi változó, melynek lehetséges értékei $x_1, x_2, \ldots$, továbbá $\mathbb{P}(X = x_k) = p_k$ teljesül $k \geq 1$ esetén. Legyen továbbá $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény. Ekkor

$$\mathbb{E}(g(X)) = g(x_1)p_1 + g(x_2)p_2 + g(x_3)p_3 \ldots,$$

ha ez a várható érték létezik.

Például: legyen Y egy szabályos dobókockával dobott szám. Ekkor $g(x) = x^2$-tel:

$$\mathbb{E}(Y^2) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^5 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{6} = 15,17.$$

Valószínűségi változó szórása

Lehetséges motiváció: nem mindegy, hogy a buszok ütemesen (szabályosan) tíz percenként érkeznek, vagy a követési idő várható értéke tíz perc, de hol öt, hol tizenöt percenként jönnek; egy mérőeszköztől a mérési hiba, vagyis a mérés bizonytalansága is fontos, például nem mindegy, hogy adott pontosság eléréséhez hány mérést kell átlagolni.

Definíció (Szórásnégyzet (variancia))

Legyen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *valószínűségi változó, melyre* $\mathbb{E}(X^2)$ *létezik. Ekkor* X *szórásnégyzete:*

$$D^2(X) = \mathbb{E}\Big((X - \mathbb{E}X)^2\Big).$$

Valószínűségi változó szórása

Lehetséges motiváció: nem mindegy, hogy a buszok ütemesen (szabályosan) tíz percenként érkeznek, vagy a követési idő várható értéke tíz perc, de hol öt, hol tizenöt percenként jönnek; egy mérőeszköztől a mérési hiba, vagyis a mérés bizonytalansága is fontos, például nem mindegy, hogy adott pontosság eléréséhez hány mérést kell átlagolni.

Definíció (Szórásnégyzet (variancia))

Legyen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *valószínűségi változó, melyre* $\mathbb{E}(X^2)$ *létezik. Ekkor* X *szórásnégyzete:*

$$D^2(X) = \mathbb{E}\Big((X - \mathbb{E}X)^2\Big).$$

Definíció (Szórás (standard deviation))

Legyen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *valószínűségi változó, melyre* $\mathbb{E}(X^2)$ *létezik. Ekkor* X *szórásnégyzete:*

$$D(X) = \sqrt{\mathbb{E}\Big((X - \mathbb{E}X)^2\Big)}.$$

A szórás kiszámítása

Állítás

Legyen X olyan diszkrét valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}(X^2)$ létezik. Ekkor

$$D^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \left[\mathbb{E}(X)\right]^2.$$

A szórás kiszámítása

Állítás

Legyen X olyan diszkrét valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}(X^2)$ létezik. Ekkor

$$D^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \left[\mathbb{E}(X)\right]^2.$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} D^2(X) &= \mathbb{E}\Big((X - \mathbb{E}X)^2\Big) = \mathbb{E}\Big(X^2 - 2X\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2\Big) = \\ &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}\big(2X\mathbb{E}(X)\big) + \mathbb{E}(X)^2 = \\ &= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - \left[\mathbb{E}(X)\right]^2, \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy összeg várható értéke a várható értékek összege, illetve hogy a konstans szorzó kiemelhető.

A szórás kiszámítása

Állítás

Legyen X olyan diszkrét valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}(X^2)$ létezik. Ekkor

$$D^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \left[\mathbb{E}(X)\right]^2.$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} D^2(X) &= \mathbb{E}\Big((X - \mathbb{E}X)^2\Big) = \mathbb{E}\Big(X^2 - 2X\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2\Big) = \\ &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}\big(2X\mathbb{E}(X)\big) + \mathbb{E}(X)^2 = \\ &= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - \left[\mathbb{E}(X)\right]^2, \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy összeg várható értéke a várható értékek összege, illetve hogy a konstans szorzó kiemelhető.

Megjegyzés: az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számok tapasztalati szórása

$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2}.$$

Diszkrét valószínűségi változó szórása

Állítás

Legyen X olyan diszkrét valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}(X^2)$ létezik. Ekkor

$$D^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \left[\mathbb{E}(X)\right]^2.$$

Állítás (A szórás kiszámítása egész értékek esetén)

Legyen X olyan diszkrét valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}(X^2)$ létezik, és melynek lehetséges értékei nemnegatív egészek. Ekkor

$$D^2(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \mathbb{P}(X = k) - \mathbb{E}(X)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \mathbb{P}(X = k) - \left[\sum_{k=0}^{\infty} k \mathbb{P}(X = k)\right]^2.$$

Diszkrét valószínűségi változó szórása

Legyen továbbra is X a fiúk száma három gyerek közül:

$$\mathbb{P}(X=0)=1/8; \quad \mathbb{P}(X=1)=3/8; \quad \mathbb{P}(X=2)=3/8; \quad \mathbb{P}(X=3)=1/8.$$

Diszkrét esetben így számolhatunk:

$$\mathbb{E}(X^2)=\sum_{k=0}^{3} k^2\mathbb{P}(X=k)=0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{3}{8}+4\cdot\frac{3}{8}+9\cdot\frac{1}{8}=\frac{24}{8}=3.$$

Ebből és a korábbi számolásból

$$D^2(X)=\mathbb{E}(X^2)-\left[\mathbb{E}(X)\right]^2=3-1,5^2=3-2,25=0,75=\frac{3}{4}.$$

Végül pedig a fiúk számának szórása:

$$D(X)=\sqrt{\frac{3}{4}}=0,866.$$

A kockadobás szórása

Legyen X egy szabályos dobókockával dobott szám. Ekkor

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{6} \cdot 1^2 + \frac{1}{6} \cdot 2^2 + \frac{1}{6} \cdot 3^2 + \frac{1}{6} \cdot 4^2 + \frac{1}{6} \cdot 5^2 + \frac{1}{6} \cdot 6^2 = \frac{91}{6}.$$

Másrészt

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = \frac{7}{2}.$$

Ebből

$$D^2(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 2,92.$$

A kockadobás szórása: $D(X) = \sqrt{2,92} = 1,71.$

Általában n oldalú dobókocka esetén: $D(X) = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}.$

Binomiális eloszlás: példa

Egy munkahelyi csapatban **hatan** dolgoznak együtt.
Tegyük fel, hogy egy tetszőleges napon **egymástól függetlenül** mindannyian $p = 0,03$ valószínűséggel **hiányoznak**.
Mennyi a valószínűsége, hogy egy munkanapon **pontosan ketten hiányoznak a csapatból?**

Binomiális eloszlás: példa

Egy munkahelyi csapatban **hatan** dolgoznak együtt.
Tegyük fel, hogy egy tetszőleges napon **egymástól függetlenül**
mindannyian $p = 0,03$ valószínűséggel **hiányoznak**.
Mennyi a valószínűsége, hogy egy munkanapon
pontosan ketten hiányoznak a csapatból?

szorzás

A B C D E F

néhány jó lehetőség és a valószínűsége:

0,03	0,03	0,97	0,97	0,97	0,97	$\to 0,03^2 \cdot 0,97^4$
0,03	0,97	0,03	0,97	0,97	0,97	$\to 0,03^2 \cdot 0,97^4$
0,03	0,97	0,97	0,03	0,97	0,97	$\to 0,03^2 \cdot 0,97^4$

...

0,97	0,03	0,03	0,97	0,97	0,97	$\to 0,03^2 \cdot 0,97^4$

...

0,97	0,97	0,97	0,97	0,03	0,03	$\to 0,03^2 \cdot 0,97^4$

Binomiális eloszlás: példa

Egy munkahelyi csapatban **hatan** dolgoznak együtt.
Tegyük fel, hogy egy tetszőleges napon **egymástól függetlenül** mindannyian $p = 0,03$ valószínűséggel **hiányoznak**.
Mennyi a valószínűsége, hogy egy munkanapon **pontosan ketten hiányoznak a csapatból?**

$0,97$	$0,03$	$0,03$	$0,97$	$0,97$	$0,97$

$\rightarrow 0,03^2 \cdot 0,97^4$

a jó lehetőségek száma, azaz
hányféleképpen választhatjuk ki a két hiányzót:

egy jó lehetőség valószínűsége:

tehát a valószínűség:

Binomiális eloszlás: példa

Egy munkahelyi csapatban **hatan** dolgoznak együtt.
Tegyük fel, hogy egy tetszőleges napon **egymástól függetlenül** mindannyian $p = 0,03$ valószínűséggel **hiányoznak**.
Mennyi a valószínűsége, hogy egy munkanapon **pontosan ketten hiányoznak a csapatból?**

0,97	0,03	0,03	0,97	0,97	0,97

$\rightarrow 0,03^2 \cdot 0,97^4$

a jó lehetőségek száma, azaz
hányféleképpen választhatjuk ki a két hiányzót: $\binom{6}{2}$

egy jó lehetőség valószínűsége: $0,03^2 \cdot 0,97^4$

tehát a valószínűség:

$$\boxed{\mathbb{P}(\textbf{pontosan két hiányzó}) = \binom{6}{2} \cdot 0,03^2 \cdot 0,97^4 = 1,2\%.}$$

Binomiális eloszlás

- n független kísérletet végzünk;
- mindegyik p valószínűséggel sikerül;
- X a sikeres kísérletek száma.

Például:

- Visszatevéses mintavétel, n húzás, p a fekete golyók aránya.
- Egy felmérésben $n = 1500$ embert kérdezünk meg, egy adott kérdésre mindenki egymástól függetlenül $p = 0,8$ valószínűséggel válaszol. A válaszok száma binomiális eloszlású.
- Egy biztosító $n = 60000$ ügyfelének mindegyike egymástól függetlenül $p = 0,0001$ valószínűséggel okoz balesetet egy adott évben. A balesetet okozó ügyfelek száma binomiális eloszlású.
- Tegyük fel, hogy a nyár $n = 92$ napjának mindegyikén egymástól függetlenül $p = 0,02$ valószínűséggel lesz jégeső egy adott helyen. A nyári jégesős napok száma binomiális eloszlású.

Binomiális eloszlás

- n **független** kísérletet végzünk;
- mindegyik p **valószínűséggel** sikerül;
- X a sikeres kísérletek száma.

Mennyi a valószínűsége, hogy **pontosan k kísérlet sikerül**, azaz $X = k$?
Ahogyan a korábbi példában láttuk:

- A jó lehetőségek száma, azaz hányféleképpen választhatjuk ki, hogy melyik k kísérlet sikeres: $\binom{n}{k}$.
- Egy jó lehetőség valószínűsége: $p^k(1-p)^{n-k}$, hiszen a kísérletek függetlenek, ezért az együttes bekövetkezés (metszet) valószínűsége a valószínűségek szorzata, és k kísérlet sikerül, a többi $n-k$ nem.
- Mivel minden jó lehetőség ugyanolyan valószínű, az $X = k$ valószínűsége a lehetőségek számának és egy lehetőség valószínűségének szorzata:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Binomiális eloszlás: definíció

- n független kísérletet végzünk;
- mindegyik p valószínűséggel sikerül;
- X a sikeres kísérletek száma.

Az X valószínűségi változó **binomiális eloszlású** n renddel és p paraméterrel, ha lehetséges értékei:

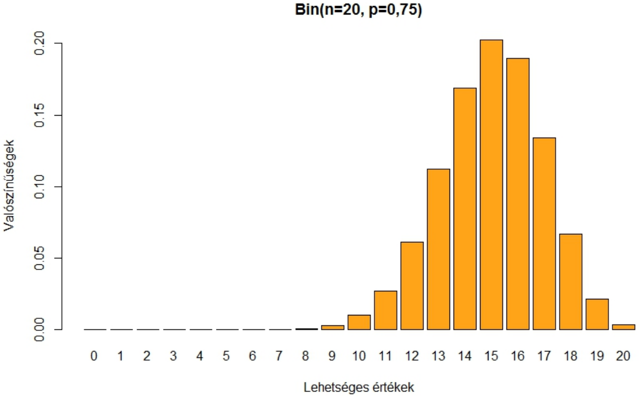
$$0, 1, 2, \ldots, n,$$

és minden $0 \leq k \leq n$ egészre

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

($n \geq 1$ egész, $0 < p < 1$.) Jelölés: $\mathrm{Bin}(n, p)$.

Példa: binomiális eloszlás



Binomiális eloszlás, $n = 20$, $p = 0,75$. Vízszintes tengely: lehetséges értékek, azaz $k = 0, 1, \ldots, 20$, oszlopok magassága: a $\mathbb{P}(X = k)$ valószínűségek.

Példa: binomiális eloszlás

Egy felmérésben $n = 1500$ embert kérdezünk meg. Egy adott kérdésre minden résztvevő **egymástól függetlenül** $p = 0,8$ valószínűséggel válaszol. Jelölje X, hogy hányan válaszoltak erre a kérdésre. Ekkor

- X **binomiális eloszlású** $n = 1500$ renddel és $p = 0,8$ paraméterrel.
- Tetszőleges $0 \leq k \leq 1500$ esetén

$$\mathbb{P}(k \text{ válasz}) = \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =$$
$$= \binom{1500}{k} 0,8^k \cdot 0,2^{1500-k}.$$

- Például annak valószínűsége, hogy pontosan $k = 1200$-an válaszolnak a kérdésre:

$$\mathbb{P}(1200 \text{ válasz}) = \mathbb{P}(X = 1200) = \binom{1500}{1200} 0,8^{1200} \cdot 0,2^{300} = 2,57\%.$$

A binomiális eloszlás várható értéke és szórása

Ha az X valószínűségi változó **binomiális eloszlású** n renddel és p paraméterrel, azaz

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n),$$

akkor X **várható értéke**, illetve **szórása**:

$$\mathbb{E}(X) = np; \qquad D(X) = \sqrt{np(1-p)}.$$

A binomiális eloszlás várható értéke: bizonyítás

Állítás

Legyen X valószínűségi változó n renddel és p paraméterrel. Ekkor X várható értéke np.

A binomiális eloszlásra úgy is gondolhattunk, mint a sikeres kísérletek számára, n független, p valószínűséggel bekövetkező eseményből. Tekintsük az alábbi indikátor valószínűségi változókat minden $j = 1, 2, \ldots, n$-re:

$$\mathbb{I}_j = \begin{cases} 1, & \text{ha a } j\text{. kísérlet sikerül;} \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

A binomiális eloszlás várható értéke: bizonyítás

Állítás

Legyen X valószínűségi változó n renddel és p paraméterrel. Ekkor X várható értéke np.

A binomiális eloszlásra úgy is gondolhattunk, mint a sikeres kísérletek számára, n független, p valószínűséggel bekövetkező eseményből. Tekintsük az alábbi indikátor valószínűségi változókat minden $j = 1, 2, \ldots, n$-re:

$$\mathbb{I}_j = \begin{cases} 1, & \text{ha a } j. \text{ kísérlet sikerül;} \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Ekkor az $\mathbb{I}_j$ indikátorok összege éppen X lesz. Így a várható érték additív tulajdonsága alapján

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{n} \mathbb{I}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}(\mathbb{I}_j) = \sum_{j=1}^{n} 1 \cdot \mathbb{P}(\mathbb{I}_j = 1) = np. \qquad \square$$

Példa: binomiális eloszlás

Egy felmérésben $n = 1500$ embert kérdezünk meg. Egy adott kérdésre minden résztvevő **egymástól függetlenül** $p = 0,8$ valószínűséggel válaszol. Jelölje X, hogy hányan válaszoltak erre a kérdésre. Ekkor

- A válaszadók számának **várható értéke**:

$$\mathbb{E}(X) = np = 1500 \cdot 0,8 = 1200.$$

- A válaszadók számának **szórása**:

$$D(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{1500 \cdot 0,8 \cdot 0,2} = 15,5.$$

Házi feladat október 8., kedd, 8:15-ig

Négy ember közül mindenki leteszi az esernyőjét az esernyőtartóba egy étteremben. Kifelé menet azonban egyáltalán nem figyelnek, mindenki egy véletlenszerűen választott esernyőt visz haza (minden párosítás az emberek és esernyők között egyformán valószínű).

Legyen X az olyan emberek száma, akik a saját esernyőjüket viszik haza. Mennyi X várható értéke és szórása?