Visszatevéses mintavétel: példa (3. előadás)

Péternek **három kék** és

Visszatevéses mintavétel: példa (3. előadás)

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van.

Visszatevéses mintavétel: példa (3. előadás)

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van.
Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik,
minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét
azonos valószínűséggel választva.

Visszatevéses mintavétel: példa (3. előadás)

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van.
Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik, minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt**
pontosan négyszer iszik kék bögréből?

Visszatevéses mintavétel: példa (3. előadás)

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van.
Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik,
minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét
azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt**
pontosan négyszer iszik kék bögréből?

az **összes lehetőség** száma:

5

az első napon ötféle lehetőség van

Visszatevéses mintavétel: példa (3. előadás)

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van.
Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik,
minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét
azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt**
pontosan négyszer iszik kék bögréből?

az **összes lehetőség** száma:

5 5

az első két napon $5 \cdot 5 = 25$-féle lehetőség van
bármelyik bögre bármelyikkel választható, lehet szorozni
a bögrék különbözők
ezek az esetek egyformán valószínűek

Visszatevéses mintavétel: példa (3. előadás)

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van. Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik, minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt**
pontosan négyszer iszik kék bögréből?

az **összes lehetőség** száma:

5 5 5

az első három napon $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$-féle lehetőség van
bármelyik bögre bármelyikkel választható, lehet szorozni
a bögrék különbözők
ezek az esetek egyformán valószínűek

Visszatevéses mintavétel: példa (3. előadás)

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van.
Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik,
minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét
azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt**
pontosan négyszer iszik kék bögréből?

az **összes lehetőség** száma:

$$5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \longrightarrow \boxed{5^7}$$

összesen 5^7 egyformán valószínű lehetőség van egy hét alatt
bármelyik bögre bármelyikkel választható, lehet szorozni
a bögrék különbözők
ezek az esetek egyformán valószínűek

Visszatevéses mintavétel: példa (3. előadás)

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van.
Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik,
minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét
azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt**
pontosan négyszer iszik kék bögréből?

5^7 egyformán valószínű lehetőség

jó lehetőség például, amikor első négy nap iszik kék bögréből:

Visszatevéses mintavétel: példa (3. előadás)

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van.
Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik, minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt pontosan négyszer iszik kék bögréből?**

5^7 egyformán valószínű lehetőség

jó lehetőség például, amikor első négy nap iszik kék bögréből:

3 3 3 3 2 2 2

Visszatevéses mintavétel: példa (3. előadás)

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van.
Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik, minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt pontosan négyszer iszik kék bögréből?**

5^7 egyformán valószínű lehetőség

jó lehetőség például, amikor első négy nap iszik kék bögréből:

3 3 3 3 2 2 2 $\longrightarrow$ $\boxed{3^4 \cdot 2^3}$

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 3^4 \cdot 2^3$ ilyen lehetőség van
bármelyik bögre bármelyikkel választható, lehet szorozni
a bögrék különbözők

Visszatevéses mintavétel: példa (3. előadás)

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van.
Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik,
minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét
azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt**
pontosan négyszer iszik kék bögréből?

5^7 egyformán valószínű lehetőség

egy másik jó sorrend, ha az $1., 3., 4., 6.$ napon iszik kék bögréből:

Visszatevéses mintavétel: példa (3. előadás)

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van.
Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik, minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt pontosan négyszer iszik kék bögréből?**

5^7 egyformán valószínű lehetőség

egy másik jó sorrend, ha az $1., 3., 4., 6.$ napon iszik kék bögréből:

3 2 3 3 2 3 2

Visszatevéses mintavétel: példa (3. előadás)

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van.
Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik, minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt** **pontosan négyszer iszik kék bögréből?**

5^7 egyformán valószínű lehetőség

egy másik jó sorrend, ha az $1., 3., 4., 6.$ napon iszik kék bögréből:

3 2 3 3 2 3 2 $\longrightarrow$ $3^4 \cdot 2^3$

$3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 3^4 \cdot 2^3$ ilyen lehetőség van
bármelyik bögre bármelyikkel választható, lehet szorozni
a bögrék különbözők

Visszatevéses mintavétel: példa (3. előadás)

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van.
Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik,
minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét
azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt**
pontosan négyszer iszik kék bögréből?

5^7 egyformán valószínű lehetőség

jó lehetőségek száma:

Visszatevéses mintavétel: példa (3. előadás)

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van.
Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik,
minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét
azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt pontosan négyszer iszik kék bögréből?**

5^7 egyformán valószínű lehetőség

jó lehetőségek száma:

színezések száma

lehetőségek száma adott színezésnél

Visszatevéses mintavétel: példa (3. előadás)

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van.
Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik, minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt pontosan négyszer iszik kék bögréből?**

5^7 egyformán valószínű lehetőség

jó lehetőségek száma:

színezések száma $\times$ lehetőségek száma adott színezésnél

$$\boxed{\binom{7}{4}} \times \boxed{3^4 \cdot 2^3} = 35 \cdot 3^4 \cdot 2^3$$

ennyiféleképpen választhatjuk ki a négy kék napot a hétből

minden színezéshez ugyanannyi lehetőség tartozik

Visszatevéses mintavétel: példa (3. előadás)

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van.
Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik,
minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét
azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt pontosan négyszer iszik kék bögréből?**

5^7 egyformán valószínű lehetőség

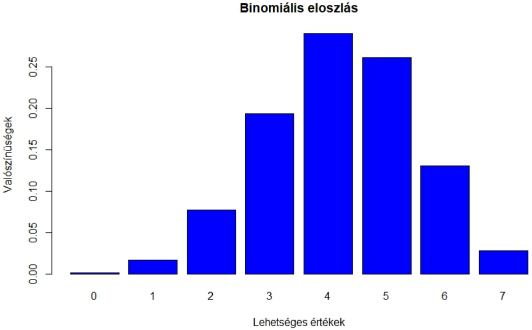
$$\mathbb{P}(\text{pontosan négyszer iszik kék bögréből}) = \frac{\binom{7}{4} \cdot 3^4 \cdot 2^3}{5^7},$$

azaz $\frac{35 \cdot 81 \cdot 8}{78125} = 29,03\%$.

Példa: visszatevéses mintavétel

3 kék, 2 zöld bögre, Péter hét napon át találomra választ.

$$\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ kék}) = \frac{\binom{7}{k} \cdot 3^k \cdot 2^{7-k}}{5^7}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, 7.$$



A kék bögrés napok száma: lehetséges értékek és valószínűségek

Visszatevéses mintavétel

- Egy dobozban N golyó van, közülük M fekete, a többi fehér.
- **Visszatevéssel** kihúznak n darabot, minden húzásnál a korábbiakat elfelejtve mind az N golyót azonos valószínűséggel választva.
- Annak valószínűsége, hogy az n húzás közül pontosan k-nál jön fekete:

Visszatevéses mintavétel

- Egy dobozban N golyó van, közülük M fekete, a többi fehér.
- **Visszatevéssel** kihúznak n darabot, minden húzásnál a korábbiakat elfelejtve mind az N golyót azonos valószínűséggel választva.
- Annak valószínűsége, hogy az n húzás közül pontosan k-nál jön fekete:

$$\boxed{\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ fekete}) = \binom{n}{k}\frac{M^k \cdot (N-M)^{n-k}}{N^n} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n).}$$

Visszatevéses mintavétel

- Egy dobozban N golyó van, közülük M fekete, a többi fehér.
- **Visszatevéssel** kihúznak n darabot, minden húzásnál a korábbiakat elfelejtve mind az N golyót azonos valószínűséggel választva.
- Annak valószínűsége, hogy az n húzás közül pontosan k-nál jön fekete:

melyik feketéket húztunk (k húzás)

melyik k húzás fekete

melyik fehéreket húztuk ($n-k$ húzás)

$$\boxed{\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ fekete}) = \binom{n}{k}\frac{M^k\cdot(N-M)^{n-k}}{N^n} \qquad (k=0,1,2,\dots,n).}$$

összes lehetőség

Visszatevéses mintavétel

- Egy dobozban N golyó van, közülük M fekete, a többi fehér.
- **Visszatevéssel** kihúznak n darabot, minden húzásnál a korábbiakat elfelejtve mind az N golyót azonos valószínűséggel választva.
- Annak valószínűsége, hogy az n húzás közül pontosan k-nál jön fekete:

$$\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ fekete}) = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{melyik } k \text{ húzás fekete}} \frac{\overbrace{M^k}^{\text{melyik feketéket húztunk } (k \text{ húzás})} \cdot \overbrace{(N-M)^{n-k}}^{\text{melyik fehéreket húztuk } (n-k \text{ húzás})}}{\underbrace{N^n}_{\text{összes lehetőség}}} \qquad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Megjegyzés: a kihúzott fekete golyók száma **binomiális eloszlású**.

Visszatevéses mintavétel: példa

Egy osztályba **14 lány** és **22 fiú** jár.

Visszatevéses mintavétel: példa

Egy osztályba **14 lány** és **22 fiú** jár.
A tanár minden fizikaórán kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal a korábbiakat elfelejtve, és mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet).

Visszatevéses mintavétel: példa

Egy osztályba **14 lány** és **22 fiú** jár.
A tanár minden fizikaórán kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal a korábbiakat elfelejtve, és mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet).

Visszatevéses mintavétel: példa

Egy osztályba **14 lány** és **22 fiú** jár.
A tanár minden fizikaórán kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal a korábbiakat elfelejtve, és mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet).

Mennyi a valószínűsége, hogy **hat egymást követő órán** **pontosan két lány** felel?

Visszatevéses mintavétel: példa

Egy osztályba **14 lány** és **22 fiú** jár. $N = 36$ a diákok száma

A tanár minden fizikaórán kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal a korábbiakat elfelejtve, és mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet).

Mennyi a valószínűsége, hogy **hat egymást követő órán** **pontosan két lány** felel?

Visszatevéses mintavétel: példa

$M = 14$ a lányok száma

$N = 36$ a diákok száma

Egy osztályba **14 lány** és **22 fiú** jár.

A tanár minden fizikaórán kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal a korábbiakat elfelejtve, és mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet).

Mennyi a valószínűsége, hogy **hat egymást követő órán** **pontosan két lány** felel?

Visszatevéses mintavétel: példa

$M = 14$ a lányok száma

$N = 36$ a diákok száma

Egy osztályba **14 lány** és **22 fiú** jár.

A tanár minden fizikaórán kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal a korábbiakat elfelejtve, és mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet).

$n = 6$ a minta nagysága

Mennyi a valószínűsége, hogy **hat egymást követő órán pontosan két lány** felel?

Visszatevéses mintavétel: példa

$M = 14$ a lányok száma

Egy osztályba **14 lány** és **22 fiú** jár. $\longrightarrow$ $N = 36$ a diákok száma

A tanár minden fizikaórán kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal a korábbiakat elfelejtve, és mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet).

$n = 6$ a minta nagysága

Mennyi a valószínűsége, hogy **hat egymást követő órán**

$k = 2$ a kérdés $\longleftarrow$ **pontosan két lány** felel?

Visszatevéses mintavétel: példa

$M = 14$ a lányok száma

$N = 36$ a diákok száma

Egy osztályba **14 lány** és **22 fiú** jár.

A tanár minden fizikaórán kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal a korábbiakat elfelejtve, és mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet).

$n = 6$ a minta nagysága

Mennyi a valószínűsége, hogy **hat egymást követő órán** **pontosan két lány** felel?

$k = 2$ a kérdés $\longleftarrow$ **pontosan két lány**

$$\boxed{\mathbb{P}(\text{pontosan két lány}) = \binom{n}{k}\frac{M^k \cdot (N-M)^{n-k}}{N^n} = \binom{6}{2}\frac{14^2 \cdot 22^4}{36^6} = 31,6\%.}$$

Visszatevéses mintavétel: példa

$M = 14$ a lányok száma

Egy osztályba **14 lány** és **22 fiú** jár. → $N = 36$ a diákok száma

A tanár minden fizikaórán kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal a korábbiakat elfelejtve, és mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet).

$n = 6$ a minta nagysága

Mennyi a valószínűsége, hogy **hat egymást követő órán** **pontosan két lány** felel?

$k = 2$ a kérdés ⟵ **pontosan két lány**

lányok kiválasztása fiúk kiválasztása

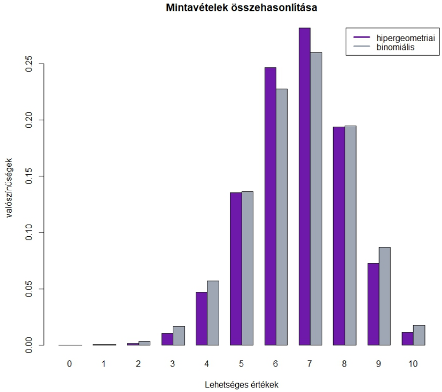
$$\mathbb{P}(\text{pontosan két lány}) = \binom{n}{k}\frac{M^k \cdot (N-M)^{n-k}}{N^n} = \binom{6}{2}\frac{14^2 \cdot 22^4}{36^6} = 31,6\%.$$

összes eset

melyik két órán felel lány

szorzás: bármely felelő bármely másikkal választható

Mintavételek összehasonlítása

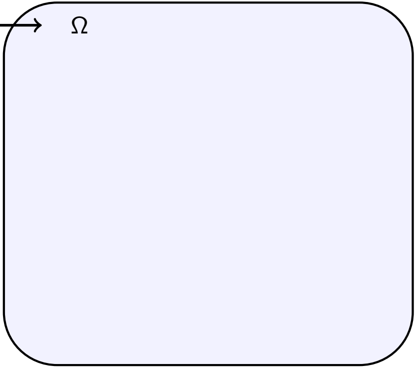


Visszatevés nélküli mintavétel (hipergeometriai eloszlás) és visszatevéses mintavétel (binomiális eloszlás) összehasonlítása $N = 60, M = 40, n = 10$ esetén; ha N még nagyobb lenne n-hez képest, még jobban hasonlítana a két eloszlás

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

eseménytér

összes lehetőség: Ω



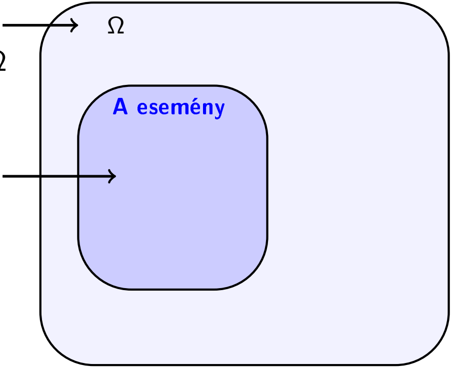
A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

eseménytér

összes lehetőség: Ω

esemény

$A \subseteq \Omega$ részhalmaz



A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

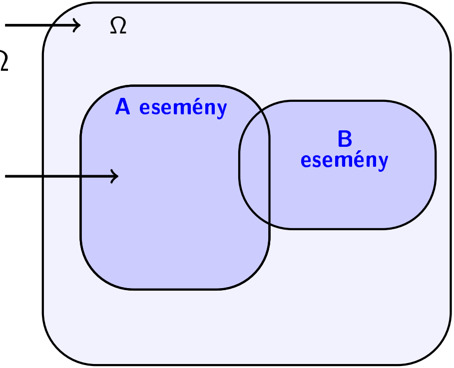
eseménytér

összes lehetőség: Ω

$\boxed{\mathbb{P}(\Omega) = 1}$

esemény

$A \subseteq \Omega$ részhalmaz



A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Ω: (magyar) **felnőtt emberek**

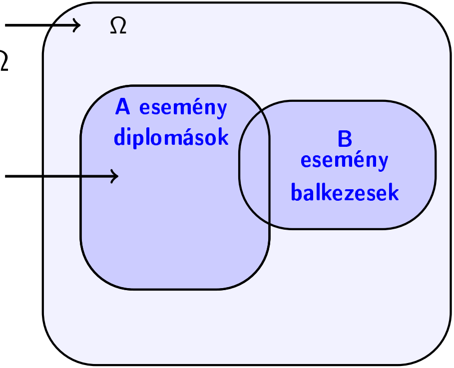
eseménytér

összes lehetőség: Ω

$\boxed{\mathbb{P}(\Omega) = 1}$

esemény

$A \subseteq \Omega$ részhalmaz



A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Ω: (magyar) **felnőtt emberek**

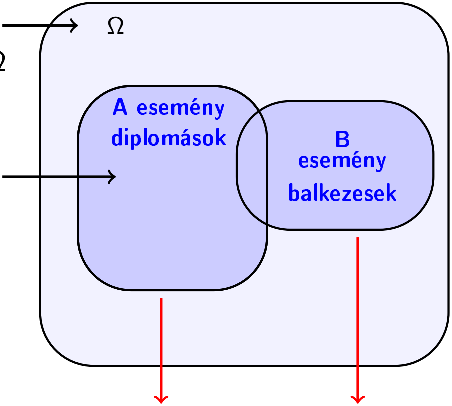
eseménytér

összes lehetőség: Ω

$\boxed{\mathbb{P}(\Omega) = 1}$

esemény

$A \subseteq \Omega$ részhalmaz



$\boxed{\mathbb{P}(A) = 22\%}$ $\boxed{\mathbb{P}(B) = 10\%}$

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Ω: (magyar) **felnőtt emberek**

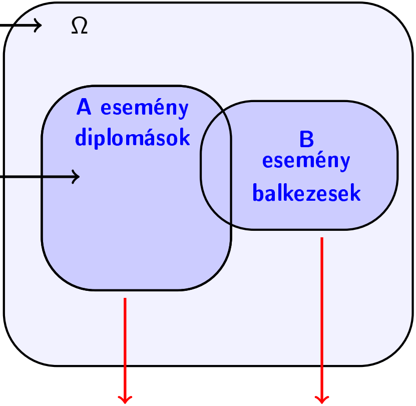
eseménytér

összes lehetőség: Ω

$\boxed{\mathbb{P}(\Omega) = 1}$

esemény

$A \subseteq \Omega$ részhalmaz



$\boxed{\mathbb{P}(A) = 22\%}$ $\boxed{\mathbb{P}(B) = 10\%}$

valószínűség: esemé-nyekhez $[0,1]$-beli szá-mokat rendelő függ-vény

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Ω: (magyar) **felnőtt emberek**

eseménytér

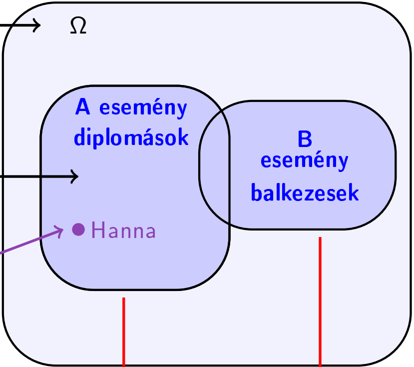
összes lehetőség: Ω

$\boxed{\mathbb{P}(\Omega) = 1}$

esemény

$A \subseteq \Omega$ részhalmaz

elemi esemény



valószínűség: eseményekhez $[0, 1]$-beli számokat rendelő függvény

$\boxed{\mathbb{P}(A) = 22\%}$ $\boxed{\mathbb{P}(B) = 10\%}$

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ hármas **Kolmogorov-féle valószínűségi mező**, ha

- az Ω **eseménytér** egy nem üres halmaz;

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ hármas **Kolmogorov-féle valószínűségi mező**, ha

- az Ω **eseménytér** egy nem üres halmaz;
- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ az **az események halmaza**, azaz minden $A \in \mathcal{A}$-ra $A \subseteq \Omega$ úgy, hogy
  1. $\Omega \in \mathcal{A}$;
  2. ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, akkor $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ (azaz megszámlálható sok $\mathcal{A}$-beli elem uniója is $\mathcal{A}$-beli);
  3. ha $A \in \mathcal{A}$, akkor $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ (azaz $\mathcal{A}$-beli halmazok komplementere is $\mathcal{A}$-beli.

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ hármas **Kolmogorov-féle valószínűségi mező**, ha

- az Ω **eseménytér** egy nem üres halmaz;
- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ az **az események halmaza**, azaz minden $A \in \mathcal{A}$-ra $A \subseteq \Omega$ úgy, hogy
  1. $\Omega \in \mathcal{A}$;
  2. ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, akkor $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ (azaz megszámlálható sok $\mathcal{A}$-beli elem uniója is $\mathcal{A}$-beli);
  3. ha $A \in \mathcal{A}$, akkor $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ (azaz $\mathcal{A}$-beli halmazok komplementere is $\mathcal{A}$-beli.
- a **valószínűség** egy $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$ függvény, melyre
  1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, azaz a biztos esemény valószínűsége 1;
  2. ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ és minden $1 \leq i < j$-re $A_i \cap A_j = \emptyset$, akkor

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n),$$

azaz megszámlálható sok kizáró esemény uniójának valószínűsége a valószínűségek összege.

Véges valószínűségi mező

Tegyük fel, hogy véges sok lehetséges kimenetel van, azaz $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ továbbá $\mathcal{A}$ az Ω összes részhalmazából áll.

Jelölés: $p_j = \mathbb{P}(\{\omega_j\})$ a j. kimenetel valószínűsége. Ekkor az additivitás miatt

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = \sum_{j=1}^{n} p_j,$$

vagyis az elemi események valószínűségének összege 1. Továbbá

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\Bigg(\bigcup_{j:\, \omega_j \in A} \{\omega_j\} \Bigg) = \sum_{j:\, \omega_j \in A} p_j,$$

ami azt jelenti, hogy

minden esemény valószínűsége a benne lévő elemi események valószínűségének összege.

Klasszikus valószínűségi mező

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ olyan valószínűségi mező, melyre

- Ω véges halmaz;
- $\mathcal{A}$ az Ω összes részhalmazából áll;
- továbbá **minden elemi esemény egyformán valószínű**, azaz

$$\mathbb{P}(\omega_j) = p_j = \frac{1}{n} \qquad \text{minden } j = 1, 2, \ldots, n\text{-re.}$$

Ekkor $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$-t **klasszikus valószínűségi mezőnek** nevezzük. Ilyenkor tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ eseményre

$$\mathbb{P}(A) = \frac{k}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n},$$

ahol k az A elemeinek száma, n pedig az összes elemi esemény (lehetőség) száma.

Klasszikus valószínűségi mező

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ olyan valószínűségi mező, melyre

- Ω véges halmaz;
- $\mathcal{A}$ az Ω összes részhalmazából áll;
- továbbá **minden elemi esemény egyformán valószínű**, azaz

$$\mathbb{P}(\omega_j) = p_j = \frac{1}{n} \qquad \text{minden } j = 1, 2, \ldots, n\text{-re.}$$

Ekkor $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$-t **klasszikus valószínűségi mezőnek** nevezzük. Ilyenkor tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ eseményre

$$\mathbb{P}(A) = \frac{k}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n},$$

ahol k az A elemeinek száma, n pedig az összes elemi esemény (lehetőség) száma.

Példa: visszatevéses és visszatevés nélküli mintavétel, mindkét esetben az elemi események egyformán valószínűek voltak

Példa: két szabályos kockadobás

Két szabályos dobókockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7?

Példa: két szabályos kockadobás

Két szabályos dobókockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7?

A dobókockák, emberek, tárgyak stb. mindig különbözőek.

- **eseménytér**: lehetséges dobássorozatok. Ezek száma:

$$6 \cdot 6 = 36; \text{mindkét dobás hatféle lehet.}$$

- A dobássorozatok egyformán valószínűek: mindegyiknek $1/36$ a valószínűsége.
- A kedvező dobássorozatok száma: 6.

11	12	13	14	15	**16**
21	22	23	24	**25**	26
31	32	33	**34**	35	36
41	42	**43**	44	45	46
51	**52**	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

Tehát $\mathbb{P}(\text{az összeg } 7) = 6/36 = 1/6$.

Leszámlálások és jelölések

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots 2 \cdot 1; \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k(k-1)\ldots 2 \cdot 1}.$$

- n tárgyat $n!$-féleképpen lehet sorrendbe tenni.
- n tárgy közül k darabot visszatevés nélkül $n(n-1)\ldots(n-k+1)$-féleképpen lehet húzni, ha figyelembe vesszük a sorrendet: az első n-féle, a második $n-1$-féle lehet (akármi volt az első), a harmadik $n-2$-féle lehet (akármi volt az első kettő), és így tovább
- n tárgy közül egy k darabból álló csoportot $\binom{n}{k}$-féleképpen lehet kiválasztani (itt a kiválasztás sorrendje nem számít)
- ha n egymás utáni kísérlet mindegyikénél k lehetőség van, akkor az összes lehetőség száma a sorrendet is figyelembe véve

$$n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^k.$$

Például egy kockadobás hatféle lehet, kettő 36-féle, három $6 \cdot 6 \cdot 6$-féle, n kockadobás 6^n-féle.

Tulajdonságok

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}; \quad \binom{n}{0} = 1; \binom{n}{1} = n; \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\binom{n}{N} = 0, \text{ ha } N > n.$$

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ általánosítása a **binomiális tétel**:

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{k}x^k y^{n-k} + \ldots + nxy^{n-1} + y^n.$$

Következmény $x = y = 1$-re:

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{k} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}.$$

Multinomiális/polinomiális tétel

- $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$
- $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

Multinomiális/polinomiális tétel

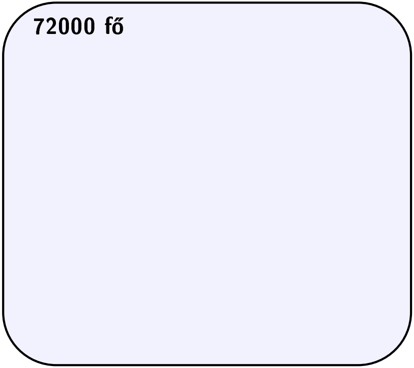
- $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$
- $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
- általánosan:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n = \sum \frac{n!}{i_1! \cdot i_2! \cdot \ldots \cdot i_k!} \cdot x_1^{i_1} \cdot x_2^{i_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{i_k},$$

ahol összegzünk az összes olyan $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ pozitív egészekből álló sorozatra, melyre $i_1 + i_2 + \ldots + i_k = n$.

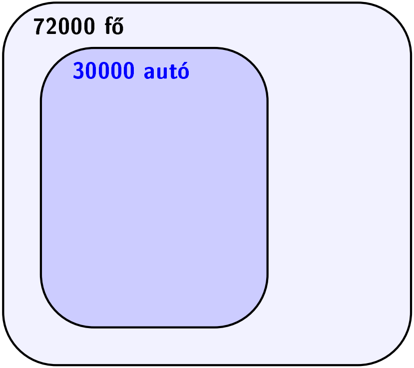
Unió valószínűsége: példa

Egy **72000 fős** városban



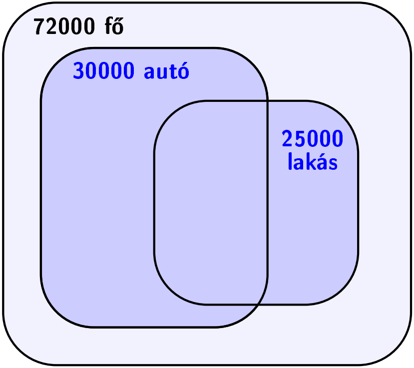
Unió valószínűsége: példa

Egy **72000 fős** városban **30000** embernek van autója,



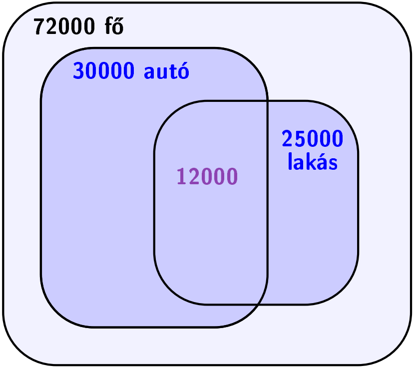
Unió valószínűsége: példa

Egy **72000 fős** városban **30000** embernek van autója, **25000**-nek lakása,



Unió valószínűsége: példa

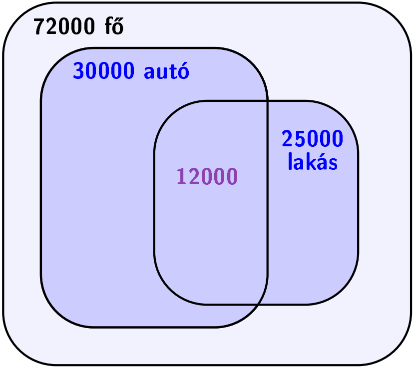
Egy **72000 fős** városban **30000** embernek van autója, **25000**-nek lakása, 12000-nek autója és lakása is.



Unió valószínűsége: példa

Egy **72000 fős** városban **30000** embernek van autója,
25000-nek lakása, **12000**-nek autója és lakása is.

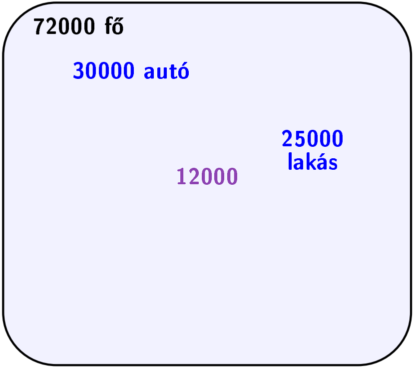
Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember **legalább az egyikkel** rendelkezik?



Unió valószínűsége: példa

Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember **legalább az egyikkel** rendelkezik?

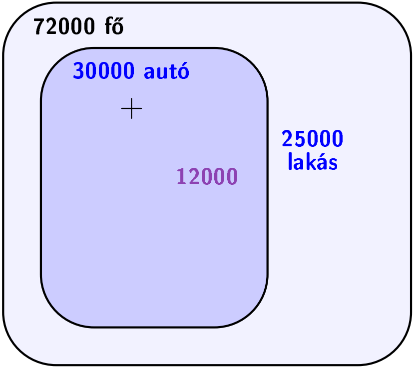
$\mathbb{P}($**legalább az egyik**$) =$



Unió valószínűsége: példa

Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember **legalább az egyikkel** rendelkezik?

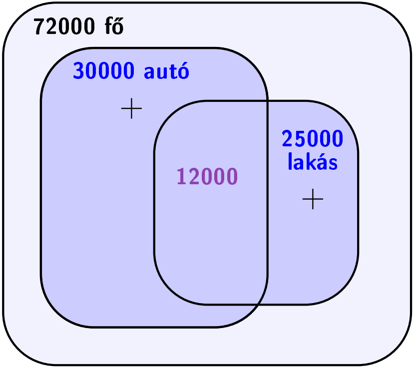
$\mathbb{P}(\textbf{legalább az egyik}) = \mathbb{P}(\textbf{autó})$



Unió valószínűsége: példa

Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember **legalább az egyikkel** rendelkezik?

$\mathbb{P}(\textbf{legalább az egyik}) = \mathbb{P}(\textbf{autó}) + \mathbb{P}(\textbf{lakás})$

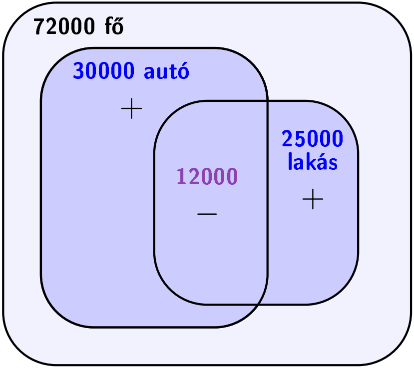


Unió valószínűsége: példa

Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember **legalább az egyikkel** rendelkezik?

$\mathbb{P}(\textbf{legalább az egyik}) = \mathbb{P}(\textbf{autó}) + \mathbb{P}(\textbf{lakás}) - \mathbb{P}(\textbf{mindkettő})$

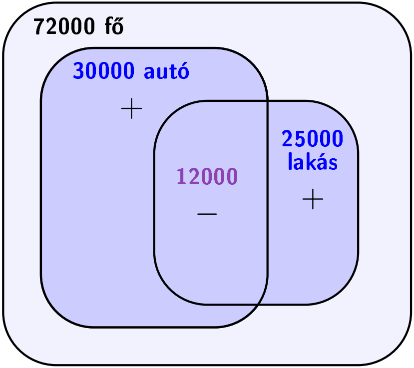
12000 embert kétszer számoltunk, ezt le kell vonni



Unió valószínűsége: példa

Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember **legalább az egyikkel** rendelkezik?

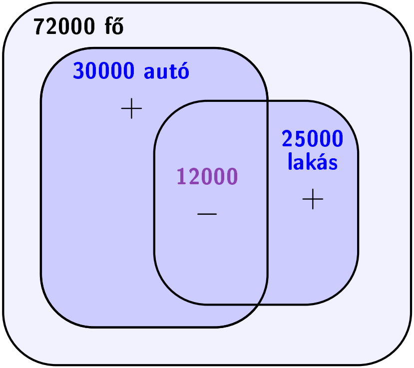
$$\mathbb{P}(\textbf{legalább az egyik}) = \mathbb{P}(\textbf{autó}) + \mathbb{P}(\textbf{lakás}) - \mathbb{P}(\textbf{mindkettő})$$
$$= 30000/72000 + 25000/72000 - 12000/72000$$



Unió valószínűsége: példa

Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember **legalább az egyikkel** rendelkezik?

$$\mathbb{P}(\textbf{legalább az egyik}) = \mathbb{P}(\textbf{autó}) + \mathbb{P}(\textbf{lakás}) - \mathbb{P}(\textbf{mindkettő})$$
$$= 30000/72000 + 25000/72000 - 12000/72000$$
$$= 43000/72000 = 59\%.$$



Unió valószínűsége: példa

Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember **legalább az egyikkel** rendelkezik?

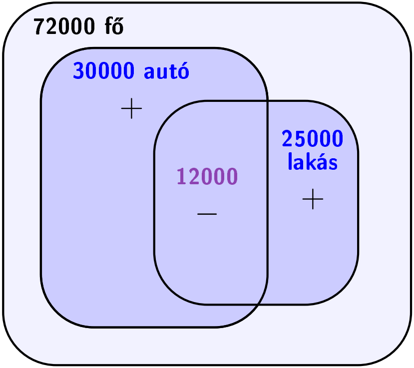
$$\boxed{\mathbb{P}(A \cup B) = \quad \mathbb{P}(\textbf{autó}) + \mathbb{P}(\textbf{lakás}) - \mathbb{P}(\textbf{mindkettő})}$$

$$\uparrow$$

unió

$$= 30000/72000 + 25000/72000 - 12000/72000$$

$$= 43000/72000 = 59\%.$$



Unió valószínűsége: példa

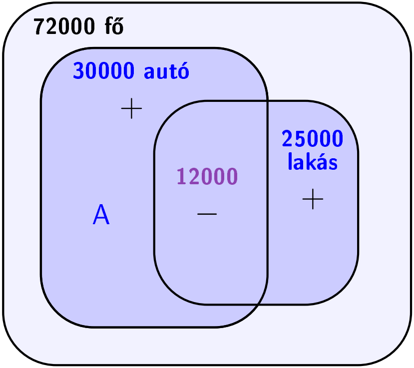
Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember **legalább az egyikkel** rendelkezik?

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cup B) = \quad \mathbb{P}(A) \quad + \mathbb{P}(\textbf{lakás}) \ - \mathbb{P}(\textbf{mindkettő})}$$

$$= 30000/72000 + 25000/72000 - 12000/72000$$

↑ **unió**

$$= 43000/72000 = 59\%.$$



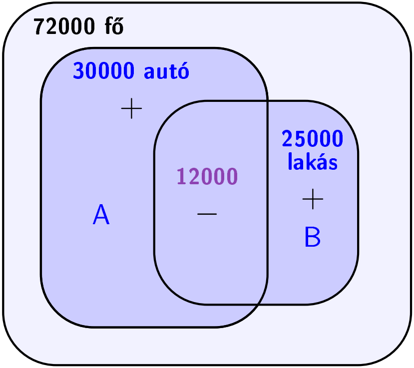
Unió valószínűsége: példa

Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember **legalább az egyikkel** rendelkezik?

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(\textbf{mindkettő})}$$

$$= 30000/72000 + 25000/72000 - 12000/72000$$

unió $= 43000/72000 = 59\%.$



Unió valószínűsége: példa

Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember **legalább az egyikkel** rendelkezik?

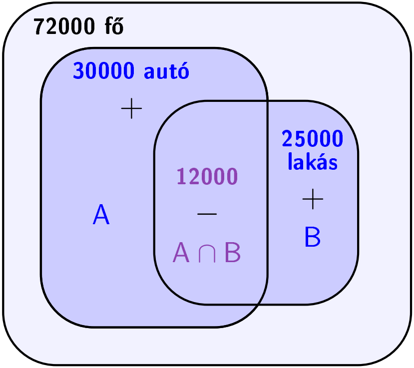
$$\boxed{\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)}$$

$$= 30000/72000 + 25000/72000 - 12000/72000$$

$$= 43000/72000 = 59\%.$$

↑ **unió**

↑ **metszet**



Unió valószínűsége: példa

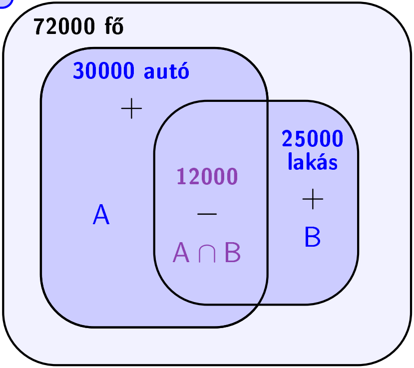
Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember **legalább az egyikkel** rendelkezik?

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)}$$

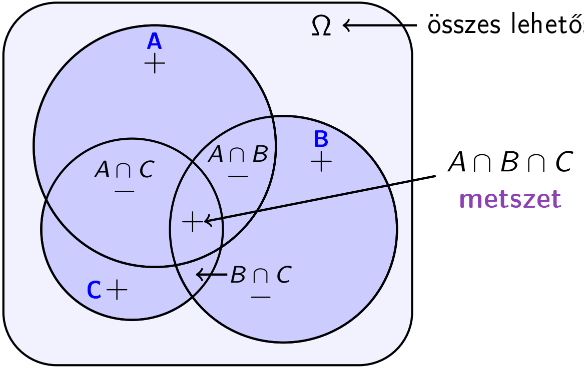
$$= 30000/72000 + 25000/72000 - 12000/72000$$

$$= 43000/72000 = 59\%.$$

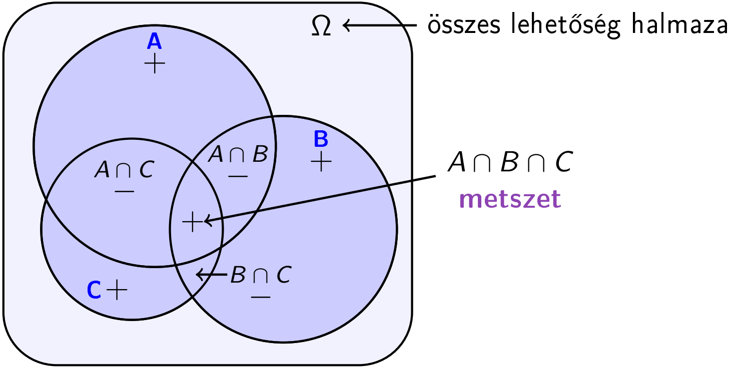
szitaformula



Szitaformula három eseményre



Szitaformula három eseményre



Az **unió** (legalább az egyik bekövetkezik) valószínűsége:

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)$$
$$-\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) +$$
$$+\mathbb{P}(A \cap B \cap C).$$

Szitaformula

Szitaformula két eseményre. Annak valószínűsége, hogy A és B közül legalább az egyik bekövetkezik:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Szitaformula három eseményre. Annak valószínűsége, hogy A, B és C közül legalább az egyik bekövetkezik:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \\ - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

Szitaformula

Szitaformula két eseményre. Annak valószínűsége, hogy A és B közül legalább az egyik bekövetkezik:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Szitaformula három eseményre. Annak valószínűsége, hogy A, B és C közül legalább az egyik bekövetkezik:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \\ - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

Szitaformula általánosan: az $A_1, \ldots, A_n$ események uniójának (vagyis annak, hogy legalább az egyik bekövetkezik) a valószínűsége:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \ldots + \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \\ - \ldots - \mathbb{P}(A_{n-1} \cap A_n) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \ldots\end{aligned}$$

Szitaformula

Annak valószínűsége, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események közül legalább az egyik bekövetkezik:

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \ldots + \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \\ - \ldots - \mathbb{P}(A_{n-1} \cap A_n) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \ldots$$

Vagyis:

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \\ + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) - \\ - \ldots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \\ = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}).$$

Szitaformula: példa

Egy kisfiú Kinder-figurákat gyűjt. Tízféle Kinder-figura van, a tojásokban a többitől függetlenül mindegyik azonos valószínűséggel található. Mennyi a valószínűsége, hogy 20 Kinder-tojás felbontása után mind a tíz figurából lesz legalább egy példánya?

Szitaformula: példa

Egy kisfiú Kinder-figurákat gyűjt. Tízféle Kinder-figura van, a tojásokban a többitől függetlenül mindegyik azonos valószínűséggel található. Mennyi a valószínűsége, hogy 20 Kinder-tojás felbontása után mind a tíz figurából lesz legalább egy példánya?

Legyen A_i az az esemény, hogy az i. figura nincs meg a kisfiúnak ($i = 1, \dots, 10$). Ekkor annak a valószínűsége, hogy mind a 10 figurából van neki legalább egy:

Szitaformula: példa

Egy kisfiú Kinder-figurákat gyűjt. Tízféle Kinder-figura van, a tojásokban a többitől függetlenül mindegyik azonos valószínűséggel található. Mennyi a valószínűsége, hogy 20 Kinder-tojás felbontása után mind a tíz figurából lesz legalább egy példánya?

Legyen A_i az az esemény, hogy az i. figura nincs meg a kisfiúnak ($i = 1, \ldots, 10$). Ekkor annak a valószínűsége, hogy mind a 10 figurából van neki legalább egy: $1 - \mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_{10})$.

Szitaformula: példa

Egy kisfiú Kinder-figurákat gyűjt. Tízféle Kinder-figura van, a tojásokban a többitől függetlenül mindegyik azonos valószínűséggel található. Mennyi a valószínűsége, hogy 20 Kinder-tojás felbontása után mind a tíz figurából lesz legalább egy példánya?

Legyen A_i az az esemény, hogy az i. figura nincs meg a kisfiúnak ($i = 1, \ldots, 10$). Ekkor annak a valószínűsége, hogy mind a 10 figurából van neki legalább egy: $1 - \mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_{10})$.

Kezdjük el felírni a szitaformulát. Az első tag:

$$\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \ldots + \mathbb{P}(A_{10}) = 10 \cdot \frac{9^{20}}{10^{20}},$$

hiszen A_j azt jelenti, hogy a j. figura nem fordulhat elő, a többi 9 közül bármelyik bármelyik tojásban lehet (mint a visszatevéses mintavételnél).

Szitaformula: példa

Hasonlóképpen a következő tag, amit le kell vonnunk:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) + \ldots + \mathbb{P}(A_9 \cap A_{10}) = \binom{10}{2} \cdot \frac{8^{20}}{10^{20}},$$

hiszen a tagok száma megegyezik az $1, 2, \ldots, 10$ közül kiválasztható párok számával, $A_i \cap A_j$ pedig azt jelenti, hogy az i. és j. figura nem fordulhat elő, így mindegyik tojásban 8-féle figura lehet.

Szitaformula: példa

Hasonlóképpen a következő tag, amit le kell vonnunk:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) + \ldots + \mathbb{P}(A_9 \cap A_{10}) = \binom{10}{2} \cdot \frac{8^{20}}{10^{20}},$$

hiszen a tagok száma megegyezik az $1, 2, \ldots, 10$ közül kiválasztható párok számával, $A_i \cap A_j$ pedig azt jelenti, hogy az i. és j. figura nem fordulhat elő, így mindegyik tojásban 8-féle figura lehet.

Összességében:

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_{10}) = 10 \cdot \frac{9^{20}}{10^{20}} - \binom{10}{2} \cdot \frac{8^{20}}{10^{20}} + \binom{10}{3} \cdot \frac{7^{20}}{10^{20}} - \ldots =$$

$$= \sum_{k=1}^{10} (-1)^{k+1} \binom{10}{k} \frac{(10-k)^{20}}{10^{20}} = 78,53\%.$$

Szitaformula: példa

Hasonlóképpen a következő tag, amit le kell vonnunk:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) + \ldots + \mathbb{P}(A_9 \cap A_{10}) = \binom{10}{2} \cdot \frac{8^{20}}{10^{20}},$$

hiszen a tagok száma megegyezik az $1, 2, \ldots, 10$ közül kiválasztható párok számával, $A_i \cap A_j$ pedig azt jelenti, hogy az i. és j. figura nem fordulhat elő, így mindegyik tojásban 8-féle figura lehet.

Összességében:

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_{10}) = 10 \cdot \frac{9^{20}}{10^{20}} - \binom{10}{2} \cdot \frac{8^{20}}{10^{20}} + \binom{10}{3} \cdot \frac{7^{20}}{10^{20}} - \ldots =$$

$$= \sum_{k=1}^{10} (-1)^{k+1} \binom{10}{k} \frac{(10-k)^{20}}{10^{20}} = 78,53\%.$$

Ez tehát annak valószínűsége, hogy valamelyik fajta figura hiányzik, és így a keresett valószínűség: $100 - 78,53 = 21,47\%$.

Függetlenség

Mely események tekinthetők egymástól függetlennek, és melyek között van kapcsolat? Péter egy felmérés véletlenszerűen választott résztvevője.

Péternek van saját autója

holnap Budapesten lesz csapadék

Péter jövedelme több az átlagosnál

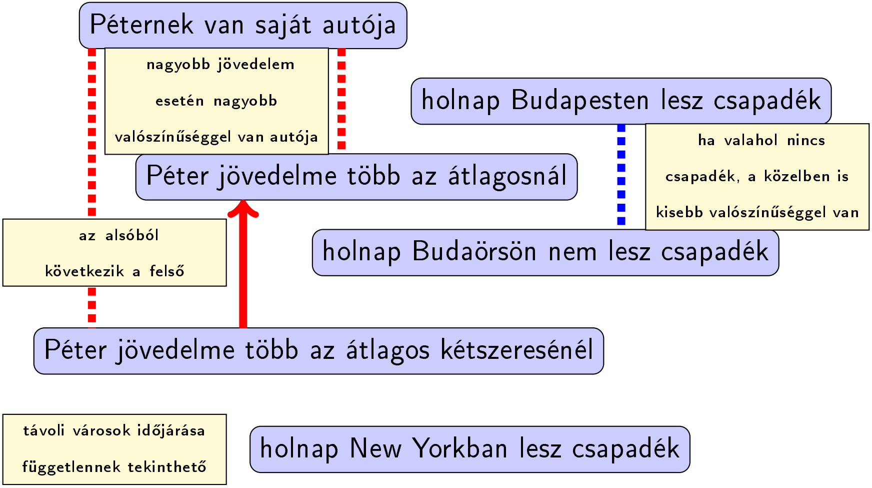
holnap Budaörsön nem lesz csapadék

Péter jövedelme több az átlagos kétszeresénél

holnap New Yorkban lesz csapadék

Függetlenség

Mely események tekinthetők egymástól függetlennek, és melyek között van kapcsolat? Péter egy felmérés véletlenszerűen választott résztvevője.



Események függetlensége: példa

Tegyük fel, hogy egy városban

- összesen 100000 ember él;
- 15000 embernek **van saját autója (A esemény)**:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{15000}{100000} = 0,15.$$

- 25000-nek **több a jövedelme az átlagosnál** (B esemény):

$$\mathbb{P}(B) = \frac{25000}{100000} = 0,25.$$

- 10000 ember van, akinek **több a jövedelme az átlagosnál és saját autóval rendelkezik**:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{10000}{100000} = 0,1.$$

Független-e A és B, vagyis az, hogy egy véletlenszerűen választott lakos jövedelme több az átlagosnál, és saját autóval rendelkezik?

Események függetlensége: példa

Hasonlítsuk össze **az autóval rendelkezők arányát**

Események függetlensége: példa

Hasonlítsuk össze **az autóval rendelkezők arányát a teljes lakosságban**,

Az autóval rendelkezők aránya a teljes lakosságban:
$\mathbb{P}(A) = \frac{15000}{100000} = 0,15$

Események függetlensége: példa

Hasonlítsuk össze **az autóval rendelkezők arányát a teljes lakosságban**, illetve **az átlagosnál nagyobb jövedelműek között**. Saját autó (A): 10000, nagy jövedelem (B): 25000,
mindkettő ($A \cap B$): 10000, összes lakos: 100000.

Ha független a két esemény, akkor a két arány megegyezik.

Az autóval rendelkezők aránya a teljes lakosságban: $\mathbb{P}(A) = \frac{15000}{100000} = 0,15$	Az autóval rendelkezők aránya az átlagosnál nagyobb jövedelműek között: $\frac{10000}{25000} = 0,4$

Események függetlensége: példa

Hasonlítsuk össze **az autóval rendelkezők arányát a teljes lakosságban**, illetve **az átlagosnál nagyobb jövedelműek között**. Saját autó (A): 10000, nagy jövedelem (B): 25000,
mindkettő ($A \cap B$): 10000, összes lakos: 100000.

Ha független a két esemény, akkor a két arány megegyezik.

Az autóval rendelkezők aránya a teljes lakosságban: $\mathbb{P}(A) = \frac{15000}{100000} = 0,15$	$\neq$	Az autóval rendelkezők aránya az átlagosnál nagyobb jövedelműek között: $\frac{10000}{25000} = 0,4$

Események függetlensége: példa

Hasonlítsuk össze **az autóval rendelkezők arányát a teljes lakosságban**, illetve **az átlagosnál nagyobb jövedelműek között**. Saját autó (A): 10000, nagy jövedelem (B): 25000,
mindkettő ($A \cap B$): 10000, összes lakos: 100000.

Ha független a két esemény, akkor a két arány megegyezik.

Az autóval rendelkezők aránya a teljes lakosságban: $\mathbb{P}(A) = \frac{15000}{100000} = 0,15$	$\neq$	Az autóval rendelkezők aránya az átlagosnál nagyobb jövedelműek között: $\frac{10000}{25000} = 0,4$

Az autóval rendelkezők aránya több az átlagosnál nagyobb jövedelműek között $\Rightarrow$ **a két esemény nem független.**

Események függetlensége: példa

Hasonlítsuk össze **az autóval rendelkezők arányát a teljes lakosságban**, illetve **az átlagosnál nagyobb jövedelműek között**. Saját autó (A): 10000, nagy jövedelem (B): 25000,
mindkettő ($A \cap B$): 10000, összes lakos: 100000.

Az autóval rendelkezők aránya a teljes lakosságban: $\mathbb{P}(A) = \frac{15000}{100000} = 0,15$	$\neq$	Az autóval rendelkezők aránya az átlagosnál nagyobb jövedelműek között: $\frac{10000}{25000} = 0,4$

Akkor egyezett volna meg a két arány, ha $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$, azaz

Események függetlensége: példa

Hasonlítsuk össze **az autóval rendelkezők arányát a teljes lakosságban**, illetve **az átlagosnál nagyobb jövedelműek között**. Saját autó (A): 10000, nagy jövedelem (B): 25000,
mindkettő ($A \cap B$): 10000, összes lakos: 100000.

Az autóval rendelkezők aránya a teljes lakosságban: $\mathbb{P}(A) = \frac{15000}{100000} = 0,15$	$\neq$	Az autóval rendelkezők aránya az átlagosnál nagyobb jövedelműek között: $\frac{10000}{25000} = 0,4$

Akkor egyezett volna meg a két arány, ha $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$, azaz

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \quad \Leftrightarrow$$

Események függetlensége: példa

Hasonlítsuk össze **az autóval rendelkezők arányát a teljes lakosságban**, illetve **az átlagosnál nagyobb jövedelműek között**. Saját autó (A): 10000, nagy jövedelem (B): 25000,
mindkettő ($A \cap B$): 10000, összes lakos: 100000.

Az autóval rendelkezők aránya a teljes lakosságban: $\mathbb{P}(A) = \frac{15000}{100000} = 0,15$	$\neq$	Az autóval rendelkezők aránya az átlagosnál nagyobb jövedelműek között: $\frac{10000}{25000} = 0,4$

Akkor egyezett volna meg a két arány, ha $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$, azaz

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B).}$$

Események függetlensége

Az $A, B \in \mathcal{A}$ események **függetlenek**, ha

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B),$$

vagyis **a metszet valószínűsége a valószínűségek szorzata**.

Események függetlensége

Az $A, B \in \mathcal{A}$ események **függetlenek**, ha

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B),$$

vagyis **a metszet valószínűsége a valószínűségek szorzata**.

Több eseménynél tetszőleges részhalmazra teljesülnie kell ennek a tulajdonságnak.

Az $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ események **függetlenek**, ha tetszőleges $k \geq 1$ és $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ számokra

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2}) \ldots \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

Függetlenség: példa

Két szabályos dobókockával dobunk. Független-e az alábbi két esemény: **az első dobás hatos**; **a második dobás hatos**?

Függetlenség: példa

Két szabályos dobókockával dobunk. Független-e az alábbi két esemény: **az első dobás hatos**; **a második dobás hatos**?

11	12	13	14	15	**16**
21	22	23	24	25	**26**
31	32	33	34	35	**36**
41	42	43	44	45	**46**
51	52	53	54	55	**56**
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**

A: az első dobás hatos; **B**: a második dobás hatos; $A \cap B$: mindkét dobás hatos

Függetlenség: példa

Két szabályos dobókockával dobunk. Független-e az alábbi két esemény: **az első dobás hatos**; **a második dobás hatos**?

11	12	13	14	15	**16**
21	22	23	24	25	**26**
31	32	33	34	35	**36**
41	42	43	44	45	**46**
51	52	53	54	55	**56**
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**

A: az első dobás hatos; **B**: a második dobás hatos; A ∩ B: mindkét dobás hatos

$$\frac{1}{36} = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}.$$

Az A és B események **függetlenek**.

Függetlenség: példa

Két szabályos dobókockával dobunk. Független-e az alábbi két esemény: **az első dobás hatos**; **az összeg** 10?

Függetlenség: példa

Két szabályos dobókockával dobunk. Független-e az alábbi két esemény: **az első dobás hatos**; **az összeg** 10?

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	**46**
51	52	53	54	**55**	56
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**

A: az első dobás hatos; **C**: az összeg 10; $A \cap C$: az első dobás hatos, a második négyes

Függetlenség: példa

Két szabályos dobókockával dobunk. Független-e az alábbi két esemény: **az első dobás hatos**; **az összeg** 10?

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	**46**
51	52	53	54	**55**	56
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**

A: az első dobás hatos; **C**: az összeg 10; A ∩ C: az első dobás hatos, a második négyes

$$\frac{1}{36} = \mathbb{P}(A \cap C) \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{12}.$$

Az A és C események **nem függetlenek**.

Függetlenség: példa

Két szabályos dobókockával dobunk. Független-e az alábbi két esemény: **az első dobás hatos**; **az összeg** 7?

Függetlenség: példa

Két szabályos dobókockával dobunk. Független-e az alábbi két esemény: **az első dobás hatos**; **az összeg** 7?

11	12	13	14	15	**16**
21	22	23	24	**25**	26
31	32	33	**34**	35	36
41	42	**43**	44	45	46
51	**52**	53	54	55	56
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**

A: az első dobás hatos; **D**: az összeg 7; $A \cap D$: az első dobás hatos, a második egyes

Függetlenség: példa

Két szabályos dobókockával dobunk. Független-e az alábbi két esemény: **az első dobás hatos**; **az összeg** 7?

11	12	13	14	15	**16**
21	22	23	24	**25**	26
31	32	33	**34**	35	36
41	42	**43**	44	45	46
51	**52**	53	54	55	56
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**

A: az első dobás hatos; **D**: az összeg 7; $A \cap D$: az első dobás hatos, a második egyes

$$\frac{1}{36} = \mathbb{P}(A \cap D) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(D) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}.$$

Az A és D események **függetlenek**.

Páronkénti függetlenség

Az $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ események **páronként függetlenek**, ha minden $1 \leq i < j$ esetén A_i és A_j függetlenek, azaz

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j).$$

Páronkénti függetlenség

Az $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ események **páronként függetlenek**, ha minden $1 \leq i < j$ esetén A_i és A_j függetlenek, azaz

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j).$$

Mi a kapcsolat a függetlenség és a páronkénti függetlenség között?

az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események függetlenek

az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események páron- ként függetlenek

Páronkénti függetlenség

Az $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ események **páronként függetlenek**, ha minden $1 \leq i < j$ esetén A_i és A_j függetlenek, azaz

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j).$$

Mi a kapcsolat a függetlenség és a páronkénti függetlenség között?

az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események függetlenek	$\Rightarrow$	az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események páronként függetlenek

Páronkénti függetlenség

Az $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ események **páronként függetlenek**, ha minden $1 \leq i < j$ esetén A_i és A_j függetlenek, azaz

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j).$$

Mi a kapcsolat a függetlenség és a páronkénti függetlenség között?

az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események függetlenek	$\Rightarrow$ $\not\Leftarrow$	az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események páronként függetlenek

Páronkénti függetlenség

Az $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ események **páronként függetlenek**, ha minden $1 \leq i < j$ esetén A_i és A_j függetlenek, azaz

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j).$$

Mi a kapcsolat a függetlenség és a páronkénti függetlenség között?

az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események függetlenek	$\Rightarrow$ $\not\Leftarrow$	az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események páronként függetlenek

Két dobókockával dobva tekintsük az alábbi eseményeket:

A_1: az első szám páros

A_2: a második szám páros

A_3: az összeg páros

Ekkor A_1, A_2, A_3 **páronként függetlenek, de nem függetlenek**.

Páronkénti függetlenség

Például két szabályos dobókockával dobunk.

A_1: az első dobás páros

A_2: a második dobás páros

A_3: a dobott számok összege páros

Az világos, hogy A_1 és A_2 függetlenek.

Páronkénti függetlenség

Például két szabályos dobókockával dobunk.

A_1: az első dobás páros

A_2: a második dobás páros

A_3: a dobott számok összege páros

Az világos, hogy A_1 és A_2 függetlenek.

A_1 és A_3 is függetlenek, hiszen $A_1 \cap A_3$ azt jelenti, hogy mindkét dobás páros, így

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3)$$

Hasonlóképpen A_2 és A_3 is függetlenek.

Páronkénti függetlenség

Például két szabályos dobókockával dobunk.

A_1: az első dobás páros

A_2: a második dobás páros

A_3: a dobott számok összege páros

Az világos, hogy A_1 és A_2 függetlenek.

A_1 és A_3 is függetlenek, hiszen $A_1 \cap A_3$ azt jelenti, hogy mindkét dobás páros, így

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3)$$

Hasonlóképpen A_2 és A_3 is függetlenek.

Viszont $(A_1 \cap A_2) \subseteq A_3$, és

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3).$$

Házi feladat október 1., kedd, 8:15-ig

Egy utcában 30 ház van, mindegyikben négyen laknak. Kiválasztunk véletlenszerűen 9 (különböző) embert visszatevés nélkül, minden 9 fős csoportot azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy van olyan ház, amelyiknek mind a 4 lakosát kiválasztottuk?