

## Konvolúció (8. előadás)

### Állítás

Legyenek  $X$  és  $Y$  független, nemnegatív egész értékű valószínűségi változók. Ekkor az  $X + Y$  valószínűségi változó eloszlását az alábbi módon határozhatjuk meg:

$$\mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_{l=0}^k \mathbb{P}(X = l)\mathbb{P}(Y = k - l) \quad (k \geq 0).$$

Továbbá

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y); \quad D(X) = \sqrt{D^2(X) + D^2(Y)}.$$

*Bizonyítás.* Diszjunkt eseményekre való szétbontással, illetve a függetlenség definíciójának felhasználásával:

$$\mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_{l=0}^k \mathbb{P}(X = l, Y = k - l) = \sum_{l=0}^k \mathbb{P}(X = l)\mathbb{P}(Y = k - l).$$

## Konvolúció: példa

### Állítás

Legyenek  $X$  és  $Y$  független Poisson-eloszlású valószínűségi változók,  $X$  paramétere  $\lambda$ , az  $Y$  paramétere  $\mu$ . Ekkor az  $X + Y$  valószínűségi változó is Poisson-eloszlású, paramétere  $\lambda + \mu$ , várható értéke és szórásnégyzete is  $\lambda + \mu$ .

*Bizonyítás.* Legyen  $k \geq 0$  tetszőleges. Ekkor a Poisson-eloszlás definíciója alapján

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X + Y = k) &= \sum_{l=0}^k \mathbb{P}(X = l)\mathbb{P}(Y = k - l) = \sum_{l=0}^k \frac{\lambda^l}{l!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\mu^{k-l}}{(k-l)!} e^{-\mu} = \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^k \frac{k!}{l!(k-l)!} \lambda^l \mu^{k-l} = \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \lambda^l \mu^{k-l} = e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda + \mu)^k}{k!},\end{aligned}$$

ahol az utolsó lépésben a binomiális tételt használtuk. 

## Nevezetes eloszlások összege

- $X, Y$  független Poisson-eloszlásúak  $\lambda_1$  és  $\lambda_2$  paraméterrel  $\Rightarrow X + Y$  Poisson-eloszlású  $\lambda_1 + \lambda_2$  paraméterrel;
- $X, Y$  független binomiális eloszlásúak,  $n_1$ , illetve  $n_2$  renddel, és azonos  $p$  paraméterrel

## Nevezetes eloszlások összege

- $X, Y$  független Poisson-eloszlásúak  $\lambda_1$  és  $\lambda_2$  paraméterrel  $\Rightarrow X + Y$  Poisson-eloszlású  $\lambda_1 + \lambda_2$  paraméterrel;
- $X, Y$  független binomiális eloszlásúak,  $n_1$ , illetve  $n_2$  renddel, és azonos  $p$  paraméterrel  $\Rightarrow X + Y$  binomiális eloszlású  $n_1 + n_2$  renddel és  $p$  paraméterrel;
- $X_1, X_2, \dots, X_n$  független normális eloszlásúak  $\Rightarrow$  az összegük és az átlaguk is normális eloszlású;

## Az átlag várható értéke és szórása

A statisztikában alapvető kérdés, hogy ha

- **ugyanazt a mérést**
- sokszor, **egymástól függetlenül** megismételjük,
- majd a kapott eredményeket **átlagoljuk**,
- akkor az átlag, mint valószínűségi változó hogyan viselkedik

Vagyis:  $X_1, X_2, \dots, X_n$  **független, azonos eloszlású** valószínűségi változók, akkor mit mondhatunk az

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

**átlagról**: mennyi a **várható értéke** és mennyi a **szórása**?

**Azonos eloszlás**:  $\mathbb{P}(X_j \in A) = \mathbb{P}(X_1 \in A)$  tetszőleges  $j$ -re és  $A \subseteq \mathbb{R}$  „megfelelő” halmazra, vagy:  $X_j$  és  $X_1$  eloszlásfüggvénye megegyezik tetszőleges  $j$ -re.

**azonos eloszlás**  $\Rightarrow$  **azonos várható érték**, **azonos szórás** 

## Valószínűségi változók függetlensége

- **két valószínűségi változóra:** az  $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  valószínűségi változók **függetlenek**, ha

$$\mathbb{P}(X \leq t_1, Y \leq t_2) = \mathbb{P}(X \leq t_1) \cdot \mathbb{P}(Y \leq t_2)$$

teljesül tetszőleges  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  valós számokra.

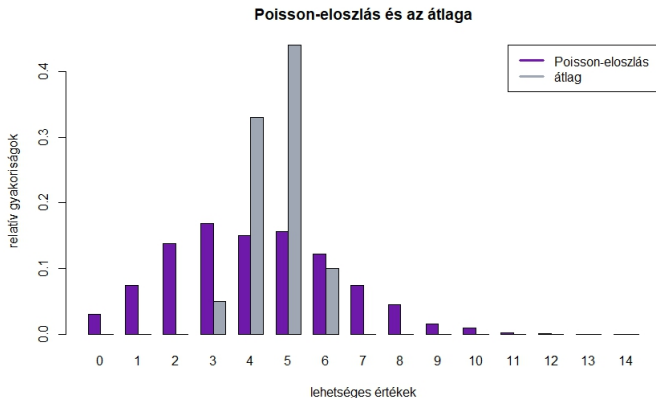
- **véges sok valószínűségi változóra:**  $X_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  valószínűségi változók **függetlenek**, ha

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 \leq t_1, X_2 \leq t_2, \dots, X_n \leq t_n) &= \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq t_1) \cdot \mathbb{P}(X_2 \leq t_2) \dots \mathbb{P}(X_n \leq t_n) \end{aligned}$$

teljesül tetszőleges  $t_1, t_2, \dots, t_n$  valós számokra.

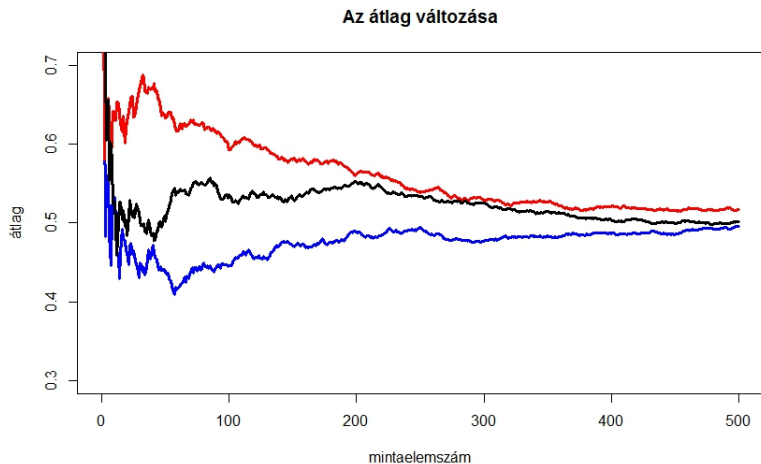
- **megszámlálható sok valószínűségi változóra:** az  $X_1, X_2, X_3 \dots$  valószínűségi változók **függetlenek**, ha közülük bármely véges sokat kiválasztva független valószínűségi változókat kapunk.

# Az átlag viselkedése



1000 darab  $\lambda = 5$  paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változó, illetve 100 darab, tíz független,  $\lambda = 5$  paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változó átlagaként előálló megfigyelés hisztogramja → **átlagolásnál a várható érték nem változik**, ez mindkét esetben 5, **a szórás csökken**

# Az átlag konvergenciája



A  $[0, 1]$  intervallumon egyenletes eloszlásból vett minta átlaga  $n = 500$ -ig

## Az átlag várható értéke

### Állítás

Legyenek  $X_1, \dots, X_n$  független azonos eloszlású valószínűségi változók, melyekre  $m = \mathbb{E}(X_1) < \infty$ . Ekkor

$$\mathbb{E}(\bar{X}) = \mathbb{E}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \mathbb{E}(X_1) = m.$$

## Az átlag várható értéke

### Állítás

Legyenek  $X_1, \dots, X_n$  független azonos eloszlású valószínűségi változók, melyekre  $m = \mathbb{E}(X_1) < \infty$ . Ekkor

$$\mathbb{E}(\bar{X}) = \mathbb{E}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \mathbb{E}(X_1) = m.$$

*Bizonyítás.*

$$\mathbb{E}(\bar{X}) = \mathbb{E}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\mathbb{E}(X_1 + \dots + X_n) = \frac{1}{n} \cdot nm = m.$$

Felhasználtuk a várható érték linearitását, és hogy csak eloszlástól függ:

- $\mathbb{E}(cX) = c\mathbb{E}(X)$ , ha  $c \in \mathbb{R}$ ;
- $\mathbb{E}(Y + Z) = \mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(Z)$ ;
- ha  $Y$  és  $Z$  eloszlása (azaz eloszlásfüggvényük) megegyezik, akkor  $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(Z)$

## Az átlag szórása

### Állítás

Legyenek  $X_1, \dots, X_n$  független azonos eloszlású valószínűségi változók, melyekre  $\sigma = D(X_1) < \infty$ . Ekkor

$$D(\bar{X}) = D\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{D(X_1)}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

## Az átlag szórása

### Állítás

Legyenek  $X_1, \dots, X_n$  független azonos eloszlású valószínűségi változók, melyekre  $\sigma = D(X_1) < \infty$ . Ekkor

$$D(\bar{X}) = D\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{D(X_1)}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

*Bizonyítás.*

$$D(\bar{X}) = D\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{D(X_1 + \dots + X_n)}{n} = \frac{\sqrt{n\sigma^2}}{n} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Felhasználtuk a szórás alábbi tulajdonságait:

- $D(cX) = |c|D(X)$ , ha  $c \in \mathbb{R}$ ;
- $D^2(Y + Z) = D^2(Y) + D^2(Z)$ , ha  $Y$  és  $Z$  függetlenek;
- ha  $Y$  és  $Z$  eloszlása megegyezik, akkor  $D(Y) = D(Z)$

# Egyenlőtlenségek

Tegyük fel, hogy egy véletlenszerűen választott ember  $p$  valószínűséggel szavaz egy adott pártra – azonban  $p$ -t **nem ismerjük**.

**Legalább hány embert kell megkérdeznünk** (feltételezve, hogy mindenki a többiektől függetlenül válaszol és igazat mond), hogy annak valószínűsége, hogy a pártra szavazók aránya **legfeljebb 1%-kal** tér el  $p$ -től, **tetszőleges  $p$  esetén legalább 95% legyen?**

# Egyenlőtlenségek

Tegyük fel, hogy egy véletlenszerűen választott ember  $p$  valószínűséggel szavaz egy adott pártra – azonban  $p$ -t **nem ismerjük**.

**Legalább hány embert kell megkérdeznünk** (feltételezve, hogy mindenki a többiektől függetlenül válaszol és igazat mond), hogy annak valószínűsége, hogy a pártra szavazók aránya **legfeljebb 1%-kal** tér el  $p$ -től, **tetszőleges  $p$  esetén legalább 95% legyen?**

Ennek megértéséhez ezekre van szükség:

- az arány átlagolás  $\rightarrow$  milyen gyorsan csökken a szórás?
- ha a **szórás kicsi**, abból hogyan következik, hogy nagy valószínűséggel csak keveset tévedünk  $\rightarrow$  ebben segít a **Markov- és a Csebisev-egyenlőtlenség**.

## Egyenlőtlenségek

Többek között az **átlag** viselkedésének megértéséhez van szükség az alábbi egyenlőtlenségekre.

**Markov-egyenlőtlenség.** Legyen  $t > 0$ , és  $X$  **nemnegatív, véges várható értékű** valószínűségi változó, vagyis melyre  $X \geq 0$  biztosan teljesül. Ekkor

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{t}.$$

## Egyenlőtlenségek

Többek között az **átlag** viselkedésének megértéséhez van szükség az alábbi egyenlőtlenségekre.

**Markov-egyenlőtlenség.** Legyen  $t > 0$ , és  $X$  **nemnegatív, véges várható értékű** valószínűségi változó, vagyis melyre  $X \geq 0$  biztosan teljesül. Ekkor

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{t}.$$

**Csebisev-egyenlőtlenség.** Legyen  $X$  **véges szórású** valószínűségi változó,  $t > 0$  pozitív szám. Ekkor

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t) \leq \frac{D^2(X)}{t^2}.$$

## Egyenlőtlenségek

Többek között az **átlag** viselkedésének megértéséhez van szükség az alábbi egyenlőtlenségekre.

**Markov-egyenlőtlenség.** Legyen  $t > 0$ , és  $X$  **nemnegatív, véges várható értékű** valószínűségi változó, vagyis melyre  $X \geq 0$  biztosan teljesül. Ekkor

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{t}.$$

**Csebisev-egyenlőtlenség.** Legyen  $X$  **véges szórású** valószínűségi változó,  $t > 0$  pozitív szám. Ekkor

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t) \leq \frac{D^2(X)}{t^2}.$$

**Következmény.** Legyen  $X$  **véges szórású** valószínűségi változó,  $t > 0$  pozitív szám. Ekkor

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| < t) \geq 1 - \frac{D^2(X)}{t^2}.$$

## A Csebisev-egyenlőtlenség alkalmazása

**Legalább hány embert kell megkérdeznünk** (feltételezve, hogy mindenki a többiektől függetlenül válaszol és igazat mond), hogy annak valószínűsége, hogy a pártra szavazók aránya **legfeljebb 1%-kal** tér el  $p$ -től, **tetszőleges  $p$  esetén legalább 95% legyen?**

$n$  megkérdezett, mindenki  $p$  valószínűséggel támogatja a pártot

$X$ : a pártot támogatók száma a megkérdezettek között

Kell:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \leq 0,01\right) \geq 0,95$$

teljesüljön minden  $0 \leq p \leq 1$ -re – hiszen  $p$ -t nem ismerjük.

## A Csebisev-egyenlőtlenség alkalmazása

$n$  megkérdezett, mindenki  $p$  valószínűséggel támogatja a pártot

$X$ : a pártot támogatók száma a megkérdezettek között

Mivel  $X$  binomiális eloszlású:

$$\mathbb{E}\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot np = p; \quad D\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n} \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}.$$

## A Csebisev-egyenlőtlenség alkalmazása

$n$  megkérdezett, mindenki  $p$  valószínűséggel támogatja a pártot

$X$ : a pártot támogatók száma a megkérdezettek között

Mivel  $X$  binomiális eloszlású:

$$\mathbb{E}\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot np = p; \quad D\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n} \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}.$$

Csebisev-egyenlőtlenség alkalmazva az  $X/n$  valószínűségi változóra:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq 0,01\right) \leq \frac{D^2\left(\frac{X}{n}\right)}{0,01^2} = \frac{p(1-p)}{0,01^2 \cdot n} \leq \frac{1}{4 \cdot 0,01^2 \cdot n},$$

mivel  $p(1-p) \leq 1/4$  a számtani-mértani közepek közötti egyenlőtlenség szerint.

## A Csebisev-egyenlőtlenség alkalmazása

$n$  megkérdezett, mindenki  $p$  valószínűséggel támogatja a pártot

$X$ : a pártot támogatók száma a megkérdezettek között

A Csebisev-egyenlőtlenség szerint

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq 0,01\right) \leq \frac{1}{4 \cdot 0,01^2 \cdot n}$$

Kell:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \leq 0,01\right) \geq 0,95,$$

azaz

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| > 0,01\right) \leq 0,05.$$

Tehát ennyi embert **biztosan elég megkérdezni**:

$$\frac{1}{4 \cdot 0,01^2 \cdot n} \leq 0,05 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq \frac{1}{4 \cdot 0,01^2 \cdot 0,05} = 50000.$$

## A Csebisev-egyenlőtlenség alkalmazása

$n$  megkérdezett, mindenki  $p$  valószínűséggel támogatja a pártot

$X$ : a pártot támogatók száma a megkérdezettek között

A Csebisev-egyenlőtlenség szerint

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq 0,01\right) \leq \frac{1}{4 \cdot 0,01^2 \cdot n}$$

Kell:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \leq 0,01\right) \geq 0,95,$$

azaz

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| > 0,01\right) \leq 0,05.$$

Tehát ennyi embert **biztosan elég megkérdezni**:

$$\frac{1}{4 \cdot 0,01^2 \cdot n} \leq 0,05 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq \frac{1}{4 \cdot 0,01^2 \cdot 0,05} = 50000.$$

Ha 0,01 helyett 0,005-öt írnánk (a felét),  $n \geq 200000$  (négyyszer annyi) adódna.

## A Markov-egyenlőtlenség bizonyítása

**Markov-egyenlőtlenség.** Legyen  $t > 0$ , és  $X$  **nemnegatív, véges várható értékű** valószínűségi változó, vagyis melyre  $X \geq 0$  biztosan teljesül. Ekkor

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{t}.$$

*Bizonyítás.* Tekintsük az alábbi  $Y$  valószínűségi változót:

$$Y = \begin{cases} t, & \text{ha } X \geq t; \\ 0, & \text{ha } X < t. \end{cases}$$

## A Markov-egyenlőtlenség bizonyítása

**Markov-egyenlőtlenség.** Legyen  $t > 0$ , és  $X$  **nemnegatív, véges várható értékű** valószínűségi változó, vagyis melyre  $X \geq 0$  biztosan teljesül. Ekkor

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{t}.$$

*Bizonyítás.* Tekintsük az alábbi  $Y$  valószínűségi változót:

$$Y = \begin{cases} t, & \text{ha } X \geq t; \\ 0, & \text{ha } X < t. \end{cases}$$

Mindkét esetben  $Y$  értéke legfeljebb  $X$  értéke (hiszen  $X \geq 0$ ):

$$Y \leq X \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}(Y) \leq \mathbb{E}(X).$$

Másrészt, mivel  $Y$  értéke összesen kétféle lehet, a várható értékét kiszámítva:

$$\mathbb{E}(Y) = 0 \cdot \mathbb{P}(Y = 0) + t \cdot \mathbb{P}(Y = t) = t \cdot \mathbb{P}(X \geq t) \leq \mathbb{E}(X).$$

## A Markov-egyenlőtlenség bizonyítása

**Markov-egyenlőtlenség.** Legyen  $t > 0$ , és  $X$  **nemnegatív, véges várható értékű** valószínűségi változó, vagyis melyre  $X \geq 0$  biztosan teljesül. Ekkor

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{t}.$$

*Bizonyítás.* Tekintsük az alábbi  $Y$  valószínűségi változót:

$$Y = \begin{cases} t, & \text{ha } X \geq t; \\ 0, & \text{ha } X < t. \end{cases}$$

Mindkét esetben  $Y$  értéke legfeljebb  $X$  értéke (hiszen  $X \geq 0$ ):

$$Y \leq X \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}(Y) \leq \mathbb{E}(X).$$

Másrészt, mivel  $Y$  értéke összesen kétféle lehet, a várható értékét kiszámítva:

$$\mathbb{E}(Y) = 0 \cdot \mathbb{P}(Y = 0) + t \cdot \mathbb{P}(Y = t) = t \cdot \mathbb{P}(X \geq t) \leq \mathbb{E}(X).$$

Az utolsó egyenlőtlenség mindkét oldalát a  $t$  pozitív számmal osztva a Markov-egyenlőtlenséget kapjuk.

## A Csebisev-egyenlőtlenség bizonyítása

**Markov-egyenlőtlenség.** Legyen  $t > 0$ , és  $X$  **nemnegatív, véges várható értékű** valószínűségi változó, vagyis melyre  $X \geq 0$  biztosan teljesül. Ekkor

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{t}.$$

**Csebisev-egyenlőtlenség.** Legyen  $X$  **véges szórású** valószínűségi változó,  $t > 0$  pozitív szám. Ekkor

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t) \leq \frac{D^2(X)}{t^2}.$$

*Bizonyítás.* Legyen  $Z = (X - \mathbb{E}(X))^2$ . Ez a valószínűségi változó nemnegatív, ezért alkalmazható a Markov-egyenlőtlenség, a  $t^2$  pozitív számmal:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t) &= \mathbb{P}((X - \mathbb{E}(X))^2 \geq t^2) = \mathbb{P}(Z \geq t^2) \leq \\ &\stackrel{\text{Markov}}{\leq} \frac{\mathbb{E}(Z)}{t^2} = \frac{\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)}{t^2} = \frac{D^2(X)}{t^2} \end{aligned}$$

a szórásnégyzet definíciója alapján.

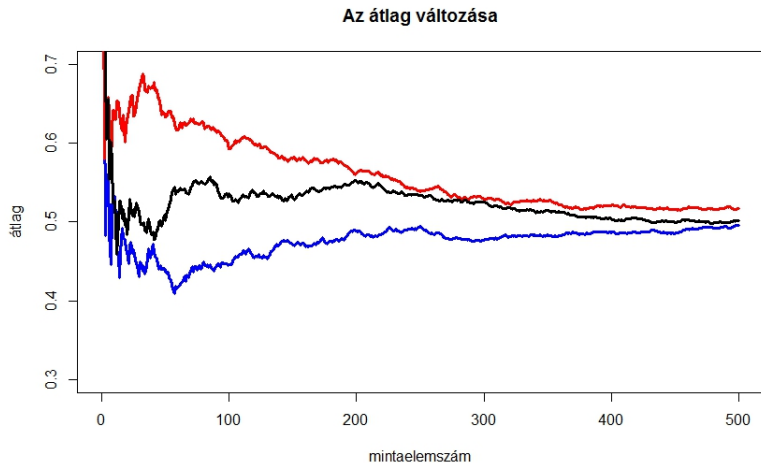
## Házi feladat november 20., hétfő, 10:15-ig

Tegyük fel, hogy egy biztosító ügyfelei által egy évben okozott károk száma Poisson-eloszlású, várható értéke 20.

a) Adjunk felső becslést Markov-, illetve Csebisev-egyenlőtlenséggel annak valószínűségére, hogy  $X \geq 100$ .

b) Az R vagy más szoftver segítségével számítsuk ki a pontos értéket, és hasonlítsuk össze a becslésekkel.

# Az átlag konvergenciája



A  $[0, 1]$  intervallumon egyenletes eloszlásból vett minta átlaga  $n = 500$ -ig

# Konvergenciafajták

**Valószínűségi változók sorozatának** (mint amilyen az átlagok sorozata) **többféle értelemben** definiálhatjuk a határértékét.

A  $Z_1, Z_2, \dots$ , valószínűségi változókból álló sorozat **sztochasztikusan konvergál** az  $Z$  valószínűségi változóhoz, ha minden  $\varepsilon > 0$ -ra

$$\mathbb{P}(|Z_n - Z| > \varepsilon) \rightarrow 0$$

teljesül  $n \rightarrow \infty$  esetén.

## Konvergenciafajták

**Valószínűségi változók sorozatának** (mint amilyen az átlagok sorozata) **többféle értelemben** definiálhatjuk a határértékét.

A  $Z_1, Z_2, \dots$ , valószínűségi változókból álló sorozat **sztochasztikusan konvergál** az  $Z$  valószínűségi változóhoz, ha minden  $\varepsilon > 0$ -ra

$$\mathbb{P}(|Z_n - Z| > \varepsilon) \rightarrow 0$$

teljesül  $n \rightarrow \infty$  esetén.

A  $Z_1, Z_2, \dots$ , valószínűségi változókból álló sorozat **1 valószínűséggel** konvergál az  $Z$  valószínűségi változóhoz, ha

$$\mathbb{P}(\omega \in \Omega : Z_n(\omega) \rightarrow Z(\omega) \text{ } n \rightarrow \infty \text{ esetén}) = 1.$$

# Konvergenciafajták

**Valószínűségi változók sorozatának** (mint amilyen az átlagok sorozata) **többféle értelemben** definiálhatjuk a határértékét.

A  $Z_1, Z_2, \dots$ , valószínűségi változókból álló sorozat **sztochasztikusan konvergál** az  $Z$  valószínűségi változóhoz, ha minden  $\varepsilon > 0$ -ra

$$\mathbb{P}(|Z_n - Z| > \varepsilon) \rightarrow 0$$

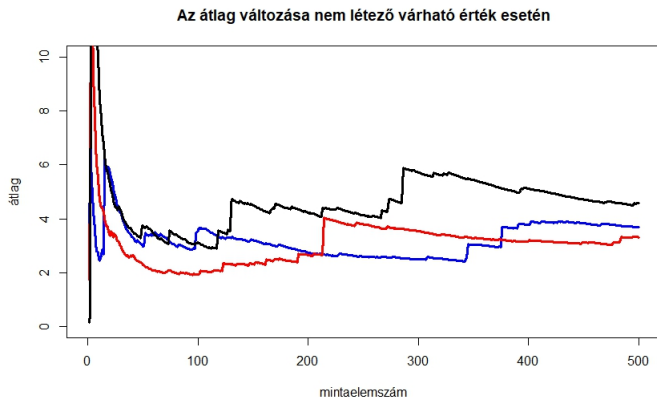
teljesül  $n \rightarrow \infty$  esetén.

A  $Z_1, Z_2, \dots$ , valószínűségi változókból álló sorozat **1 valószínűséggel** konvergál az  $Z$  valószínűségi változóhoz, ha

$$\mathbb{P}(\omega \in \Omega : Z_n(\omega) \rightarrow Z(\omega) \text{ } n \rightarrow \infty \text{ esetén}) = 1.$$

1 valószínűséggel konvergál a sorozat  $\Rightarrow$  sztochasztikusan is, de fordítva nem feltétlenül.

# Az átlag változása



Az átlag változása egy olyan esetben, amikor nem létezik a várható érték (nincs abszolút konvergencia a definícióban)

## A nagy számok gyenge törvénye

Legyenek  $X_1, \dots, X_n$  független azonos eloszlású véges szórású valószínűségi változók. Legyen  $m = \mathbb{E}(X_1)$  és  $\sigma = D(X_1)$ .

A korábbiak szerint

$$\mathbb{E}(\bar{X}) = m; \quad D^2(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

## A nagy számok gyenge törvénye

Legyenek  $X_1, \dots, X_n$  független azonos eloszlású véges szórású valószínűségi változók. Legyen  $m = \mathbb{E}(X_1)$  és  $\sigma = D(X_1)$ .

A korábbiak szerint

$$\mathbb{E}(\bar{X}) = m; \quad D^2(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

A Csebisev-egyenlőtlenség szerint minden  $\varepsilon > 0$ -ra

$$\mathbb{P}(|\bar{X} - m| > \varepsilon) \leq \frac{D^2(\bar{X})}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Tehát  $\bar{X} \rightarrow m = \mathbb{E}(X_1)$  sztochasztikusan.

## A nagy számok törvénye

### Tétel (A nagy számok gyenge törvénye)

*Legyenek  $X_1, X_2, \dots$  olyan valószínűségi változók, melyek függetlenek és azonos eloszlásúak. Tegyük fel, hogy  $D(X_1) < \infty$ . Ekkor minden  $\varepsilon > 0$  esetén*

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mathbb{E}(X_1)| > \varepsilon) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

*azaz  $\bar{X}_n \rightarrow \mathbb{E}(X_1)$  sztochasztikusan.*

## A nagy számok törvénye

### Tétel (A nagy számok gyenge törvénye)

Legyenek  $X_1, X_2, \dots$  olyan valószínűségi változók, melyek függetlenek és azonos eloszlásúak. Tegyük fel, hogy  $D(X_1) < \infty$ . Ekkor minden  $\varepsilon > 0$  esetén

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mathbb{E}(X_1)| > \varepsilon) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

azaz  $\bar{X}_n \rightarrow \mathbb{E}(X_1)$  sztochasztikusan.

### Tétel (A nagy számok erős törvénye)

Legyenek  $X_1, X_2, \dots$  valószínűségi változók, melyek függetlenek és azonos eloszlásúak. Tegyük fel még, hogy  $m = \mathbb{E}(X_1) < \infty$ . Ekkor

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \rightarrow \mathbb{E}(X_1) = m$$

teljesül 1 valószínűséggel  $n \rightarrow \infty$  esetén.

A második esetben gyengébb feltevésből erősebb állítás következik.