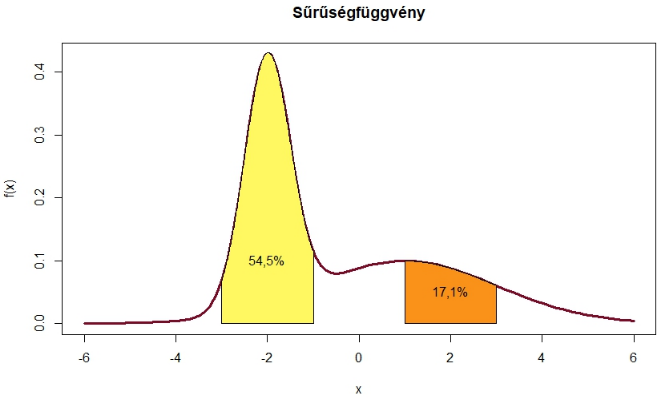
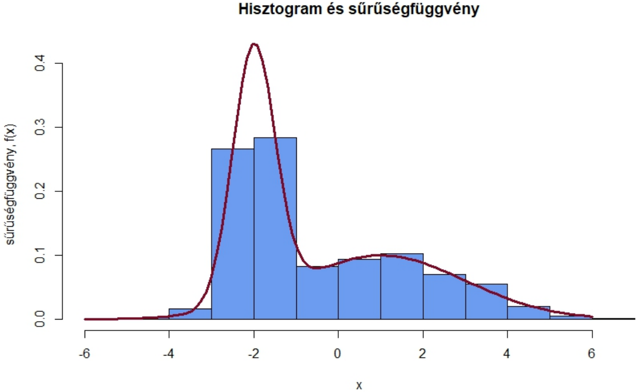
Sűrűségfüggvény



Ha X sűrűségfüggvénye f (ami most az ábrán látható függvény): $\mathbb{P}(-3 \leq X \leq -1) = \int_{-3}^{-1} f(x)dx = 54,5\%$;

$\mathbb{P}(1 \leq X \leq 3) = \int_{1}^{3} f(x)dx = 17,1\%$.

Sűrűségfüggvény



Egy sűrűségfüggvény és hozzá tartozó ezer elemű független minta hisztogramja; nagyobb a sűrűségfüggvény $\rightarrow$ nagyobb a gyakoriság;
minta: független valószínűségi változók, melyek mindegyikének f a sűrűségfüggvénye

Sűrűségfüggvény: definíció

Az $X : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változó **sűrűségfüggvénye** az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, ha

$$\mathbb{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$$

teljesül minden $t \in \mathbb{R}$ számra.

Nem minden valószínűségi változónak van sűrűségfüggvénye, például a diszkréteknek nincs. Ha X-nek **van sűrűségfüggvénye**, akkor **abszolút folytonos** valószínűségi változónak nevezzük.

Ha az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye f, akkor tetszőleges $a < b$ számokra

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

A sűrűségfüggvény tulajdonságai

Legyen X abszolút folytonos valószínűségi változó, melynek F az eloszlásfüggvénye. (a) Ha f az X sűrűségfüggvénye, akkor minden $t \in \mathbb{R}$ számra

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\, dx.$$

(b) Az $f(t) = F'(t)$ függvény (azokra a t-kre, ahol F differenciálható) az X sűrűségfüggvénye.

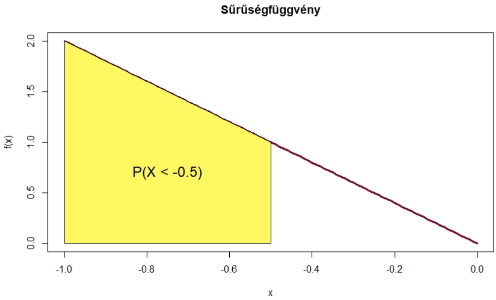
Ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény sűrűségfüggvény, akkor

(i) $f(x) \geq 0$ teljesül „majdnem minden” $x \in \mathbb{R}$-re (például véges vagy megszámlálható sok kivétel lehetséges).

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1.$

Fordítva: ha f teljesíti ezt a két tulajdonságot, akkor van olyan valószínűségi változó, aminek f a sűrűségfüggvénye.

Sűrűségfüggvény: példa



Ha X sűrűségfüggvénye f, akkor

$$F(-1/2) = \mathbb{P}(X \leq -1/2) = \int_{-\infty}^{-1/2} f(x)\, dx.$$

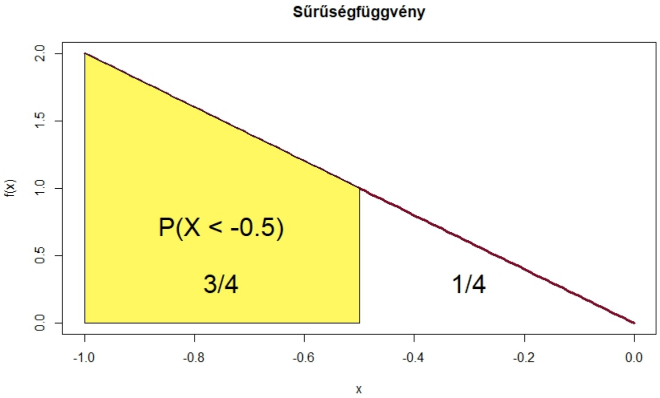
Sűrűségfüggvény: példa

Legyen az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x) = 2|x|$, ha $-1 < x < 0$, és 0 különben. Mennyi X eloszlásfüggvényének értéke a $-1/2$ helyen?

Felhasználva az **eloszlásfüggvény** és a **sűrűségfüggvény** definícióját, illetve hogy $x \leq -1$ esetén $f(x) = 0$, azt kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
F(-1/2) = \mathbb{P}(X \leq -1/2) &= \int_{-\infty}^{-1/2} f(x)dx = \int_{-1}^{-1/2} f(x)dx = \\
&= \int_{-1}^{-1/2} 2|x|\,dx = -\int_{-1}^{-1/2} 2x\,dx = -\left[x^2\right]_{x=-1}^{x=-1/2} = \\
&= -\left(\frac{1}{4} - 1\right) = \frac{3}{4}.
\end{aligned}
$$

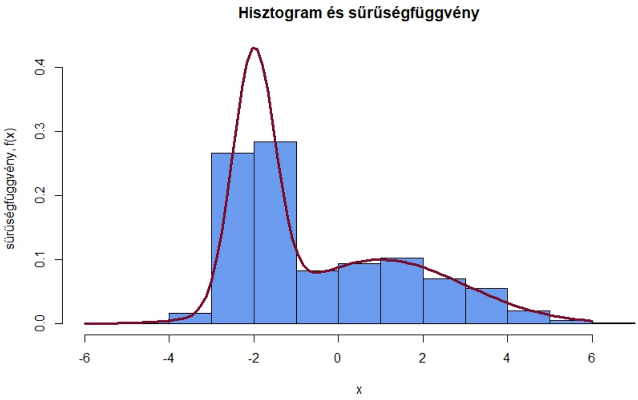
Sűrűségfüggvény: példa



Ha X sűrűségfüggvénye f, akkor

$$F(-1/2) = \mathbb{P}(X \leq -1/2) = \int_{-\infty}^{-1/2} f(x)\,dx = \frac{3}{4}.$$

Sűrűségfüggvény



Egy sűrűségfüggvény és hozzá tartozó ezer elemű független minta hisztogramja – mennyi lehet az f sűrűségfüggvényű valószínűségi változó **várható értéke** és **szórása**?

Diszkrét és abszolút folytonos eset

A **várható értéket** olyan formában nem tudjuk definiálni abszolút folytonos eloszlásokra, mint diszkrét esetben, hiszen $\mathbb{P}(X = x) = 0$ minden x-re. Helyette:

diszkrét

X lehetséges értékei: $x_1, x_2, \ldots$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \cdot \mathbb{P}(X = x_j)}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X^2) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 \cdot \mathbb{P}(X = x_j)}$$

abszolút folytonos

X sűrűségfüggvénye: f.

Diszkrét és abszolút folytonos eset

A **várható értéket** olyan formában nem tudjuk definiálni abszolút folytonos eloszlásokra, mint diszkrét esetben, hiszen $\mathbb{P}(X = x) = 0$ minden x-re. Helyette:

diszkrét

X lehetséges értékei: $x_1, x_2, \ldots$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \cdot \mathbb{P}(X = x_j)}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X^2) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 \cdot \mathbb{P}(X = x_j)}$$

abszolút folytonos

X sűrűségfüggvénye: f.

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\, dx}$$

Diszkrét és abszolút folytonos eset

A **várható értéket** olyan formában nem tudjuk definiálni abszolút folytonos eloszlásokra, mint diszkrét esetben, hiszen $\mathbb{P}(X = x) = 0$ minden x-re. Helyette:

diszkrét

X lehetséges értékei: $x_1, x_2, \ldots$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \cdot \mathbb{P}(X = x_j)}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X^2) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 \cdot \mathbb{P}(X = x_j)}$$

abszolút folytonos

X sűrűségfüggvénye: f.

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\, dx}$$

$$\boxed{D(X) = \sqrt{\mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))^2\big)} = \sqrt{\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2}}$$

Diszkrét és abszolút folytonos eset

A **várható értéket** olyan formában nem tudjuk definiálni abszolút folytonos eloszlásokra, mint diszkrét esetben, hiszen $\mathbb{P}(X = x) = 0$ minden x-re. Helyette:

diszkrét

X lehetséges értékei: $x_1, x_2, \ldots$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \cdot \mathbb{P}(X = x_j)}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X^2) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 \cdot \mathbb{P}(X = x_j)}$$

abszolút folytonos

X sűrűségfüggvénye: f.

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\, dx}$$

$$\boxed{D(X) = \sqrt{\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)} = \sqrt{\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2}}$$

$$\mathbb{E}(X^k) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^k \cdot \mathbb{P}(X = x_j) \qquad \mathbb{E}(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\, dx$$

$$\boxed{\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{j=1}^{\infty} g(x_j) \cdot \mathbb{P}(X = x_j)} \qquad \boxed{\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\, dx}$$

Várható érték és szórás abszolút folytonos esetben

Legyen X abszolút folytonos valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye f. Ekkor X **várható értéke**:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx,$$

ha ez az integrál létezik és véges.

Tegyük fel, hogy az X valószínűségi változó abszolút folytonos, sűrűségfüggvénye f, és $\mathbb{E}(X^2)$ létezik, azaz az $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx$ integrál véges. Ekkor X **szórásnégyzete**:

$$D^2(X) = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))^2\big) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2,$$

szórása pedig

$$D(X) = \sqrt{\mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))^2\big)} = \sqrt{\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2}.$$

A szórás definíciója megegyezik a diszkrét esetben használttal.

Az egyenletes eloszlás várható értéke

Az $[a, b]$ intervallumon egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénye:

$$f(s) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } a \leq s \leq b; \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Ha X egyenletes eloszlású az $[a, b]$ intervallumon, akkor várható értéke

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} s \cdot f(s) ds = \int_a^b s \cdot \frac{1}{b-a} ds = \frac{1}{b-a} \left[\frac{s^2}{2} \right]_{s=a}^{b} =$$
$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{a+b}{2},$$

hiszen az x függvény primitív függvénye $\frac{x^2}{2}$, és $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$.

Momentumok

Az X valószínűségi változók **k. momentuma** a k. hatványának várható értéke:

$$\mathbb{E}(X^k).$$

Általában igaz, hogy ha X abszolút folytonos valószínűségi változó, f a sűrűségfüggvénye, és $\mathbb{E}(g(X))$ létezik, akkor

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx.$$

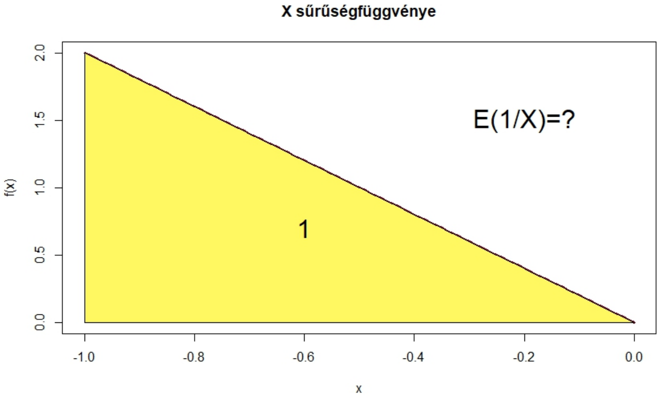
Ezért a k. momentum kiszámítása:

$$\mathbb{E}(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\,dx.$$

Következmény: a **szórásnégyzetet** a következőképpen számíthatjuk ki abszolút folytonos X valószínűségi változó esetén:

$$D^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \left[\mathbb{E}(X)\right]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \left[\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx\right]^2.$$

Várható érték abszolút folytonos esetben: példa



Várható érték abszolút folytonos esetben: példa

Legyen az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x) = 2|x|$, ha $-1 < x < 0$, és 0 különben. Mennyi az $1/X$ valószínűségi változó várható értéke?

Mivel X sűrűségfüggvénye azonosan 0, ha $x > 0$, ezért $X < 0$ és $1/X < 0$ biztosan teljesül. Így $\mathbb{E}(X) < 0$ teljesülni fog.

Pontosabban, mivel

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\, dx,$$

a $g(x) = 1/x$ függvénnyel:

$$\mathbb{E}(1/X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} \cdot f(x)\, dx = \int_{-1}^{0} \frac{2|x|}{x}\, dx = \int_{-1}^{0} (-2)\ dx = -2.$$

Várható érték abszolút folytonos esetben: példa

Tegyük fel, hogy a holnap hulló csapadék mennyiségének sűrűségfüggvénye az alábbi:

$$f(x) = \begin{cases} 0,2, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1; \\ 0,4, & \text{ha } 1 < x \leq 3; \\ 0 & \text{ha } x < 0 \text{ vagy } x > 2. \end{cases}$$

Jelölje a csapadékmennyiséget X. A csapadékmennyiség **várható értéke**:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx = \int_0^1 x \cdot 0,2 dx + \int_1^3 x \cdot 0,4 dx =$$
$$= 0,2 \cdot \left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) + 0,4 \cdot \left(\frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right) = 1,7.$$

Szórás abszolút folytonos esetben: példa

Tegyük fel, hogy a holnap hulló csapadék mennyiségének sűrűségfüggvénye az alábbi:

$$f(x) = \begin{cases} 0,2, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1; \\ 0,4, & \text{ha } 1 < x \leq 3; \\ 0 & \text{ha } x < 0 \text{ vagy } x > 2. \end{cases}$$

Már láttuk, hogy $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = 1,7$.

A csapadékmennyiség négyzetének várható értéke:

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,ds = \int_0^1 x^2 \cdot 0,2\,dx + \int_1^3 x^2 \cdot 0,4\,dx =$$

$$= 0,2 \cdot \left(\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) + 0,4 \cdot \left(\frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right) = 3,53.$$

Ez alapján a csapadékmennyiség szórása:

$$D(X) = \sqrt{\mathbb{E}(X^2) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2} = \sqrt{3,53 - 1,7^2} = 0,8.$$

Az egyenletes eloszlás várható értéke

Az $[a, b]$ intervallumon egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénye:

$$f(s) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } a \leq s \leq b; \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Ha X egyenletes eloszlású az $[a, b]$ intervallumon, akkor várható értéke

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} s \cdot f(s) ds = \int_a^b s \cdot \frac{1}{b-a} ds = \frac{1}{b-a} \left[\frac{s^2}{2} \right]_{s=a}^{b} =$$
$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{a+b}{2},$$

hiszen az x függvény primitív függvénye $\frac{x^2}{2}$, és $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$.

Az egyenletes eloszlás szórása

Az $[a, b]$ intervallumon egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénye:

$$f(s) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } a \leq s \leq b; \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Ha X egyenletes eloszlású az $[a, b]$ intervallumon, akkor várható értéke

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} s^2 \cdot f(s) ds = \int_a^b s^2 \cdot \frac{1}{b-a} ds = \frac{1}{b-a} \left[\frac{s^3}{3} \right]_{s=a}^{b}$$
$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^3 - a^3}{3} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3},$$

hiszen az x^2 függvény primitív függvénye $\frac{x^3}{3}$, és $b^3 - a^3 = (b-a)(a^2 + ab + b^2)$.

Az egyenletes eloszlás szórása

Az $[a, b]$ intervallumon egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénye:

$$f(s) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } a \le s \le b; \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Ha X egyenletes eloszlású az $[a, b]$ intervallumon, akkor várható értéke

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} s^2 \cdot f(s) ds = \int_a^b s^2 \cdot \frac{1}{b-a} ds = \frac{1}{b-a} \left[\frac{s^3}{3} \right]_{s=a}^{b}$$
$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^3 - a^3}{3} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3},$$

hiszen az x^2 függvény primitív függvénye $\frac{x^3}{3}$, és $b^3 - a^3 = (b-a)(a^2 + ab + b^2)$.

$$D^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2$$
$$= \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Egyenletes eloszlás (uniform distribution)

Az X valószínűségi változó **egyenletes eloszlású** az $[a, b]$ intervallumon, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } a \le x \le b; \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Ekkor

(i) X eloszlásfüggvénye:

$$F(t) = \mathbb{P}(X \le t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \le a; \\ \frac{t-a}{b-a}, & \text{ha } a < t < b; \\ 1, & \text{ha } t \ge b. \end{cases}$$

(ii) Ha $a \le c \le d \le b$, akkor

$$\mathbb{P}(c \le X \le d) = \int_c^d f(x)\, dx = \int_c^d \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{d-c}{b-a}.$$

(iii) Az X valószínűségi változó **várható értéke** és **szórása**:

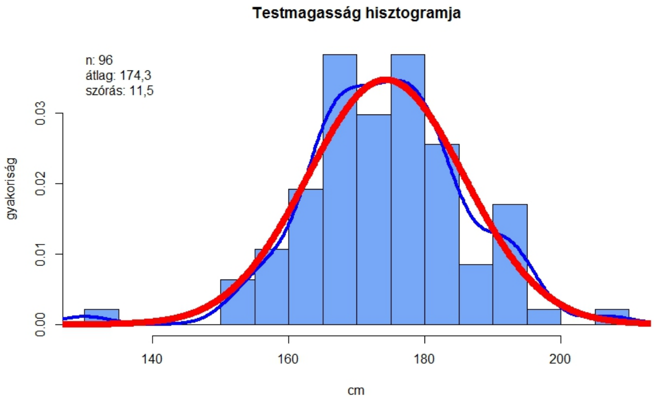
$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}; \qquad D(X) = \frac{b-a}{\sqrt{12}}.$$

Normális eloszlás: bevezetés

Ha egy, a valóságban megfigyelhető valószínűségi változó eloszlását, pontosabban a **sűrűségfüggvényét** szeretnénk meghatározni:

- az adatokból készíthetünk hisztogramot;
- a hisztogram és a sűrűségfüggvény alakja sok független megfigyelés esetén „közel” van egymáshoz;
- megfigyelhetjük, hogy különféle mennyiségek esetén a hisztogramok gyakran **hasonló alakúak** $\rightarrow$ a gyakran előforduló sűrűségfüggvény-típusokat érdemes külön megérteni;
- az egyik ilyen a **normális eloszlás**, melynek sűrűségfüggvénye az e^{-x^2} függvényből származtatható
- például különféle *mérési eredmények* (a mérési hibák következtében), illetve élőlények *biológiai jellemzői* gyakran normális eloszlást követnek (például: testmagasság)
- a normális eloszlás a **statisztikában** is kulcsfontosságú

Testmagasság



Testmagasság hisztogramja $n = 96$ elemű mintából (valós adatokból), és az $m = \overline{X} = 174,3$ várható értékű és $\sigma = 11,5$ szórású normális eloszlás sűrűségfüggvénye (pirossal): $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 11,5} \exp(-(x - 174,3)^2/(2 \cdot 11,5^2))$

Normális eloszlás: definíció

Legyen m valós, σ pedig pozitív szám. Azt mondjuk, hogy az Y valószínűségi változó **normális eloszlású** m várható értékkel és σ^2 szórásnégyzettel, ha **sűrűségfüggvénye**

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

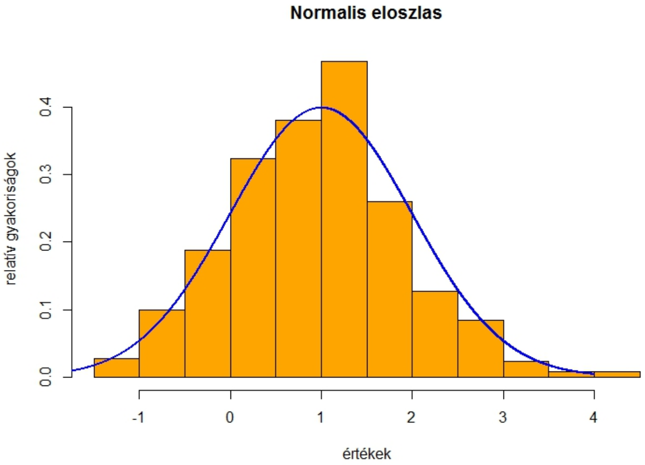
Jelölése: $Y \sim N(m, \sigma^2)$.

Ha $Y \sim N(m, \sigma^2)$, akkor $\mathbb{E}(\mathrm{Y}) = \mathrm{m}$, $\mathrm{D}(\mathrm{Y}) = \sigma$.

Standard normális eloszlás: az $m = 0$ várható értékű és $\sigma = 1$ szórású normális eloszlás. **Eloszlásfüggvénye:** Φ, sűrűségfüggvénye φ, ahol

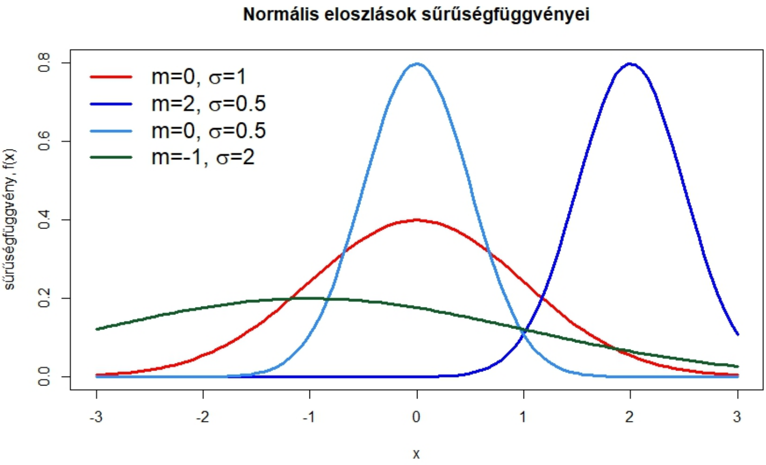
$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(x)\, dx; \qquad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2} \right).$$

Normális eloszlás



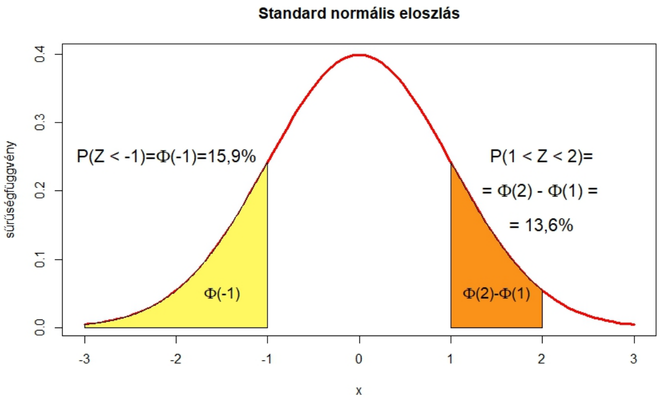
Normális eloszlás ($m = 1, \sigma = 1$) sűrűségfüggvénye és 500 darab független, $N(1, 1)$ eloszlású valószínűségi változóból álló minta hisztogramja

Normális eloszlás



Különböző várható értékű (m) és szórású (σ) normális eloszlások sűrűségfüggvényei

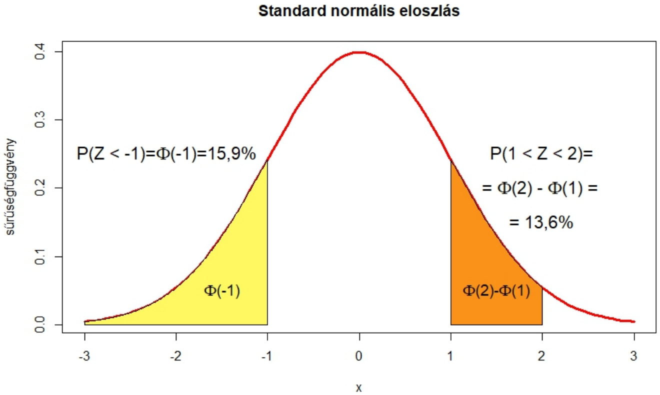
A Φ függvény



A Φ függvény a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye: ha $Z \sim N(0,1)$, akkor

$$\mathbb{P}(Z \leq t) = \Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,dx.$$

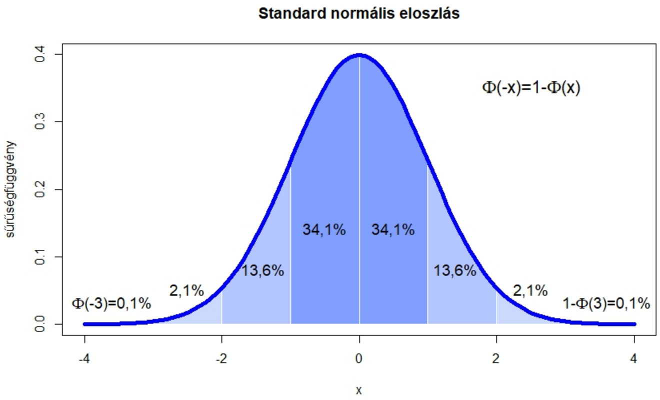
Standard normális eloszlás



A Φ függvény a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye: ha $Z \sim N(0,1)$, akkor

$$\mathbb{P}(a \leq Z \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,dx.$$

Standard normális eloszlás



A Φ függvény a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye: ha $Z \sim N(0,1)$, akkor

$$\mathbb{P}(a \leq Z \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,dx.$$

Standard normális eloszlás

A Z valószínűségi változó **standard normális eloszlású**, azaz $Z \sim N(0,1)$, ha sűrűségfüggvénye

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Ekkor **eloszlásfüggvénye** Φ, azaz

$$\Phi(t) = \mathbb{P}(Z \leq t) = \mathbb{P}(Z < t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

Továbbá

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(a < Z < b) = \mathbb{P}(a \leq Z \leq b) = \mathbb{P}(Z \leq b) - \mathbb{P}(Z < a) = \\ = \int_{a}^{b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \Phi(b) - \Phi(a).\end{aligned}$$

Más normális eloszlások esetén ezeket a valószínűségeket a Φ függvényre vezetjük vissza. A Φ függvény az R-ben: `pnorm`

A normális eloszlás tulajdonságai

Tegyük fel, hogy Y normális eloszlású m várható értékkel és σ^2 szórásnégyzettel, azaz $Y \sim N(m, \sigma^2)$. Ekkor tetszőleges $a \leq b$ valós számokra

$$\mathbb{P}(Y < b) = \mathbb{P}(Y \leq b) = \mathbb{P}\left(\frac{Y - m}{\sigma} \leq \frac{b - m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b - m}{\sigma}\right)$$

$$\mathbb{P}(Y > a) = \mathbb{P}(Y \geq a) = 1 - \Phi\left(\frac{a - m}{\sigma}\right)$$

$$\mathbb{P}(a < Y < b) = \mathbb{P}(a \leq Y \leq b) = \Phi\left(\frac{b - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - m}{\sigma}\right)$$

$$\mathbb{P}(|Y - m| \leq b) = 2\Phi\left(\frac{b}{\sigma}\right) - 1$$

Normális eloszlás: példa

Tegyük fel, hogy az Y valószínűségi változó normális eloszlású $m = 4$ várható értékkel és $\sigma = 3$ szórással. Ekkor

$$\mathbb{P}(Y \leq 7) = \Phi\left(\frac{7-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{7-4}{3}\right) = \Phi(1) = 84,1\%.$$

$$\mathbb{P}(1 < Y \leq 7) = \mathbb{P}(Y \leq 7) - \mathbb{P}(Y \leq 1) = \Phi\left(\frac{7-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{1-m}{\sigma}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{7-4}{3}\right) - \Phi\left(\frac{1-4}{3}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) =$$

$$= 2\Phi(1) - 1 = 68,2\%,$$

mert

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

minden valós x-re érvényes a sűrűségfüggvény 0-ra való szimmetriája miatt.

A normális eloszlás tulajdonságai

Lineáris transzformáció. Legyen Y normális eloszlású valószínűségi változó m várható értékkel és σ szórással, és a, b valós számok. Ekkor az $aY + b$ valószínűségi változó normális eloszlású $am + b$ várható értékkel és $a^2\sigma^2$ szórásnégyzettel, azaz

$$Y \sim N(m, \sigma^2) \qquad \Rightarrow \qquad aY + b \sim N(am + b, a^2\sigma^2).$$

Független összeg. Ha Y_1, Y_2 **független, normális eloszlású** valószínűségi változók, akkor $Y_1 + Y_2$ is **normális eloszlású**, várható értéke $m_1 + m_2$, szórásnégyzete $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$, ahol $Y_1 \sim N(m_1, \sigma_1^2)$ és $Y_2 \sim N(m_2, \sigma_2^2)$

Példa. Ha Y és Z függetlenek, normális eloszlásúak, $Y \sim N(2, 3^2)$ és $Z \sim N(1, 4^2)$, akkor

$$Y + Z \sim N(3, 5^2); \qquad Y - Z \sim N(1, 5^2); \qquad Y + 3Z \sim N(5, 57).$$

A normális eloszlás tulajdonságai

Legyenek $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ **független normális eloszlású** valószínűségi változók, melyek várható értéke m, szórásuk σ. Ekkor az **összegük** és **az átlaguk is normális eloszlású**, és

$$Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n \sim N(nm, n\sigma^2);$$

$$\frac{Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n}{n} \sim N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

A normális eloszlás tulajdonságai

Legyenek $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ **független normális eloszlású** valószínűségi változók, melyek várható értéke m, szórásuk σ. Ekkor az **összegük** és **az átlaguk is normális eloszlású**, és

$$Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n \sim N(nm, n\sigma^2);$$

$$\frac{Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n}{n} \sim N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

Példa. Tegyük fel, hogy az emberek testmagassága 176 cm várható értékű és 7 szórású valószínűségi változó. Ekkor

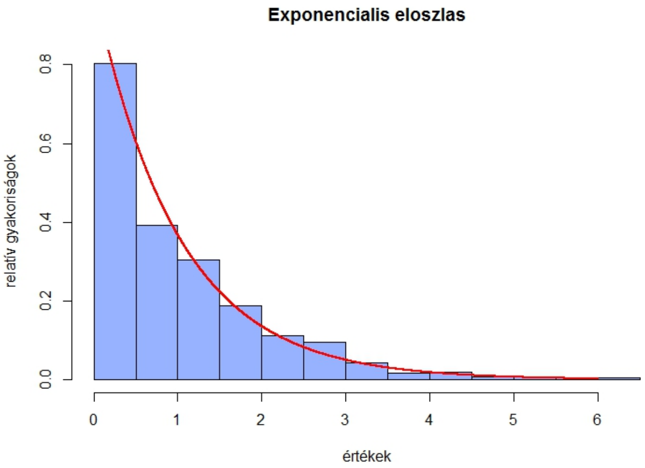
- 100 ember testmagasságának átlaga szintén normális eloszlású, 176 várható értékkel és $7/\sqrt{100} = 0,7$ szórással;
- 10000 ember testmagasságának átlaga normális eloszlású, 176 várható értékkel és $7/\sqrt{10000} = 0,07$ szórással.

Exponenciális eloszlás

Az **exponenciális eloszlás** sokszor használható véletlen időtartamok modellezésére, például

- egy művelet elvégzésének ideje: egy ember kiszolgálása egy boltban, vagy egy számítás elvégzése egy számítógépen
- egy ember reakcióideje
- két esemény bekövetkezése között eltelt idő, például egy üzletben két ügyfél érkezése közötti idő
- járványterjedés modellezésénél: a fertőzés átadásának vagy a gyógyulásnak az ideje
- radioaktív részecske bomlási ideje

Exponenciális eloszlás



$\lambda = 1$ paraméterű exponenciális eloszlás sűrűségfüggvénye és 500 darab független, 1 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változóból álló minta hisztogramja

Exponenciális eloszlás: definíció és tulajdonságok

Legyen $\lambda > 0$ valós szám. Az X valószínűségi változó **exponenciális eloszlású** λ paraméterrel, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0; \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Ekkor

(i) X eloszlásfüggvénye:

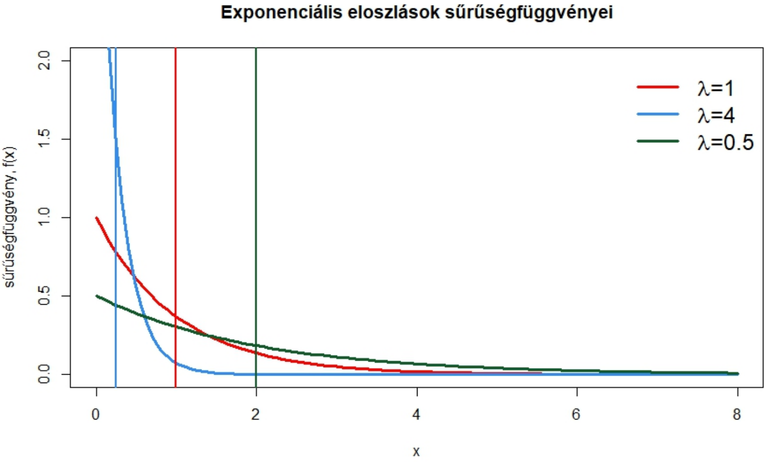
$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\, dx = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & \text{ha } t > 0; \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

(ii) X várható értéke: $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$, szórása: $\mathrm{D}(X) = \frac{1}{\lambda}$.

(iii) **Örökifjú tulajdonság.** Legyenek s, t pozitív számok. Ekkor

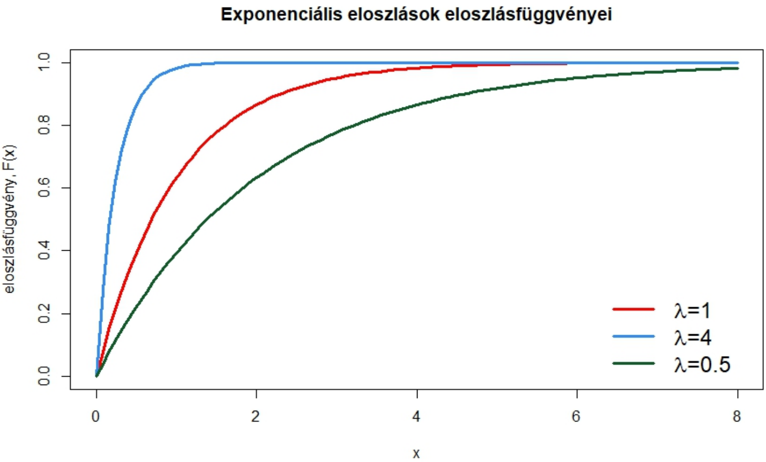
$$\mathbb{P}(X \geq s + t | X \geq s) = \mathbb{P}(X \geq t).$$

Exponenciális eloszlás



Különböző paraméterű $\left(\lambda = \frac{1}{2}, 1, \text{ illetve } 4\right)$ exponenciális eloszlások sűrűségfüggvényei és a várható értékeik: $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} = 2, 1$ illetve $\frac{1}{4}$

Exponenciális eloszlás



Különböző paraméterű $\left(\lambda = \frac{1}{2}, 1, \text{ illetve } 4\right)$ exponenciális eloszlások eloszlásfüggvényei

Az exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonsága

Állítás

Legyen X exponenciális eloszlású valószínűségi változó, s, t pozitív számok. Ekkor

$$\mathbb{P}(X \geq s + t | X \geq s) = \mathbb{P}(X \geq t).$$

Bizonyítás. A feltételes valószínűség definícióját és az exponenciális eloszlás eloszlásfüggvényének alakját felhasználva

$$\mathbb{P}(X \geq s + t | X \geq s) = \frac{\mathbb{P}(\{X \geq s + t\} \cap \{X \geq s\})}{\mathbb{P}(X \geq s)} = \frac{1 - \mathbb{P}(X < s + t)}{1 - \mathbb{P}(X < s)} =$$

$$= \frac{1 - F(s + t)}{1 - F(s)} = \frac{1 - (1 - e^{-\lambda(s+t)})}{1 - (1 - e^{-\lambda s})} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} =$$

$$= e^{-\lambda t} = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = 1 - F(t) = \mathbb{P}(X \geq t).$$

További nevezetes eloszlások

Az alábbi eloszlások többek között **statisztikai alkalmazásokban** fordulnak elő:

- Pareto-eloszlás: végtelen momentumokkal rendelkező eloszlások modellezésére (például jövedelmek, kárnagyságok)
- t-eloszlás: például két eloszlás **várható értékének** összehasonlítására
- F-eloszlás: például két eloszlás **szórásának** összehasonlítására
- χ^2-eloszlás: például annak eldöntésére, hogy két tulajdonság között van-e **összefüggés**
- gamma-eloszás: nemnegatív valószínűségi változók modellezésére
- beta-eloszlás: $[0, 1]$-értékű valószínűségi változók modellezésére

t-eloszlás

Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_f$ és Y független standard normális eloszlású valószínűségi változók. Ekkor a

$$Z = \frac{Y}{\sqrt{(X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_f^2)/f}}$$

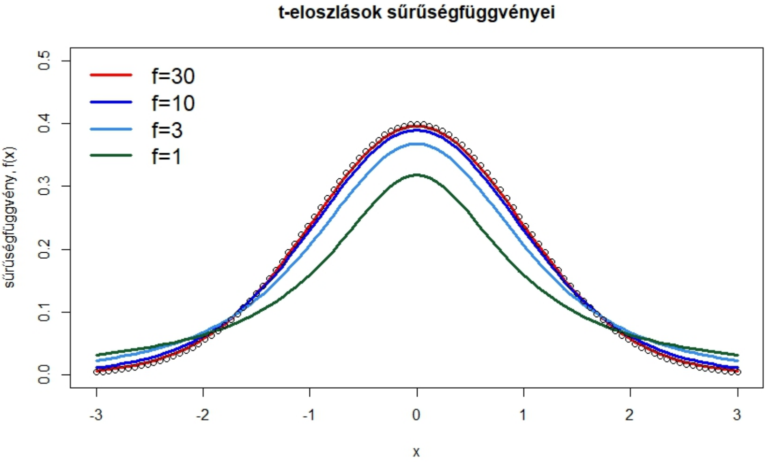
valószínűségi változó eloszlását f szabadsági fokú **t-eloszlásnak** (vagy Student-eloszlásnak) nevezzük.

Az $f = 1$ szabadsági fokú t-eloszlás, vagyis Y/X eloszlása a **Cauchy-eloszlás**. Ennek sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + x^2}.$$

A Cauchy-eloszlásnak sem várható értéke, sem szórása nem létezik: $\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx$ nem értelmezhető, mert $\int_0^{\infty} \frac{1}{x}\, dx$ integrál nem véges.

A t-eloszlás sűrűségfüggvénye



Különböző szabadsági fokú t-eloszlások sűrűségfüggvényei. A pöttyözött vonal a standard normális eloszlás sűrűségfüggvényét jelöli, ez közel van a t-eloszlás sűrűségfüggvényéhez, ha f nagy.

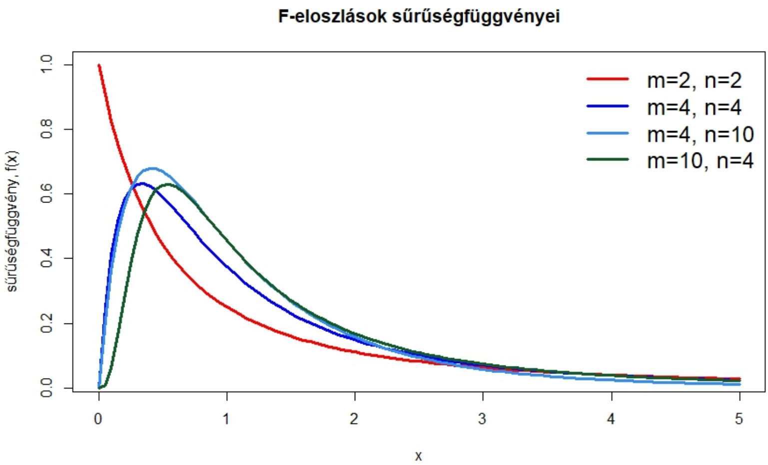
F-eloszlás

Legyenek m, n pozitív egészek, $X_1, \ldots, X_m$, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ pedig független standard normális eloszlású valószínűségi változók. Ekkor az

$$F = \frac{n(X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_m^2)}{m(Y_1^2 + Y_2^2 + \ldots + Y_n^2)}$$

valószínűségi változó eloszlását m, n szabadsági fokú **F-eloszlásnak** nevezzük.

Az F-eloszlás sűrűségfüggvénye



Különböző szabadsági fokú F-eloszlások sűrűségfüggvényei

χ^2-eloszlás

Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_q$ független standard normális eloszlású valószínűségi változók. Az

$$Y = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_q^2$$

valószínűségi változó eloszlását q szabadsági fokú **χ^2-eloszlásnak** nevezzük. Ennek sűrűségfüggvénye:

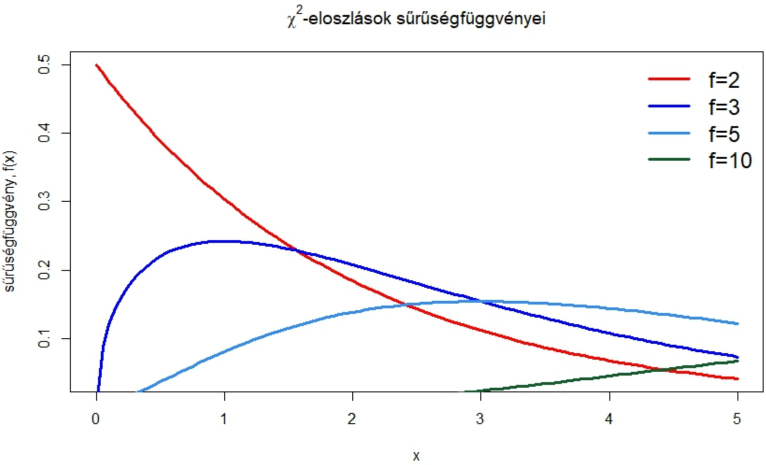
$$f(t) = \begin{cases} \frac{t^{q/2-1}}{2^{q/2}\Gamma(q/2)} e^{-t/2}, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Gamma-függvény. Ha $a > 0$ pozitív szám, legyen

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt.$$

Parciális integrálással belátható, hogy $\Gamma(a) = (a-1)\Gamma(a-1)$ minden $a > 1$-re, és így $\Gamma(n) = (n-1)!$, ha n pozitív egész.

A χ^2-eloszlás sűrűségfüggvénye



Különböző szabadsági fokú χ^2-eloszlások sűrűségfüggvényei

Gamma-eloszlás

Gamma-függvény. Ha $a > 0$ pozitív szám, legyen

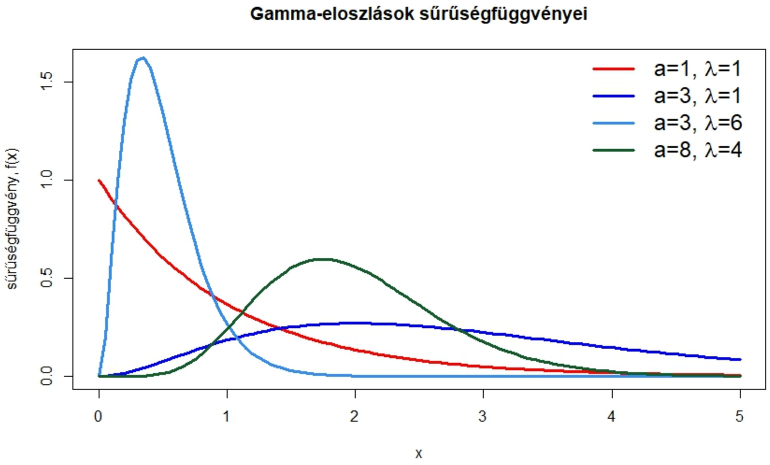
$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt.$$

Parciális integrálással belátható, hogy $\Gamma(a) = (a-1)\Gamma(a-1)$ minden $a > 1$-re, és így $\Gamma(n) = (n-1)!$, ha n pozitív egész.

Legyenek a és λ pozitív számok. Az X valószínűségi változó **gamma-eloszlású** a renddel és λ paraméterrel, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^a x^{a-1}}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

A gamma-eloszlás sűrűségfüggvénye



Különböző szabadsági fokú gamma-eloszlások sűrűségfüggvényei

A gamma-eloszlás tulajdonságai

Az X valószínűségi változó **gamma-eloszlású** a renddel és λ paraméterrel, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^a x^{a-1}}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

- **Kapcsolat az exponenciális eloszlással**: ha $a = 1$, akkor a sűrűségfüggvény $\lambda e^{-\lambda x}$, ha $x \geq 0$, és az exponenciális eloszlást kapjuk vissza.
- **Exponenciális eloszlások összege:** ha $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók, akkor $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ gamma-eloszlású $a = n$ renddel és λ paraméterrel.
- **Kapcsolat a χ^2-eloszlással**: ha $a = q/2$ és $\lambda = 1/2$, akkor a q szabadsági fokú χ^2-eloszlást kapjuk vissza.
- **Várható érték** és **szórás:**

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a}{\lambda}; \qquad D(X) = \frac{\sqrt{a}}{\lambda}.$$

Beta-eloszlás

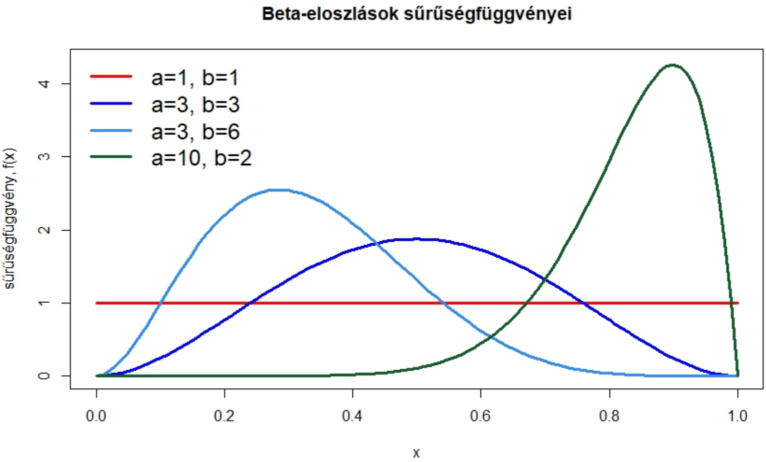
Legyenek $a, b > 1$ számok. Az X valószínűségi változó **beta-eloszlású** a és b paraméterekkel, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, & t \in [0,1]; \\ 0, & x < 0 \text{ vagy } x > 1. \end{cases}$$

Ha $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független, a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók, és X_k^* jelöli ebben a mintában a k. legnagyobb számot, akkor X_k^* eloszlása beta-eloszlás $a = k$ és $b = n - k + 1$ paraméterekkel.

Az $a = 1$ és $b = 1$ választással az **egyenletes eloszlást** kapjuk vissza.

A beta-eloszlás sűrűségfüggvénye



Különböző szabadsági fokú beta-eloszlások sűrűségfüggvényei

Pareto-eloszlás

Az X valószínűségi változó Pareto-eloszlású, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha^{\beta+1}} \cdot x^{-\beta}; & \text{ha } x \leq \alpha \\ 0, & \text{ha } x < \alpha. \end{cases}$$

Itt $\alpha > 0, \beta > 1$ rögzített számok. Ekkor X eloszlásfüggvénye:

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{-\beta+1}; & \text{ha } t \leq \alpha \\ 0, & \text{ha } t < \alpha. \end{cases}$$

Pareto-eloszlás

Az X valószínűségi változó Pareto-eloszlású, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha^{\beta+1}} \cdot x^{-\beta}; & \text{ha } x \leq \alpha \\ 0, & \text{ha } x < \alpha. \end{cases}$$

Itt $\alpha > 0, \beta > 1$ rögzített számok. Ekkor X eloszlásfüggvénye:

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{-\beta+1}; & \text{ha } t \leq \alpha \\ 0, & \text{ha } t < \alpha. \end{cases}$$

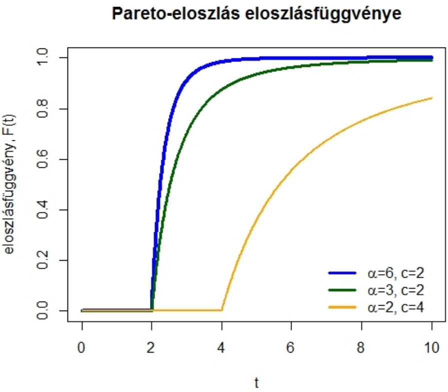
Az X valószínűségi változó k. momentuma:

$$\mathbb{E}(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f(x)\, dx = \frac{\beta}{\alpha^{\beta+1}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{k-\beta}\, dx < \infty \Leftrightarrow k - \beta < -1.$$

Tehát a Pareto-eloszlásnak csak $\beta-1$-nél kisebb k-ra véges a k. momentuma.

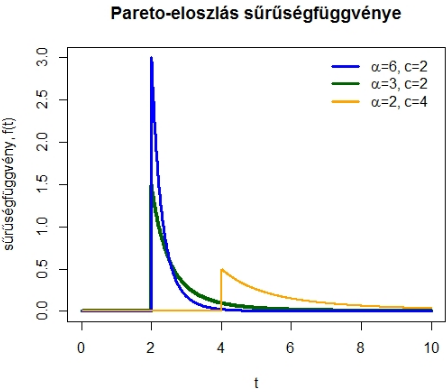
Például ha $\beta = 2,5$, akkor a várható érték létezik és véges, de szórása nem létezik.

Pareto-eloszlás



Különböző paraméterű Pareto-eloszlások eloszlásfüggvénye

Pareto-eloszlás



Különböző paraméterű Pareto-eloszlások sűrűségfüggvénye

Házi feladat december 3., kedd, 8:15-ig

Legyen X olyan valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggénye $f(x) = 4x^3$, ha $0 \leq x \leq 1$, és 0 különben.

a) Határozzuk meg ennek a várható értékét és szórását.

b) Hasonlítsuk össze X és Y várható értékét, illetve szórását, ahol Y a $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó.