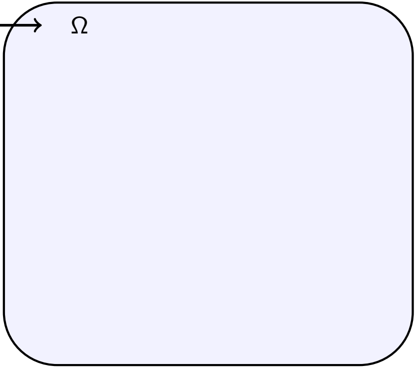
A Kolmogorov-féle valószínűségi mező (2. előadás)

eseménytér

összes lehetőség: Ω



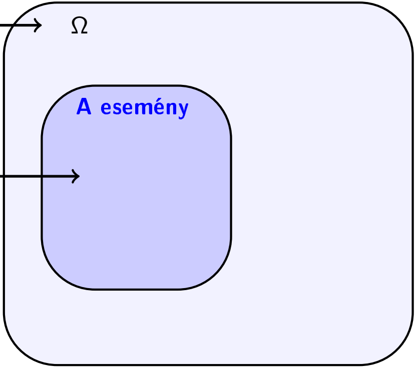
A Kolmogorov-féle valószínűségi mező (2. előadás)

eseménytér

összes lehetőség: Ω

esemény

$A \subseteq \Omega$ részhalmaz



A Kolmogorov-féle valószínűségi mező (2. előadás)

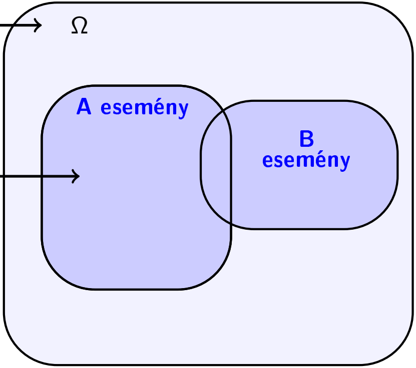
eseménytér

összes lehetőség: Ω

$$\boxed{\mathbb{P}(\Omega) = 1}$$

esemény

$A \subseteq \Omega$ részhalmaz



A Kolmogorov-féle valószínűségi mező (2. előadás)

Ω: (magyar) **felnőtt emberek**

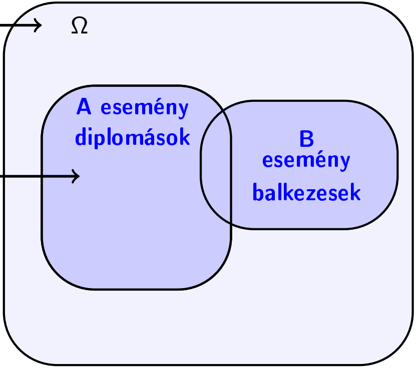
eseménytér

összes lehetőség: Ω

$\boxed{\mathbb{P}(\Omega) = 1}$

esemény

$A \subseteq \Omega$ részhalmaz



A Kolmogorov-féle valószínűségi mező (2. előadás)

Ω: (magyar) **felnőtt emberek**

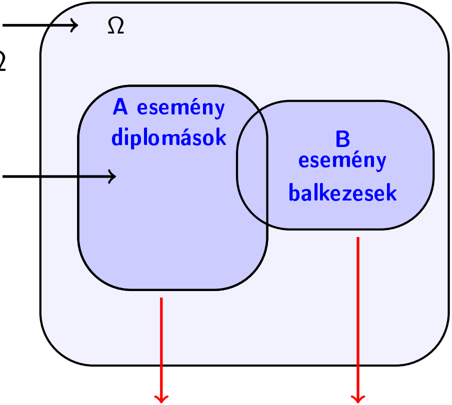
eseménytér

összes lehetőség: Ω

$\boxed{\mathbb{P}(\Omega) = 1}$

esemény

$A \subseteq \Omega$ részhalmaz



$\boxed{\mathbb{P}(A) = 22\%}$ $\boxed{\mathbb{P}(B) = 10\%}$

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező (2. előadás)

Ω: (magyar) **felnőtt emberek**

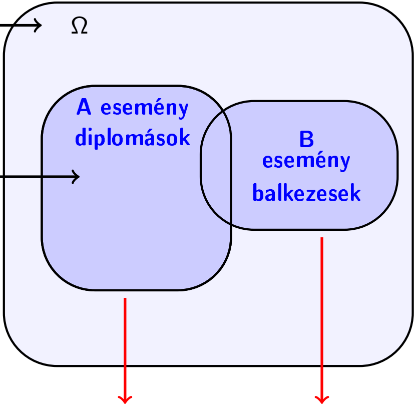
eseménytér

összes lehetőség: Ω

$\boxed{\mathbb{P}(\Omega) = 1}$

esemény

$A \subseteq \Omega$ részhalmaz



$\boxed{\mathbb{P}(A) = 22\%}$ $\boxed{\mathbb{P}(B) = 10\%}$

valószínűség: eseményekhez $[0, 1]$-beli számokat rendelő függvény

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező (2. előadás)

Ω: (magyar) **felnőtt emberek**

eseménytér

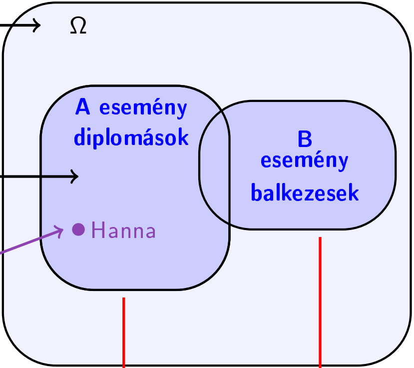
összes lehetőség: Ω

$\boxed{\mathbb{P}(\Omega) = 1}$

esemény

$A \subseteq \Omega$ részhalmaz

elemi esemény



$\boxed{\mathbb{P}(A) = 22\%}$ $\boxed{\mathbb{P}(B) = 10\%}$

valószínűség: eseményekhez $[0, 1]$-beli számokat rendelő függvény

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ hármas **Kolmogorov-féle valószínűségi mező**, ha

- az Ω **eseménytér** egy nem üres halmaz;

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ hármas **Kolmogorov-féle valószínűségi mező**, ha

- az Ω **eseménytér** egy nem üres halmaz;
- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ az **az események halmaza**, azaz minden $A \in \mathcal{A}$-ra $A \subseteq \Omega$ úgy, hogy
  1. $\Omega \in \mathcal{A}$;
  2. ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, akkor $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ (azaz megszámlálható sok $\mathcal{A}$-beli elem uniója is $\mathcal{A}$-beli);
  3. ha $A \in \mathcal{A}$, akkor $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ (azaz $\mathcal{A}$-beli halmazok komplementere is $\mathcal{A}$-beli.

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ hármas **Kolmogorov-féle valószínűségi mező**, ha

- az Ω **eseménytér** egy nem üres halmaz;
- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ az **az események halmaza**, azaz minden $A \in \mathcal{A}$-ra $A \subseteq \Omega$ úgy, hogy
  1. $\Omega \in \mathcal{A}$;
  2. ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, akkor $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ (azaz megszámlálható sok $\mathcal{A}$-beli elem uniója is $\mathcal{A}$-beli);
  3. ha $A \in \mathcal{A}$, akkor $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ (azaz $\mathcal{A}$-beli halmazok komplementere is $\mathcal{A}$-beli.
- a **valószínűség** egy $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$ függvény, melyre
  1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, azaz a biztos esemény valószínűsége 1;
  2. ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ és minden $1 \leq i < j$-re $A_i \cap A_j = \emptyset$, akkor

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n),$$

azaz megszámlálható sok kizáró esemény uniójának valószínűsége a valószínűségek összege.

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

- Ω: **eseménytér** vagy elemi események halmaza.
- Ω elemei ($\omega \in \Omega$): **elemi események**.
- $\mathcal{A}$: **események halmaza** (vagy események σ-algebrája).
- $\mathcal{A}$ elemei ($A \in \mathcal{A}$): **események**.
- $\mathbb{P}$: **valószínűség** (probability).
- Ω esemény neve: biztos esemény.
- $\emptyset$ (üres halmaz) esemény neve: lehetetlen esemény.
- $A \in \mathcal{A}$ és $B \in \mathcal{A}$ **kizáró események**, ha $A \cap B = \emptyset$, azaz **egyszerre nem következhetnek be**.

Feltételes valószínűség: példa

Gábornak **három gyereke** van.

Feltételes valószínűség: példa

Gábornak **három gyereke** van.

Mennyi a valószínűsége, hogy **a középső gyermeke fiú**?

Feltételes valószínűség: példa

Gábornak **három gyereke** van.

Mennyi a valószínűsége, hogy **a középső gyermeke fiú**?

Ω

FFF	**LLF**
LFF	**LFL**
FLF	**FLL**
FFL	**LLL**

Feltételes valószínűség: példa

Gábornak **három gyereke** van.

Mennyi a valószínűsége, hogy **a középső gyermeke fiú**?

A **esemény**

Ω

FFF	**LLF**
LFF	**LFL**
FLF	**FLL**
FFL	**LLL**

$2^3 = 8$ egyformán valószínű lehetőség

4 jó lehetőség

$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{4}{8} = 50\%}$

Feltételes valószínűség: példa

Gábornak **három gyereke** van.
Azt is elárulja, hogy **pontosan egy fia van**.
Most mennyi a valószínűsége, hogy **a középső gyermeke fiú**?

A **esemény**

Feltételes valószínűség: példa

feltétel: plusz információ

Gábornak **három gyereke** van. $\downarrow$ B **esemény**

Azt is elárulja, hogy **pontosan egy fia van**.

Most mennyi a valószínűsége, hogy **a középső gyermeke fiú**?

A **esemény**

Feltételes valószínűség: példa

feltétel: plusz információ

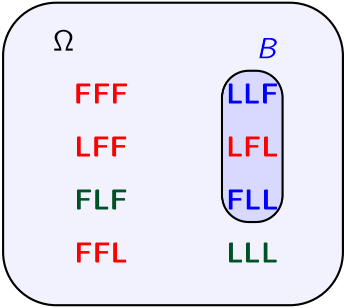
Gábornak **három gyereke** van. B **esemény**

Azt is elárulja, hogy **pontosan egy fia van**.

Most mennyi a valószínűsége, hogy **a középső gyermeke fiú**?

A **esemény**

$2^3 = 8$ egyformán valószínű lehetőség



Feltételes valószínűség: példa

feltétel: plusz információ

Gábornak **három gyereke** van. ↓ B **esemény**

Azt is elárulja, hogy **pontosan egy fia van**.

Most mennyi a valószínűsége, hogy **a középső gyermeke fiú**?

A **esemény**

$2^3 = 8$ egyformán valószínű lehetőség

Ω

B

FFF	**LLF**
LFF	**LFL**
FLF	**FLL**
FFL	**LLL**

$\mathbb{P}(B) = 3/8$

$\mathbb{P}(A \cap B) = 1/8$

Feltételes valószínűség: példa

feltétel: plusz információ

Gábornak **három gyereke** van. $\downarrow$ B **esemény**

Azt is elárulja, hogy **pontosan egy fia van**.

Most mennyi a valószínűsége, hogy **a középső gyermeke fiú**?

A **esemény**

Ω

B

FFF **LLF**

LFF **LFL**

FLF **FLL**

FFL **LLL**

$\mathbb{P}(B) = 3/8$

$\mathbb{P}(A \cap B) = 1/8$

A-nak B-re vonatkozó feltételes valószínűsége

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1/8}{3/8} = \frac{1}{3} < \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A) \text{ ebben az esetben.}$$

Feltételes valószínűség

Legyenek $A, B \in \mathcal{A}$ események úgy, hogy $\mathbb{P}(B) > 0$.

Feltételes valószínűség

Legyenek $A, B \in \mathcal{A}$ események úgy, hogy $\mathbb{P}(B) > 0$.

Ekkor az A eseménynek B-re vonatkozó **feltételes valószínűsége**:

Feltételes valószínűség

Legyenek $A, B \in \mathcal{A}$ események úgy, hogy $\mathbb{P}(B) > 0$.

Ekkor az A eseménynek B-re vonatkozó **feltételes valószínűsége**:

$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.}$$

Feltételes valószínűség

Legyenek $A, B \in \mathcal{A}$ események úgy, hogy $\mathbb{P}(B) > 0$.

Ekkor az A eseménynek B-re vonatkozó **feltételes valószínűsége**:

$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.} \longleftarrow \boxed{\text{metszet valószínűsége}}$$

A és B is bekövetkezik

Feltételes valószínűség

Legyenek $A, B \in \mathcal{A}$ események úgy, hogy $\mathbb{P}(B) > 0$.

Ekkor az A eseménynek B-re vonatkozó **feltételes valószínűsége**:

$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.}$$

metszet valószínűsége

A és B is bekövetkezik

feltétel valószínűsége

$\mathbb{P}(B) > 0$, lehet osztani

Értelmezés: feltéve, hogy B bekövetkezett, mennyi a valószínűsége, hogy A is bekövetkezik

Feltételes valószínűség

Legyenek $A, B \in \mathcal{A}$ események úgy, hogy $\mathbb{P}(B) > 0$.

Ekkor az A eseménynek B-re vonatkozó **feltételes valószínűsége**:

$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.}$$

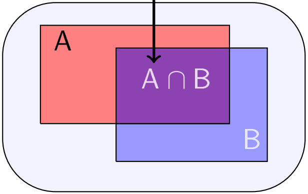
metszet valószínűsége

A és B is bekövetkezik

feltétel valószínűsége

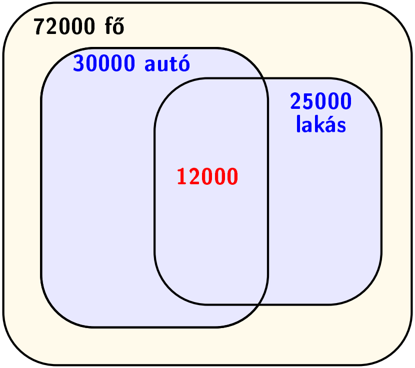
$\mathbb{P}(B) > 0$, lehet osztani

Értelmezés: feltéve, hogy B bekövetkezett, mennyi a valószínűsége, hogy A is bekövetkezik



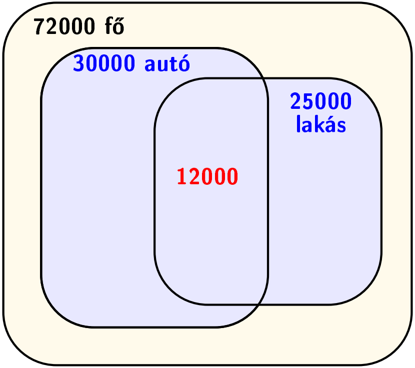
Feltételes valószínűség: példa

Egy 72000 fős városban harmincezer embernek van autója, huszonötezernek lakása, tizenkét ezernek mindkettő. Egy véletlenszerűen választott lakosról tudjuk, hogy van autója. Erre vonatkozóan mennyi a feltételes valószínűsége, hogy az illetőnek van lakása?



Feltételes valószínűség: példa

Egy 72000 fős városban harmincezer embernek van autója, huszonötezernek lakása, tizenkét ezernek mindkettő. Egy véletlenszerűen választott lakosról tudjuk, hogy van autója. Erre vonatkozóan mennyi a feltételes valószínűsége, hogy az illetőnek van lakása?



$$\mathbb{P}(L|A) = \frac{\mathbb{P}(L \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{12000/72000}{30000/72000} = 40\% > \mathbb{P}(L) = \frac{25000}{72000} = 34,7\%.$$

Bayes-tétel: példa

Hanna sátorozni megy Sopronba. Az alábbi táblázat mutatja, hogy adott mennyiségű csapadék esetén mennyi valószínűséggel ázik be a sátra, illetve az előrejelzés szerint mennyi az adott csapadékmennyiség valószínűsége.

csapadék (mm)	0	$0-5$	$5-10$	**10-nél több**
beázás valószínűsége	0	15%	35%	60%
előrejelzés	40%	10%	30%	20%

Mennyi a valószínűsége, hogy **Hanna sátra beázik?**

Bayes-tétel: példa

Hanna sátorozni megy Sopronba. Az alábbi táblázat mutatja, hogy adott mennyiségű csapadék esetén mennyi valószínűséggel ázik be a sátra, illetve az előrejelzés szerint mennyi az adott csapadékmennyiség valószínűsége.

csapadék (mm)	0	$0-5$	$5-10$	**10-nél több**
beázás valószínűsége	0	15%	35%	60%
előrejelzés	40%	10%	30%	20%

Mennyi a valószínűsége, hogy **Hanna sátra beázik?**

Hanna a **beázott sátorról** küld képeket.

Erre feltételesen mennyi annak valószínűsége, hogy Sopronban **több mint 10 mm eső** esett ezen a napon?

Teljes valószínűség tétele

csapadék (mm)	0	$0-5$	$5-10$	10-nél több
beázás valószínűsége	0	15%	35%	60%
előrejelzés	40%	10%	30%	20%

B_1: nincs csapadék

B_2 : $0-5$ mm csapadék

A: Hanna sátra beázik

B_3 : $5-10$ mm csapadék

B_4 : >10 mm csapadék

Teljes valószínűség tétele

csapadék (mm)	0	0 – 5	5 – 10	10-nél több
beázás valószínűsége	0	15%	35%	60%
előrejelzés	40%	10%	30%	20%

B_1: nincs csapadék

$\mathbb{P}(B_1) = 0,4$

B_2 : 0 – 5 mm csapadék

$\mathbb{P}(B_2) = 0,1$

A: Hanna sátra beázik

$\mathbb{P}(B_3) = 0,3$

B_3 : 5 – 10 mm csapadék

$\mathbb{P}(B_4) = 0,2$

B_4 : $>$ 10 mm csapadék

Teljes valószínűség tétele

csapadék (mm)	0	$0-5$	$5-10$	10-nél több
beázás valószínűsége	0	15%	35%	60%
előrejelzés	40%	10%	30%	20%

B_1: nincs csapadék

$\mathbb{P}(B_1) = 0,4$

$\mathbb{P}(A|B_1) = 0$

B_2 : $0-5$ mm csapadék

$\mathbb{P}(B_2) = 0,1$

$\mathbb{P}(A|B_2) = 0,15$

A: Hanna sátra beázik

$\mathbb{P}(A|B_3) = 0,35$

$\mathbb{P}(B_3) = 0,3$

B_3 : $5-10$ mm csapadék

$\mathbb{P}(A|B_4) = 0,6$

$\mathbb{P}(B_4) = 0,2$

B_4 : >10 mm csapadék

Teljes valószínűség tétele

csapadék (mm)	0	0 – 5	5 – 10	10-nél több
beázás valószínűsége	0	15%	35%	60%
előrejelzés	40%	10%	30%	20%

B_1: nincs csapadék

$\mathbb{P}(B_1) = 0,4$

$\mathbb{P}(A|B_1) = 0$

$B_2 : 0 - 5$ mm csapadék

$\mathbb{P}(B_2) = 0,1$

$\mathbb{P}(A|B_2) = 0,15$

A: Hanna sátra beázik

$\mathbb{P}(A|B_3) = 0,35$

$\mathbb{P}(B_3) = 0,3$

$B_3 : 5 - 10$ mm csapadék

$\mathbb{P}(A|B_4) = 0,6$

$\mathbb{P}(B_4) = 0,2$

$B_4 : > 10$ mm csapadék

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \\ + \mathbb{P}(A|B_3)\mathbb{P}(B_3) + \mathbb{P}(A|B_4)\mathbb{P}(B_4) =$$

Teljes valószínűség tétele

csapadék (mm)	0	$0-5$	$5-10$	10-nél több
beázás valószínűsége	0	15%	35%	60%
előrejelzés	40%	10%	30%	20%

B_1: nincs csapadék

$\mathbb{P}(B_1) = 0,4$

$\mathbb{P}(A|B_1) = 0$

$B_2 : 0 - 5$ mm csapadék

$\mathbb{P}(B_2) = 0,1$

$\mathbb{P}(A|B_2) = 0,15$

A: Hanna sátra beázik

$\mathbb{P}(A|B_3) = 0,35$

$\mathbb{P}(B_3) = 0,3$

$B_3 : 5 - 10$ mm csapadék

$\mathbb{P}(A|B_4) = 0,6$

$\mathbb{P}(B_4) = 0,2$

$B_4 : > 10$ mm csapadék

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) +$$
$$+\mathbb{P}(A|B_3)\mathbb{P}(B_3) + \mathbb{P}(A|B_4)\mathbb{P}(B_4) =$$
$$= 0 \cdot 0,4 + 0,15 \cdot 0,1 + 0,35 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,2 = 24\%.$$

Bayes-tétel: példa

Hanna sátorozni megy Sopronba. Az alábbi táblázat mutatja, hogy adott mennyiségű csapadék esetén mennyi valószínűséggel ázik be a sátra, illetve az előrejelzés szerint mennyi az adott csapadékmennyiség valószínűsége.

csapadék (mm)	0	$0-5$	$5-10$	**10-nél több**
beázás valószínűsége	0	15%	35%	60%
előrejelzés	40%	10%	30%	20%

Mennyi a valószínűsége, hogy **Hanna sátra beázik?**

$$0 \cdot 0,4 + 0,15 \cdot 0,1 + 0,35 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,2 = 24\%.$$

Hanna a **beázott sátorról** küld képeket.

Erre feltételesen mennyi annak valószínűsége, hogy Sopronban **több mint 10 mm eső** esett ezen a napon?

Bayes-tétel: példa

csapadék (mm)	0	$0-5$	$5-10$	**10-nél több**
beázás valószínűsége	0	15%	35%	60%
előrejelzés	40%	10%	30%	20%

B_1: nincs csapadék

$\mathbb{P}(B_1) = 0,4$

$\mathbb{P}(A|B_1) = 0$

$B_2 : 0-5$ mm csapadék

$\mathbb{P}(B_2) = 0,1$

$\mathbb{P}(A|B_2) = 0,15$

A: Hanna sátra beázik

$\mathbb{P}(A|B_3) = 0,35$

$\mathbb{P}(B_3) = 0,3$

$B_3 : 5-10$ mm csapadék

$\mathbb{P}(A|B_4) = 0,6$

$\mathbb{P}(B_4) = 0,2$

$B_4 : > 10$ mm csapadék

Bayes-tétel: példa

Hanna a **beázott sátorról** küld képeket. Mennyi annak valószínűsége, hogy Sopronban **több mint 10 mm eső** esett ezen a napon? Azaz mennyi $\mathbb{P}(B_4|A)$?

csapadék (mm)	0	$0-5$	$5-10$	**10-nél több**
beázás valószínűsége	0	15%	35%	60%
előrejelzés	40%	10%	30%	20%

Bayes-tétel: példa

Hanna a **beázott sátorról** küld képeket. Mennyi annak valószínűsége, hogy Sopronban **több mint 10 mm eső** esett ezen a napon? Azaz mennyi $\mathbb{P}(B_4|A)$?

csapadék (mm)	0	$0-5$	$5-10$	**10-nél több**
beázás valószínűsége	0	15%	35%	60%
előrejelzés	40%	10%	30%	20%

$$\mathbb{P}(B_4|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B_4)}{\mathbb{P}(B_4)} = \frac{\mathbb{P}(A|B_4)\mathbb{P}(B_4)}{\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \ldots + \mathbb{P}(A|B_4)\mathbb{P}(B_4)} =$$

$$= \frac{0,6 \cdot 0,2}{0 \cdot 0,4 + 0,15 \cdot 0,1 + 0,35 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,2} = \frac{0,12}{0,24} = 50\%.$$

Bayes-tétel: példa

Hanna a **beázott sátorról** küld képeket. Mennyi annak valószínűsége, hogy Sopronban **több mint 10 mm eső** esett ezen a napon? Azaz mennyi $\mathbb{P}(B_4|A)$?

csapadék (mm)	0	$0-5$	$5-10$	**10-nél több**
beázás valószínűsége	0	15%	35%	60%
előrejelzés	40%	10%	30%	20%

$$\mathbb{P}(B_4|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B_4)}{\mathbb{P}(B_4)} = \frac{\mathbb{P}(A|B_4)\mathbb{P}(B_4)}{\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \ldots + \mathbb{P}(A|B_4)\mathbb{P}(B_4)} =$$

$$= \frac{0,6 \cdot 0,2}{0 \cdot 0,4 + 0,15 \cdot 0,1 + 0,35 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,2} = \frac{0,12}{0,24} = 50\%.$$

Vagyis feltéve, hogy beázott a sátor, 50% valószínűséggel volt 10 mm-nél több csapadék. Ez több, mint 20%: feltéve, hogy beázott a sátor, valószínűbb a sok csapadék, mint az új információ nélkül.

Teljes eseményrendszer

Definíció (Teljes eseményrendszer)

A $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{A}$ *(véges vagy megszámlálható sok) esemény együttesét teljes eseményrendszernek nevezzük, ha*

1. $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$, *azaz minden elemi esemény szerepel valamelyik eseményben;*
2. $B_i \cap B_j = \emptyset$ *teljesül minden* $1 \leq i < j$*-re, azaz páronként kizáróak, semelyik elemi esemény nem szerepel egyszerre két eseményben is;*
3. $\mathbb{P}(B_i) > 0$ *minden* $i = 1, 2, \ldots$*-re, azaz mindegyiknek pozitív a valószínűsége.*

Teljes eseményrendszer

Definíció (Teljes eseményrendszer)

A $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{A}$ *(véges vagy megszámlálható sok) esemény együttesét teljes eseményrendszernek nevezzük, ha*

1. $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$, *azaz minden elemi esemény szerepel valamelyik eseményben;*
2. $B_i \cap B_j = \emptyset$ *teljesül minden* $1 \le i < j$*-re, azaz páronként kizáróak, semelyik elemi esemény nem szerepel egyszerre két eseményben is;*
3. $\mathbb{P}(B_i) > 0$ *minden* $i = 1, 2, \ldots$*-re, azaz mindegyiknek pozitív a valószínűsége.*

Tétel (Teljes valószínűség tétele)

Legyen $A \in \mathcal{A}$ *tetszőleges esemény,* $B_1, B_2, \ldots$ *teljes eseményrendszer. Ekkor*

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i).$$

Bayes-tétel

Tétel (Teljes valószínűség tétele)

Legyen $A \in \mathcal{A}$ *tetszőleges esemény,* $B_1, B_2, \ldots$ *teljes eseményrendszer. Ekkor*

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i).$$

Tétel (Bayes-tétel)

Legyen $A \in \mathcal{A}$ *olyan esemény, melyre* $\mathbb{P}(A) > 0$, $B_1, B_2, \ldots$ *pedig teljes eseményrendszer. Ekkor minden* $k = 1, 2, \ldots$*-re teljesül, hogy*

$$\mathbb{P}(B_k|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_k)\mathbb{P}(B_k)}{\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3)\mathbb{P}(B_3) + \ldots} = \frac{\mathbb{P}(A|B_k)\mathbb{P}(B_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}.$$

Bayes-tétel: példa

Példa. Tegyük fel, hogy egy város lakosságának 36%-a rendelkezik diplomával, 42%-a érettségivel (mint legmagasabb végzettség), a többiek egyikkel sem. A diplomások 23%-a, az érettségizettek 21%-a, az érettségivel nem rendelkezők 10%-ának van saját autója.

- Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott lakos saját autóval rendelkezik?
- A város egyik lakosa elárulja, hogy van saját autója. Ez alapján mennyi a feltételes valószínűsége, hogy az illető diplomával rendelkezik?

Bayes-tétel: példa

Példa. Tegyük fel, hogy egy város lakosságának 36%-a rendelkezik diplomával, 42%-a érettségivel (mint legmagasabb végzettség), a többiek egyikkel sem. A diplomások 23%-a, az érettségizettek 21%-a, az érettségivel nem rendelkezők 10%-ának van saját autója.

A: autó; B_1: diploma; B_2: érettségi; B_3: nem érettségizett

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A \cap B_1) + \mathbb{P}(A \cap B_2) + \mathbb{P}(A \cap B_3) = \\
&= \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3)\mathbb{P}(B_3) = \\
&= 0,23 \cdot 0,36 + 0,21 \cdot 0,42 + 0,1 \cdot 0,22 = 19,3\%.
\end{aligned}
$$

Vagyis egy véletlenszerűen választott lakos $19,3\%$ valószínűséggel rendelkezik saját autóval.

Bayes-tétel: példa

Példa. Tegyük fel, hogy egy város lakosságának 36%-a rendelkezik diplomával, 42%-a érettségivel (mint legmagasabb végzettség), a többiek egyikkel sem. A diplomások 23%-a, az érettségizettek 21%-a, az érettségivel nem rendelkezők 10%-ának van saját autója.

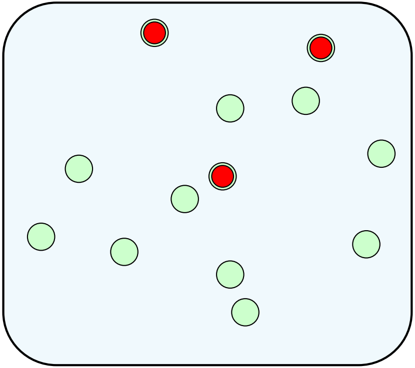
A: autó; B_1: diploma; B_2: érettségi; B_3: nem érettségizett

$$\mathbb{P}(B_1|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1)}{\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3)\mathbb{P}(B_3)} =$$
$$= \frac{0,23 \cdot 0,36}{0,23 \cdot 0,36 + 0,21 \cdot 0,42 + 0,1 \cdot 0,22} = 42,9\%.$$

Vagyis egy autóval rendelkező lakosnak $42,9\%$ valószínűséggel van diplomája. Ez nagyobb a diplomások arányánál (36%), hiszen a diplomások között nagyobb az autósok aránya, mint a teljes népességben.

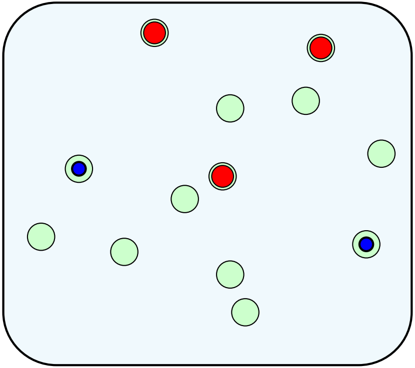
Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Egy vízilabdacsapat **13 tagja** közül **három játékos** doppingol.
A doppingtesztre kiválasztanak **két különböző** játékost,
minden lehetséges párt azonos valószínűséggel választva.



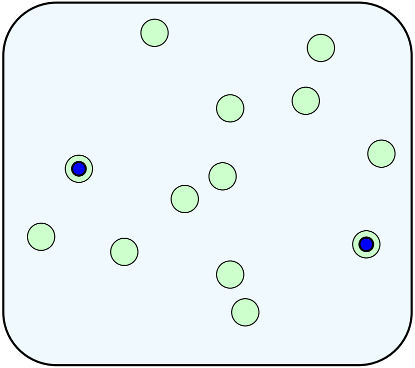
Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Egy vízilabdacsapat **13 tagja** közül **három játékos** doppingol. A doppingtesztre kiválasztanak **két különböző** játékost, minden lehetséges párt azonos valószínűséggel választva. Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott játékosok közül **egy sem** doppingol?



Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Hányféleképpen lehet **13 játékos** közül **két különbözőt** választani?



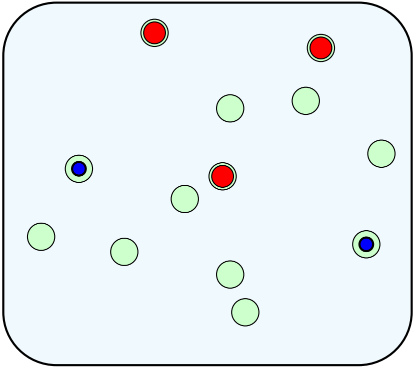
Visszatevés nélküli mintavétel: példa

első   második

$$\frac{13 \cdot 12}{2} = \binom{13}{2} = 78$$

a sorrend nem számít

$\binom{13}{2} = 78$
egyformán
valószínű
eset van

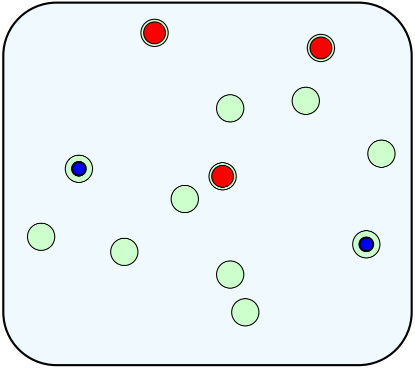


Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Hányféleképpen lehet **13-3=10 nem doppingoló játékos** közül **két különbözőt** választani?

$$\frac{10\cdot 9}{2} = \binom{10}{2} = 45$$

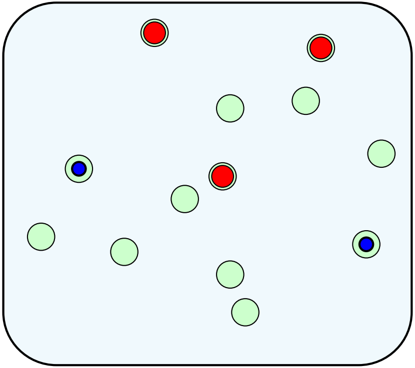
$\binom{13}{2} = 78$ egyformán valószínű eset van



Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Annak valószínűsége, hogy a **két játékos** egyike sem doppingol:

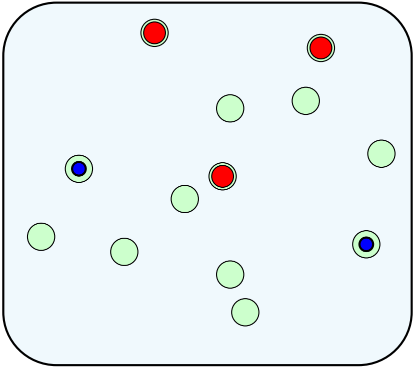
$\binom{13}{2} = 78$
egyformán
valószínű
eset van



Visszatevés nélküli mintavétel: példa

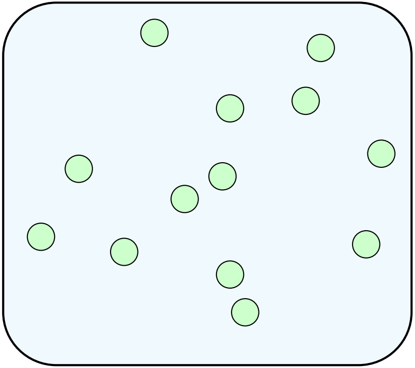
$$\begin{array}{rl} \text{egyik sem doppingol} \longrightarrow & \binom{10}{2} \\ \text{összes eset} \longrightarrow & \overline{\binom{13}{2}} \end{array} = \frac{45}{78} = 57,7\%.$$

$\binom{13}{2} = 78$
egyformán
valószínű
eset van



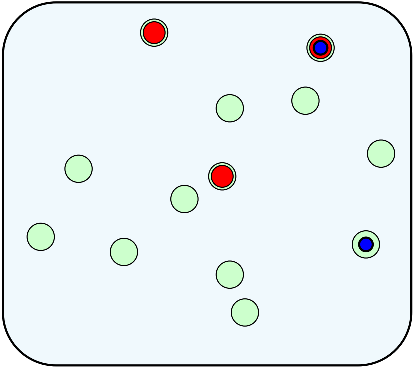
Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Egy vízilabdacsapat **13 tagja** közül **három játékos** doppingol. A doppingtesztre kiválasztanak **két különböző** játékost, minden lehetséges párt azonos valószínűséggel választva.



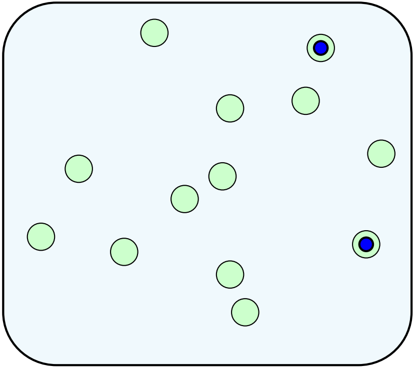
Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Egy vízilabdacsapat **13 tagja** közül **három játékos** doppingol.
A doppingtesztre kiválasztanak **két különböző** játékost,
minden lehetséges párt azonos valószínűséggel választva.
Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott játékosok közül
pontosan egy doppingol?



Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Hányféleképpen lehet **13 játékos** közül **két különbözőt** választani?

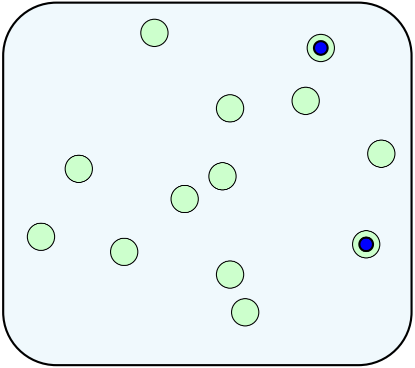


Visszatevés nélküli mintavétel: példa

első második

$$\frac{13 \cdot 12}{2} = \binom{13}{2} = 78$$

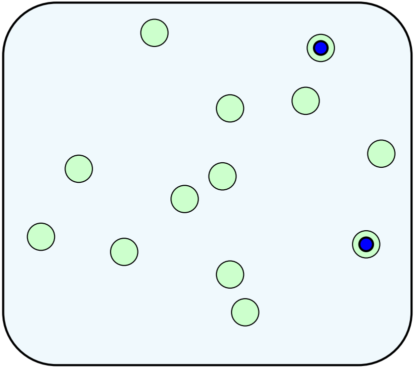
a sorrend nem számít



Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Hányféleképpen lehet **egy doppingoló** és **egy nem doppingoló** játékost választani?

$\binom{13}{2} = 78$
egyformán
valószínű
eset van

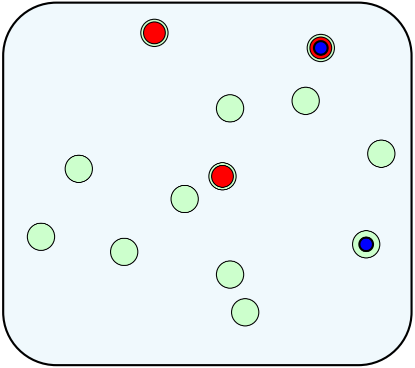


Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Hányféleképpen lehet egy doppingoló és egy nem doppingoló játékost választani?

$$3 \cdot 10 = 30$$

$\binom{13}{2} = 78$ egyformán valószínű eset van



Visszatevés nélküli mintavétel: példa

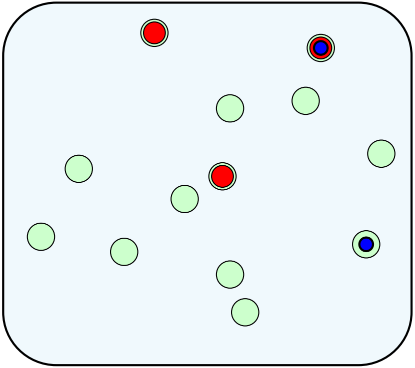
Hányféleképpen lehet **egy doppingoló** és **egy nem doppingoló** játékost választani?

$$3 \cdot 10 = 30$$

a doppingoló **háromféle**, a másik **tízféle** lehet

ezek mind különböző esetek

$\binom{13}{2} = 78$
egyformán
valószínű
eset van

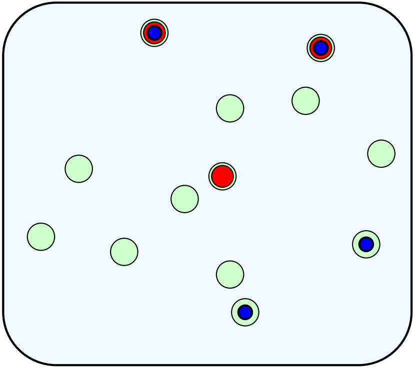


Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Annak valószínűsége, hogy a **két játékos** közül
pontosan egy doppingol:

$$\begin{array}{rl} \textbf{egyik igen, másik nem} \longrightarrow & \dfrac{3 \cdot 10}{\binom{13}{2}} = \dfrac{30}{78} = 38,5\%. \\ \text{összes eset} \longrightarrow & \end{array}$$

$\binom{13}{2} = 78$
egyformán
valószínű
eset van



Visszatevés nélküli mintavétel: példa

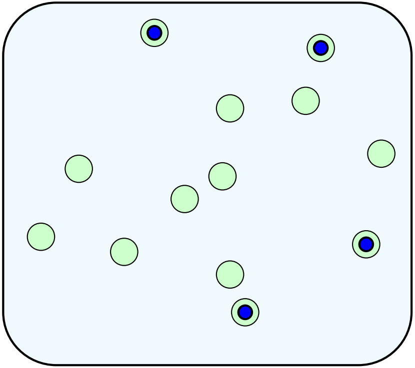
Annak valószínűsége, hogy a **két játékos** közül **pontosan egy** doppingol:

egyik igen, másik nem $\longrightarrow$ $\dfrac{3 \cdot 10}{\binom{13}{2}} = \dfrac{30}{78} = 38,5\%.$

összes eset $\longrightarrow$

mindkettő doppingol: $100 - 57,7 - 38,5 = 3,8\%$

$\binom{13}{2} = 78$
egyformán valószínű eset van



Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Egy vízilabdacsapat N **tagja** közül

Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Egy vízilabdacsapat N **tagja** közül M **játékos** doppingol.

Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Egy vízilabdacsapat N **tagja** közül M **játékos** doppingol.
A doppingtesztre kiválasztanak n **különböző** játékost,
minden lehetséges csoportot azonos valószínűséggel választva.

Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Egy vízilabdacsapat N **tagja** közül M **játékos** doppingol. A doppingtesztre kiválasztanak n **különböző** játékost, minden lehetséges csoportot azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott játékosok közül **pontosan** k doppingol?

Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Hányféleképpen lehet N **játékos** közül n **különbözőt** választani?

Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Hányféleképpen lehet N **játékos** közül n **különbözőt** választani?

első második $n.$

$$\frac{N\cdot(N-1)\cdot\ldots\cdot(N-n+1)}{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1} = \frac{N!}{n!(N-n)!} = \binom{N}{n}$$

a sorrend nem számít

Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Hányféleképpen lehet N **játékos** közül n **különbözőt** választani?

első második $n.$

$$\frac{N\cdot(N-1)\cdot\ldots\cdot(N-n+1)}{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1} = \frac{N!}{n!(N-n)!} = \binom{N}{n}$$

a sorrend nem számít

Hányféleképpen lehet k **doppingoló** és $n-k$ **nem doppingoló** játékost választani, ha összesen M **doppingoló** és $N-M$ **nem doppingoló** játékos van?

Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Hányféleképpen lehet N **játékos** közül n **különbözőt** választani?

első második $n.$

$$\frac{N\cdot(N-1)\cdot\ldots\cdot(N-n+1)}{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot1} = \frac{N!}{n!(N-n)!} = \binom{N}{n}$$

a sorrend nem számít

Hányféleképpen lehet k **doppingoló** és $n-k$ **nem doppingoló** játékost választani, ha összesen M **doppingoló** és $N-M$ **nem doppingoló** játékos van?

$$\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}$$

doppingolók nem doppingolók

Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Hányféleképpen lehet N **játékos** közül n **különbözőt** választani?

$$\frac{\overset{\text{első}}{N}\cdot(\overset{\text{második}}{N}-1)\cdot\ldots\cdot(N-\overset{n.}{n}+1)}{\underset{\text{a sorrend nem számít}}{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1}}=\frac{N!}{n!(N-n)!}=\binom{N}{n}$$

Hányféleképpen lehet k **doppingoló** és $n-k$ **nem doppingoló** játékost választani, ha összesen M **doppingoló** és $N-M$ **nem doppingoló** játékos van?

$$\underset{\text{doppingolók}}{\binom{M}{k}}\cdot\underset{\text{nem doppingolók}}{\binom{N-M}{n-k}}$$

bármelyik csoport bármelyikkel párosítható és különböző esetet ad, ezért lehet szorozni

Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Hányféleképpen lehet N **játékos** közül n **különbözőt** választani?

első második $n.$

$$\frac{N\cdot(N-1)\cdot\ldots\cdot(N-n+1)}{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1} = \frac{N!}{n!(N-n)!} = \binom{N}{n}$$

a sorrend nem számít

Hányféleképpen lehet k **doppingoló** és $n-k$ **nem doppingoló** játékost választani, ha összesen M **doppingoló** és $N-M$ **nem doppingoló** játékos van?

$$\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}$$

doppingolók nem doppingolók

bármelyik csoport bármelyikkel párosítható és különböző esetet ad, ezért lehet szorozni

$$\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ játékos doppingol az } n \text{ közül}) = \frac{\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Visszatevés nélküli mintavétel

- Egy dobozban N golyó van, közülük M **fekete**, a többi **fehér**.

Visszatevés nélküli mintavétel

- Egy dobozban N golyó van, közülük M **fekete**, a többi **fehér**.
- **Visszatevés nélkül** kihúznak n darabot (minden húzásnál minden, még a dobozban lévő golyót azonos valószínűséggel választva).

Visszatevés nélküli mintavétel

- Egy dobozban N golyó van, közülük M **fekete**, a többi **fehér**.
- **Visszatevés nélkül** kihúznak n darabot (minden húzásnál minden, még a dobozban lévő golyót azonos valószínűséggel választva).
- Tegyük fel, hogy $n \leq M$ és $n \leq N - M$. Annak valószínűsége, hogy pontosan k darab fekete golyót húznak ki:

Visszatevés nélküli mintavétel

- Egy dobozban N golyó van, közülük M **fekete**, a többi **fehér**.
- **Visszatevés nélkül** kihúznak n darabot (minden húzásnál minden, még a dobozban lévő golyót azonos valószínűséggel választva).
- Tegyük fel, hogy $n \leq M$ és $n \leq N - M$. Annak valószínűsége, hogy pontosan k darab fekete golyót húznak ki:

$$\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ fekete}) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Megjegyzés: a kihúzott fekete golyók száma **hipergeometrikus eloszlású.**

Mivel az $\binom{N}{n}$ lehetséges eset mindegyike egyformán valószínű, a **klasszikus valószínűségi mező** modelljét használtuk.

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van.

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van. Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik, minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét azonos valószínűséggel választva.

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van. Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik, minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt**
pontosan négyszer iszik kék bögréből?

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van.
Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik,
minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét
azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt**
pontosan négyszer iszik kék bögréből?

az **összes lehetőség** száma:

5

az első napon ötféle lehetőség van

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van.
Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik,
minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét
azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt**
pontosan négyszer iszik kék bögréből?

az **összes lehetőség** száma:

5 5

az első két napon $5 \cdot 5 = 25$-féle lehetőség van
bármelyik bögre bármelyikkel választható, lehet szorozni
a bögrék különbözők
ezek az esetek egyformán valószínűek

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van.
Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik,
minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét
azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt**
pontosan négyszer iszik kék bögréből?

az **összes lehetőség** száma:

5 5 5

az első három napon $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$-féle lehetőség van
bármelyik bögre bármelyikkel választható, lehet szorozni
a bögrék különbözők
ezek az esetek egyformán valószínűek

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van.
Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik,
minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét
azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt**
pontosan négyszer iszik kék bögréből?

az **összes lehetőség** száma:

$$5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \longrightarrow \boxed{5^7}$$

összesen 5^7 egyformán valószínű lehetőség van egy hét alatt
bármelyik bögre bármelyikkel választható, lehet szorozni
a bögrék különbözők
ezek az esetek egyformán valószínűek

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van.
Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik,
minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét
azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt**
pontosan négyszer iszik kék bögréből?

5^7 egyformán valószínű lehetőség

jó lehetőség például, amikor első négy nap iszik kék bögréből:

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van.
Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik, minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt pontosan négyszer iszik kék bögréből?**

5^7 egyformán valószínű lehetőség

jó lehetőség például, amikor első négy nap iszik kék bögréből:

3 3 3 3 2 2 2

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van.
Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik, minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt** **pontosan négyszer iszik kék bögréből?**

5^7 egyformán valószínű lehetőség

jó lehetőség például, amikor első négy nap iszik kék bögréből:

3 3 3 3 2 2 2 $\longrightarrow$ $\boxed{3^4 \cdot 2^3}$

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 3^4 \cdot 2^3$ ilyen lehetőség van
bármelyik bögre bármelyikkel választható, lehet szorozni
a bögrék különbözők

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van.
Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik,
minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét
azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt**
pontosan négyszer iszik kék bögréből?

5^7 egyformán valószínű lehetőség

egy másik jó sorrend, ha az $1., 3., 4., 6.$ napon iszik kék bögréből:

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van.
Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik,
minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét
azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt pontosan négyszer iszik kék bögréből?**

5^7 egyformán valószínű lehetőség

egy másik jó sorrend, ha az $1., 3., 4., 6.$ napon iszik kék bögréből:

3 2 3 3 2 3 2

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van.
Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik,
minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét
azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt**
pontosan négyszer iszik kék bögréből?

5^7 egyformán valószínű lehetőség

egy másik jó sorrend, ha az $1., 3., 4., 6.$ napon iszik kék bögréből:

$$3 \quad 2 \quad 3 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \quad 2 \longrightarrow \boxed{3^4 \cdot 2^3}$$

$3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 3^4 \cdot 2^3$ ilyen lehetőség van
bármelyik bögre bármelyikkel választható, lehet szorozni
a bögrék különbözők

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van.
Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik,
minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét
azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt pontosan négyszer iszik kék bögréből?**

5^7 egyformán valószínű lehetőség

jó lehetőségek száma:

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van. Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik, minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt pontosan négyszer iszik kék bögréből?**

5^7 egyformán valószínű lehetőség

jó lehetőségek száma:

színezések száma

lehetőségek száma adott színezésnél

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van. Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik, minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt pontosan négyszer iszik kék bögréből?**

5^7 egyformán valószínű lehetőség

jó lehetőségek száma:

színezések száma $\times$ lehetőségek száma adott színezésnél

$$\boxed{\binom{7}{4}} \times \boxed{3^4 \cdot 2^3} = 35 \cdot 3^4 \cdot 2^3$$

ennyiféleképpen választhatjuk ki a négy kék napot a hétből

minden színezéshez ugyanannyi lehetőség tartozik

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van. Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik, minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt pontosan négyszer iszik kék bögréből?**

5^7 egyformán valószínű lehetőség

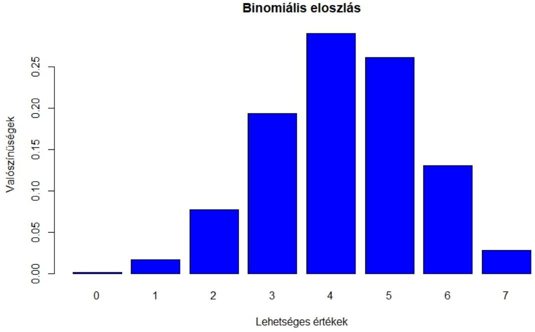
$$\mathbb{P}(\text{pontosan négyszer iszik kék bögréből}) = \frac{\binom{7}{4} \cdot 3^4 \cdot 2^3}{5^7},$$

azaz $\frac{35 \cdot 81 \cdot 8}{78125} = 29,03\%.$

Példa: visszatevéses mintavétel

3 kék, 2 zöld bögre, Péter hét napon át találomra választ.

$$\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ kék}) = \frac{\binom{7}{k} \cdot 3^k \cdot 2^{7-k}}{5^7}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, 7.$$



A kék bögrés napok száma: lehetséges értékek és valószínűségek

Visszatevéses mintavétel

- Egy dobozban N golyó van, közülük M fekete, a többi fehér.
- **Visszatevéssel** kihúznak n darabot, minden húzásnál a korábbiakat elfelejtve mind az N golyót azonos valószínűséggel választva.
- Annak valószínűsége, hogy az n húzás közül pontosan k-nál jön fekete:

Visszatevéses mintavétel

- Egy dobozban N golyó van, közülük M fekete, a többi fehér.
- **Visszatevéssel** kihúznak n darabot, minden húzásnál a korábbiakat elfelejtve mind az N golyót azonos valószínűséggel választva.
- Annak valószínűsége, hogy az n húzás közül pontosan k-nál jön fekete:

$$\boxed{\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ fekete}) = \binom{n}{k}\frac{M^k\cdot(N-M)^{n-k}}{N^n} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n).}$$

Visszatevéses mintavétel

- Egy dobozban N golyó van, közülük M fekete, a többi fehér.
- **Visszatevéssel** kihúznak n darabot, minden húzásnál a korábbiakat elfelejtve mind az N golyót azonos valószínűséggel választva.
- Annak valószínűsége, hogy az n húzás közül pontosan k-nál jön fekete:

melyik feketéket húztunk (k húzás)

melyik k húzás fekete

melyik fehéreket húztuk ($n-k$ húzás)

$$\boxed{\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ fekete}) = \binom{n}{k}\frac{M^k \cdot (N-M)^{n-k}}{N^n} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n).}$$

összes lehetőség

Visszatevéses mintavétel

- Egy dobozban N golyó van, közülük M fekete, a többi fehér.
- **Visszatevéssel** kihúznak n darabot, minden húzásnál a korábbiakat elfelejtve mind az N golyót azonos valószínűséggel választva.
- Annak valószínűsége, hogy az n húzás közül pontosan k-nál jön fekete:

melyik feketéket húztunk (k húzás)

melyik k húzás fekete

melyik fehéreket húztuk ($n-k$ húzás)

$$\boxed{\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ fekete}) = \binom{n}{k}\frac{M^k \cdot (N-M)^{n-k}}{N^n} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n).}$$

összes lehetőség

Megjegyzés: a kihúzott fekete golyók száma **binomiális eloszlású**.

Visszatevéses mintavétel: példa

Egy osztályba **14 lány** és **22 fiú** jár.

Visszatevéses mintavétel: példa

Egy osztályba **14 lány** és **22 fiú** jár.
A tanár minden fizikaórán kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal a korábbiakat elfelejtve, és mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet).

Visszatevéses mintavétel: példa

Egy osztályba **14 lány** és **22 fiú** jár.

A tanár minden fizikaórán kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal a korábbiakat elfelejtve, és mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet).

Visszatevéses mintavétel: példa

Egy osztályba **14 lány** és **22 fiú** jár.
A tanár minden fizikaórán kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal a korábbiakat elfelejtve, és mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet).

Mennyi a valószínűsége, hogy **hat egymást követő órán** **pontosan két lány** felel?

Visszatevéses mintavétel: példa

Egy osztályba **14 lány** és **22 fiú** jár. $\boxed{N = 36 \text{ a diákok száma}}$

A tanár minden fizikaórán kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal a korábbiakat elfelejtve, és mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet).

Mennyi a valószínűsége, hogy **hat egymást követő órán** **pontosan két lány** felel?

Visszatevéses mintavétel: példa

$M = 14$ a lányok száma

$N = 36$ a diákok száma

Egy osztályba **14 lány** és **22 fiú** jár.
A tanár minden fizikaórán kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal a korábbiakat elfelejtve, és mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet).

Mennyi a valószínűsége, hogy **hat egymást követő órán** **pontosan két lány** felel?

Visszatevéses mintavétel: példa

$M = 14$ a lányok száma

$N = 36$ a diákok száma

Egy osztályba **14 lány** és **22 fiú** jár.

A tanár minden fizikaórán kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal a korábbiakat elfelejtve, és mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet).

$n = 6$ a minta nagysága

Mennyi a valószínűsége, hogy **hat egymást követő órán pontosan két lány** felel?

Visszatevéses mintavétel: példa

$M = 14$ a lányok száma

$N = 36$ a diákok száma

Egy osztályba **14 lány** és **22 fiú** jár.

A tanár minden fizikaórán kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal a korábbiakat elfelejtve, és mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet).

$n = 6$ a minta nagysága

Mennyi a valószínűsége, hogy **hat egymást követő órán** **pontosan két lány** felel?

$k = 2$ a kérdés $\longleftarrow$

Visszatevéses mintavétel: példa

$M = 14$ a lányok száma

Egy osztályba **14 lány** és **22 fiú** jár. $\longrightarrow$ $N = 36$ a diákok száma

A tanár minden fizikaórán kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal a korábbiakat elfelejtve, és mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet).

$n = 6$ a minta nagysága

Mennyi a valószínűsége, hogy **hat egymást követő órán**

$k = 2$ a kérdés $\longleftarrow$ **pontosan két lány** felel?

$$\boxed{\mathbb{P}(\text{pontosan két lány}) = \binom{n}{k}\frac{M^k \cdot (N-M)^{n-k}}{N^n} = \binom{6}{2}\frac{14^2 \cdot 22^4}{36^6} = 31,6\%.}$$

Visszatevéses mintavétel: példa

$M = 14$ a lányok száma

Egy osztályba **14 lány** és **22 fiú** jár.

$N = 36$ a diákok száma

A tanár minden fizikaórán kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal a korábbiakat elfelejtve, és mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet).

$n = 6$ a minta nagysága

Mennyi a valószínűsége, hogy **hat egymást követő órán** **pontosan két lány** felel?

$k = 2$ a kérdés

lányok kiválasztása fiúk kiválasztása

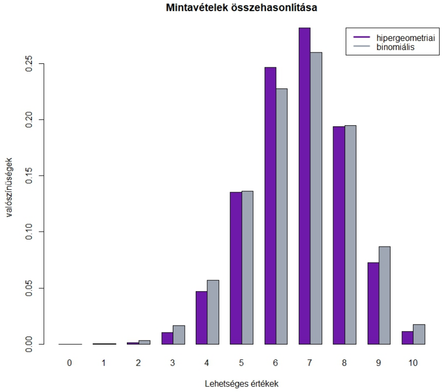
$$\mathbb{P}(\text{pontosan két lány}) = \binom{n}{k} \frac{M^k \cdot (N-M)^{n-k}}{N^n} = \binom{6}{2} \frac{14^2 \cdot 22^4}{36^6} = 31,6\%.$$

összes eset

melyik két órán felel lány

szorzás: bármely felelő bármely másikkal választható

Mintavételek összehasonlítása



Visszatevés nélküli mintavétel (hipergeometriai eloszlás) és visszatevéses mintavétel (binomiális eloszlás) összehasonlítása $N = 60, M = 40, n = 10$ esetén; ha N még nagyobb lenne n-hez képest, még jobban hasonlítana a két eloszlás