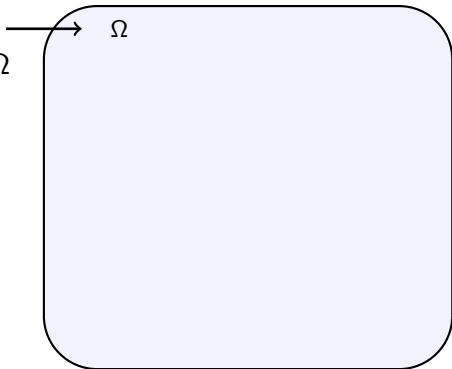
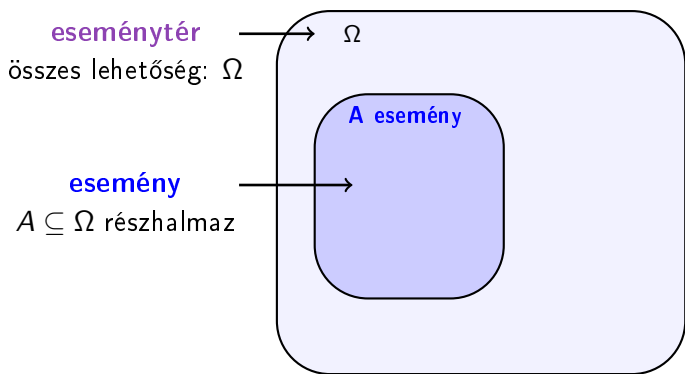


A Kolmogorov-féle valószínűségi mező (2. előadás)

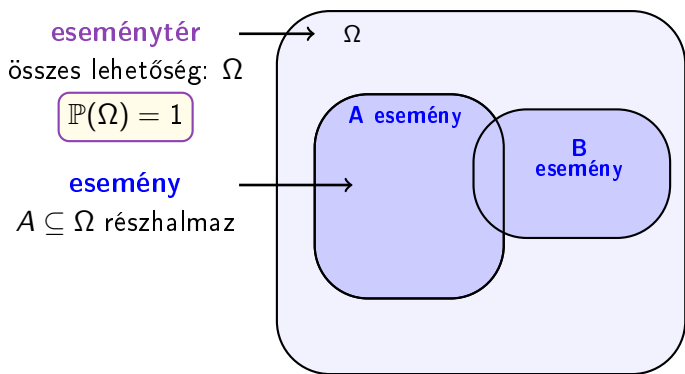
eseménytér
összes lehetőség: Ω



A Kolmogorov-féle valószínűségi mező (2. előadás)

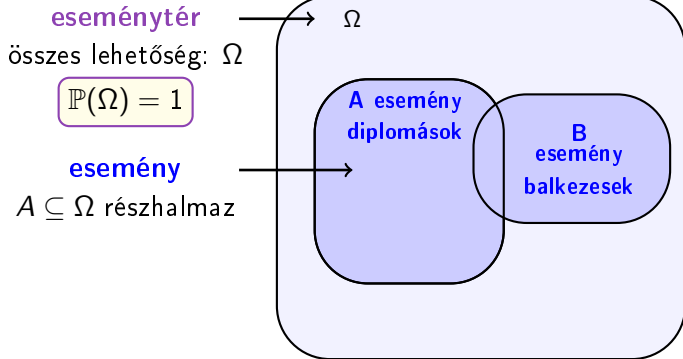


A Kolmogorov-féle valószínűségi mező (2. előadás)



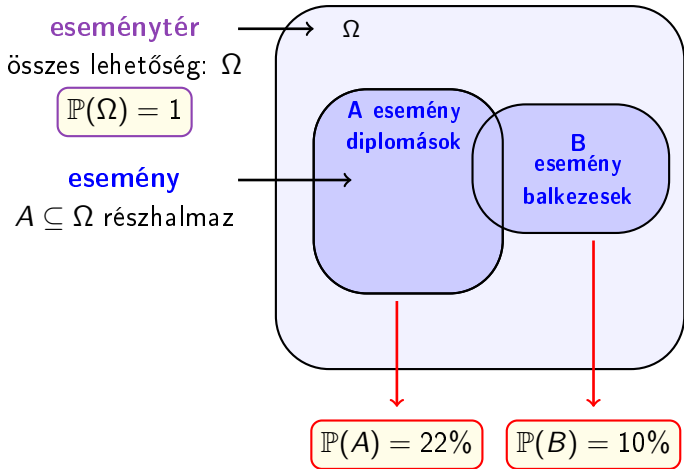
A Kolmogorov-féle valószínűségi mező (2. előadás)

Ω : (magyar) **felnőtt emberek**



A Kolmogorov-féle valószínűségi mező (2. előadás)

Ω : (magyar) **felnőtt emberek**



A Kolmogorov-féle valószínűségi mező (2. előadás)

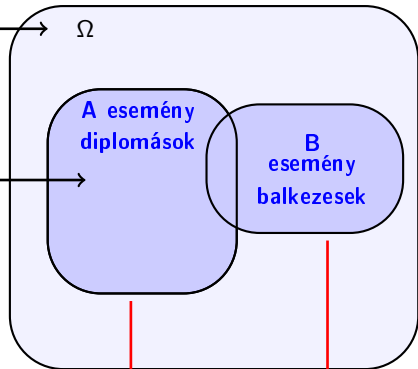
Ω : (magyar) **felnőtt emberek**

eseménytér
összes lehetőség: Ω

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1$$

esemény
 $A \subseteq \Omega$ részhalmaz

valószínűség: eseményekhez $[0, 1]$ -beli számokat rendelő függvény



$$\mathbb{P}(A) = 22\%$$

$$\mathbb{P}(B) = 10\%$$

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező (2. előadás)

Ω : (magyar) **felnőtt emberek**

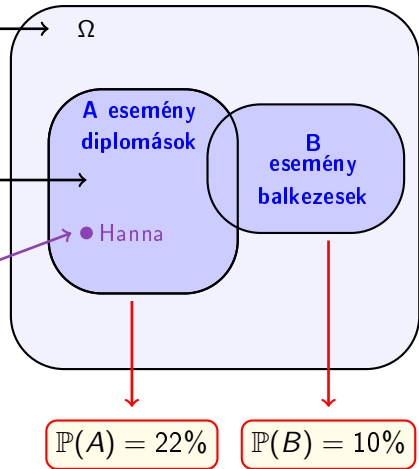
eseménytér
összes lehetőség: Ω

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1$$

esemény
 $A \subseteq \Omega$ részhalmaz

elemi esemény

valószínűség: eseményekhez $[0, 1]$ -beli számokat rendelő függvény



A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ hármas **Kolmogorov-féle valószínűségi mező**, ha

- az Ω **eseménytér** egy nem üres halmaz;

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ hármas **Kolmogorov-féle valószínűségi mező**, ha

- az Ω **eseménytér** egy nem üres halmaz;
- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ az **az események halmaza**, azaz minden $A \in \mathcal{A}$ -ra $A \subseteq \Omega$ úgy, hogy
 - i) $\Omega \in \mathcal{A}$;
 - ii) ha $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, akkor $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ (azaz megszámlálható sok \mathcal{A} -beli elem uniója is \mathcal{A} -beli);
 - iii) ha $A \in \mathcal{A}$, akkor $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ (azaz \mathcal{A} -beli halmazok komplementere is \mathcal{A} -beli).

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ hármast **Kolmogorov-féle valószínűségi mező**, ha

- az Ω **eseménytér** egy nem üres halmaz;
- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ az **az események halmaza**, azaz minden $A \in \mathcal{A}$ -ra $A \subseteq \Omega$ úgy, hogy
 - i) $\Omega \in \mathcal{A}$;
 - ii) ha $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, akkor $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ (azaz megszámlálható sok \mathcal{A} -beli elem uniója is \mathcal{A} -beli);
 - iii) ha $A \in \mathcal{A}$, akkor $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ (azaz \mathcal{A} -beli halmazok komplementere is \mathcal{A} -beli).
- a **valószínűség** egy $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ függvény, melyre
 - i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, azaz a biztos esemény valószínűsége 1;
 - ii) ha $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ és minden $1 \leq i < j$ -re $A_i \cap A_j = \emptyset$, akkor

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n),$$

azaz megszámlálható sok kizáró esemény uniójának valószínűsége a valószínűségek összege.

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

- Ω : **eseménytér** vagy elemi események halmaza.
- Ω elemei ($\omega \in \Omega$): **elemi események**.
- \mathcal{A} : **események halmaza** (vagy események σ -algebrája).
- \mathcal{A} elemei ($A \in \mathcal{A}$): **események**.
- \mathbb{P} : **valószínűség** (probability).
- Ω esemény neve: biztos esemény.
- \emptyset (üres halmaz) esemény neve: lehetetlen esemény.
- $A \in \mathcal{A}$ és $B \in \mathcal{A}$ **kizáró események**, ha $A \cap B = \emptyset$, azaz **egyszerre nem következhetnek be**.

Házi feladat szeptember 18., hétfő, 10:15-ig

Egy hosszú vacsoraasztal mindkét oldalán 20 hely van. A vendégek véletlenszerűen ülnek le az asztalhoz, páronként egymással szemben, minden lehetőség egyformán valószínű.

(a) Mik lesznek az elemi események, és hány eleme van az eseménytérnek?

Házi feladat szeptember 18., hétfő, 10:15-ig

Egy hosszú vacsoraasztal mindkét oldalán 20 hely van. A vendégek véletlenszerűen ülnek le az asztalhoz, páronként egymással szemben, minden lehetőség egyformán valószínű.

(a) Mik lesznek az elemi események, és hány eleme van az eseménytérnek?

Elemi események: mind a 40 helyről megmondjuk, hogy ki ült oda (a helyek és az emberek is különbözők). Az elemi események száma $40!$, ugyanis az első helyre 40 ember ülhet, bárki ült oda, a második helyre 39 ember ülhet, és ezt a gondolatmenetet folytathatjuk.

Házi feladat szeptember 18., hétfő, 10:15-ig

Egy hosszú vacsoraasztal mindkét oldalán 20 hely van. A vendégek véletlenszerűen ülnek le az asztalhoz, páronként egymással szemben, minden lehetőség egyformán valószínű.

(a) Mik lesznek az elemi események, és hány eleme van az eseménytérnek?

Elemi események: mind a 40 helyről megmondjuk, hogy ki ült oda (a helyek és az emberek is különbözők). Az elemi események száma $40!$, ugyanis az első helyre 40 ember ülhet, bárki ült oda, a második helyre 39 ember ülhet, és ezt a gondolatmenetet folytathatjuk.

(b) Tegyük fel, hogy a vendégek fele angol, fele német. Minek több a valószínűsége: (i) az asztal egyik oldalán csak angolok, a másikon csak németek ülnek, vagy (ii) az egymással szemben ülő emberek mindig azonos nemzeti-ségűek? Számítsuk is ki ezeket a valószínűségeket.

Házi feladat szeptember 18., hétfő, 10:15-ig

Egy hosszú vacsoraasztal mindkét oldalán 20 hely van. A vendégek véletlenszerűen ülnek le az asztalhoz, páronként egymással szemben, minden lehetőség egyformán valószínű.

(b) Tegyük fel, hogy a vendégek fele angol, fele német. Minek több a valószínűsége: (i) az asztal egyik oldalán csak angolok, a másikon csak németek ülnek, vagy (ii) az egymással szemben ülő emberek mindig azonos nemzeti-egűek? Számítsuk is ki ezeket a valószínűségeket.

(i) Kétféleképpen választhatjuk ki, hogy az asztal melyik oldalán ülnek angolok, és melyiken németek. Mindkét esetben az angol vendégek és a német vendégek is egymástól függetlenül $20!$ -féleképpen ülhetnek le. Így a megfelelő elemi események száma $2 \cdot 20! \cdot 20!$. Mivel minden elemi esemény egyformán valószínű, a kérdéses valószínűség $\frac{2 \cdot 20! \cdot 20!}{40!} = 1,5 \cdot 10^{-11}$.

Házi feladat szeptember 18., hétfő, 10:15-ig

Egy hosszú vacsoraasztal mindkét oldalán 20 hely van. A vendégek véletlenszerűen ülnek le az asztalhoz, páronként egymással szemben, minden lehetőség egyformán valószínű.

(b) Tegyük fel, hogy a vendégek fele angol, fele német. Minek több a valószínűsége: (i) az asztal egyik oldalán csak angolok, a másikon csak németek ülnek, vagy (ii) az egymással szemben ülő emberek mindig azonos nemzetiiségűek? Számítsuk is ki ezeket a valószínűségeket.

(ii) A húsz szemben ülő párból $\binom{20}{10}$ -féleképpen választhatjuk ki azt az tízet, ahol angolok ülnek. Ezután az előzőhöz hasonlóan az angolok számára "kijelölt" helyekre az angolok $20!$ -féleképpen ülhetnek le, hasonlóképpen a németek is $20!$ -féleképpen ülhetnek le a nekik kijelölt helyekre. Továbbra is minden elemi esemény egyformán valószínű. Így a kérdéses valószínűség:

$$\frac{\binom{20}{10} \cdot 20! \cdot 20!}{40!} = 1,5 \cdot 10^{-11} > 1,3 \cdot 10^{-6},$$

tehát ez lesz nagyobb valószínűségű a két esemény közül.

Feltételes valószínűség: példa

Gábornak **három gyereke** van.

Feltételes valószínűség: példa

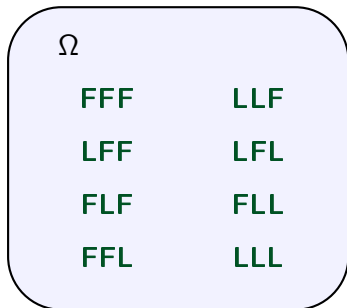
Gábornak **három gyereke** van.

Mennyi a valószínűsége, hogy **a középső gyermeke fiú?**

Feltételes valószínűség: példa

Gábornak **három gyereke** van.

Mennyi a valószínűsége, hogy **a középső gyermeke fiú?**



Feltételes valószínűség: példa

Gábornak **három gyereke** van.

Mennyi a valószínűsége, hogy **a középső gyermeke fiú?**

A esemény

$2^3 = 8$
egyformán
valószínű
lehetőség

4 jó lehetőség

Ω

FFF	LLF
LFF	LFL
FLF	FLL
FFL	LLL

$$\mathbb{P}(A) = \frac{4}{8} = 50\%$$


Feltételes valószínűség: példa

Gábornak **három gyereke** van.

Azt is elárulja, hogy **pontosan egy fia van**.

Most mennyi a valószínűsége, hogy **a középső gyermeke fiú?**

A esemény



Feltételes valószínűség: példa

feltétel: plusz információ

Gábornak **három gyereke** van. ↓ B esemény

Azt is elárulja, hogy **pontosan egy fia van**.

Most mennyi a valószínűsége, hogy **a középső gyermeke fiú?**

↖ A esemény

Feltételes valószínűség: példa

feltétel: plusz információ

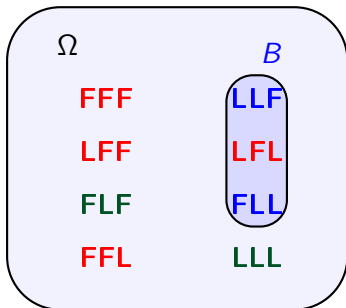
Gábornak **három gyereke** van. ↓ B esemény

Azt is elárulja, hogy **pontosan egy fia van**.

Most mennyi a valószínűsége, hogy **a középső gyermeke fiú?**

A esemény

$2^3 = 8$
egyformán
valószínű
lehetőség



Feltételes valószínűség: példa

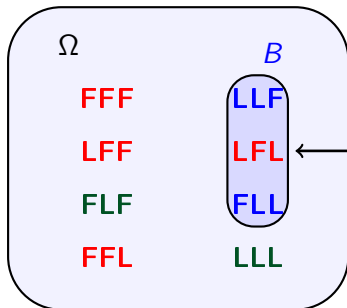
feltétel: plusz információ

Gábornak **három gyereke** van. ↓ B esemény

Azt is elárulja, hogy **pontosan egy fia van**.

Most mennyi a valószínűsége, hogy **a középső gyermeke fiú?**

$2^3 = 8$
egyformán
valószínű
lehetőség



A esemény

$$\mathbb{P}(B) = 3/8$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 1/8$$

Feltételes valószínűség: példa

feltétel: plusz információ

Gábornak **három gyereke** van. ↓ B esemény

Azt is elárulja, hogy **pontosan egy fia van**.

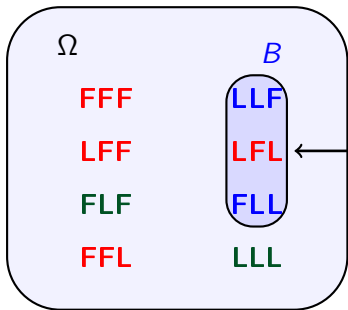
Most mennyi a valószínűsége, hogy **a középső gyermeke fiú?**

A esemény

$$\mathbb{P}(B) = 3/8$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 1/8$$

A -nak B -re vonatkozó feltételes valószínűsége



$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1/8}{3/8} = \frac{1}{3} < \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A) \text{ ebben az esetben.}$$

Feltételes valószínűség

Legyenek $A, B \in \mathcal{A}$ események úgy, hogy $\mathbb{P}(B) > 0$.

Feltételes valószínűség

Legyenek $A, B \in \mathcal{A}$ események úgy, hogy $\mathbb{P}(B) > 0$.

Ekkor az A eseménynek B -re vonatkozó **feltételes valószínűsége**:

Feltételes valószínűség

Legyenek $A, B \in \mathcal{A}$ események úgy, hogy $\mathbb{P}(B) > 0$.

Ekkor az A eseménynek B -re vonatkozó **feltételes valószínűsége**:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Feltételes valószínűség

Legyenek $A, B \in \mathcal{A}$ események úgy, hogy $\mathbb{P}(B) > 0$.

Ekkor az A eseménynek B -re vonatkozó **feltételes valószínűsége**:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

← metszet valószínűsége

A és B is bekövetkezik

Feltételes valószínűség

Legyenek $A, B \in \mathcal{A}$ események úgy, hogy $\mathbb{P}(B) > 0$.

Ekkor az A eseménynek B -re vonatkozó **feltételes valószínűsége**:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

metszet valószínűsége

A és B is bekövetkezik

feltétel valószínűsége

$\mathbb{P}(B) > 0$, lehet osztani

Értelmezés: feltéve,
hogy B bekövetkezett,
mennyi a valószínűsége,
hogy A is bekövetkezik

Feltételes valószínűség

Legyenek $A, B \in \mathcal{A}$ események úgy, hogy $\mathbb{P}(B) > 0$.

Ekkor az A eseménynek B -re vonatkozó **feltételes valószínűsége**:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

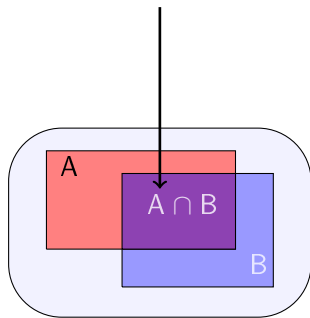
metszet valószínűsége

A és B is bekövetkezik

feltétel valószínűsége

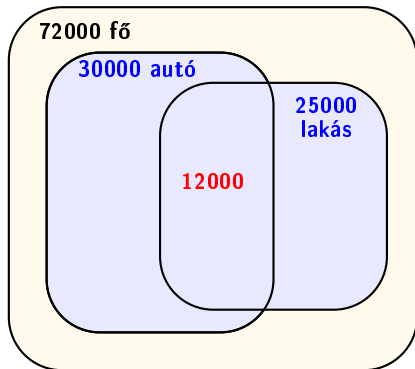
$\mathbb{P}(B) > 0$, lehet osztani

Értelmezés: feltéve, hogy B bekövetkezett, mennyi a valószínűsége, hogy A is bekövetkezik



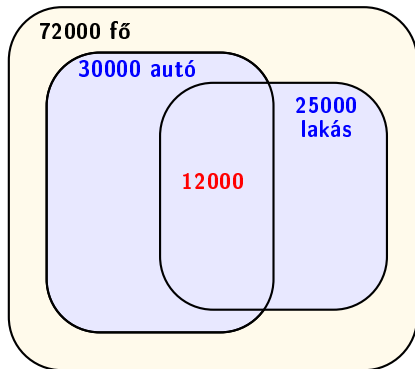
Feltételes valószínűség: példa

Egy 72000 fős városban harmincezer embernek van autója, huszonötezernek lakása, tizenkét ezernek mindkettő. Egy véletlenszerűen választott lakosról tudjuk, hogy van autója. Erre vonatkozóan mennyi a feltételes valószínűsége, hogy az illetőnek van lakása?



Feltételes valószínűség: példa

Egy 72000 fős városban harmincezer embernek van autója, huszonötezernek lakása, tizenkét ezernek mindkettő. Egy véletlenszerűen választott lakosról tudjuk, hogy van autója. Erre vonatkozóan mennyi a feltételes valószínűsége, hogy az illetőnek van lakása?



$$\mathbb{P}(L|A) = \frac{\mathbb{P}(L \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{12000/72000}{30000/72000} = 40\% > \mathbb{P}(L) = \frac{25000}{72000} = 34,7\%.$$

Bayes-tétel: példa

Hanna sátorozni megy Sopronba. Az alábbi táblázat mutatja, hogy adott mennyiségű csapadék esetén mennyi valószínűséggel ázik be a sátra, illetve az előrejelzés szerint mennyi az adott csapadékmennyiség valószínűsége.

csapadék (mm)	0	0 – 5	5 – 10	10-nél több
beázás valószínűsége	0	15%	35%	60%
előrejelzés	40%	10%	30%	20%

Mennyi a valószínűsége, hogy **Hanna sátra beázik?**

Bayes-tétel: példa

Hanna sátorozni megy Sopronba. Az alábbi táblázat mutatja, hogy adott mennyiségű csapadék esetén mennyi valószínűséggel ázik be a sátra, illetve az előrejelzés szerint mennyi az adott csapadékmennyiség valószínűsége.

csapadék (mm)	0	0 – 5	5 – 10	10-nél több
beázás valószínűsége	0	15%	35%	60%
előrejelzés	40%	10%	30%	20%

Mennyi a valószínűsége, hogy **Hanna sátra beázik?**

Hanna a **beázott sátorról** küld képeket.

Erre feltételesen mennyi annak valószínűsége, hogy Sopronban **több mint 10 mm eső** esett ezen a napon?

Teljes valószínűség tétele

csapadék (mm)	0	0 – 5	5 – 10	10-nél több
beázás valószínűsége	0	15%	35%	60%
előrejelzés	40%	10%	30%	20%

B_1 : nincs csapadék

B_2 : 0 – 5 mm csapadék

A: Hanna sátra beázik

B_3 : 5 – 10 mm csapadék

B_4 : > 10 mm csapadék

Teljes valószínűség tétele

csapadék (mm)	0	0 – 5	5 – 10	10-nél több
beázás valószínűsége	0	15%	35%	60%
előrejelzés	40%	10%	30%	20%

B_1 : nincs csapadék

$$\mathbb{P}(B_1) = 0,4$$

B_2 : 0 – 5 mm csapadék

$$\mathbb{P}(B_2) = 0,1$$

A: Hanna sátra beázik

$$\mathbb{P}(B_3) = 0,3$$

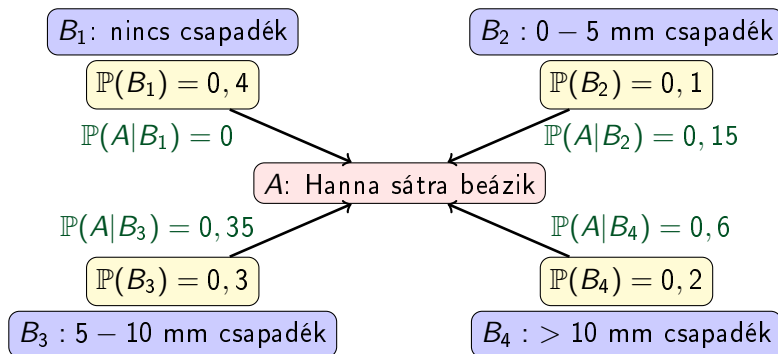
B_3 : 5 – 10 mm csapadék

$$\mathbb{P}(B_4) = 0,2$$

B_4 : > 10 mm csapadék

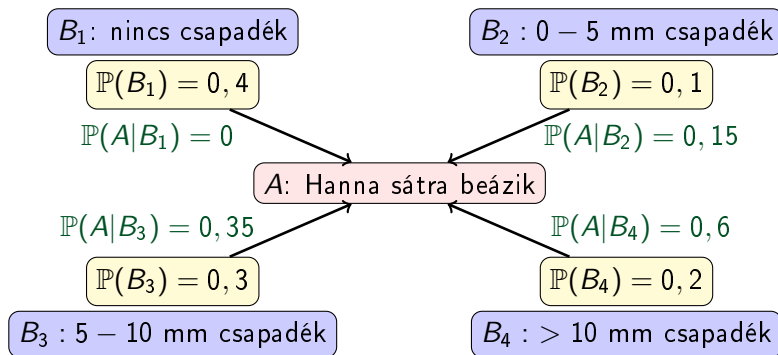
Teljes valószínűség tétele

csapadék (mm)	0	0 – 5	5 – 10	10-nél több
beázás valószínűsége	0	15%	35%	60%
előrejelzés	40%	10%	30%	20%



Teljes valószínűség tétele

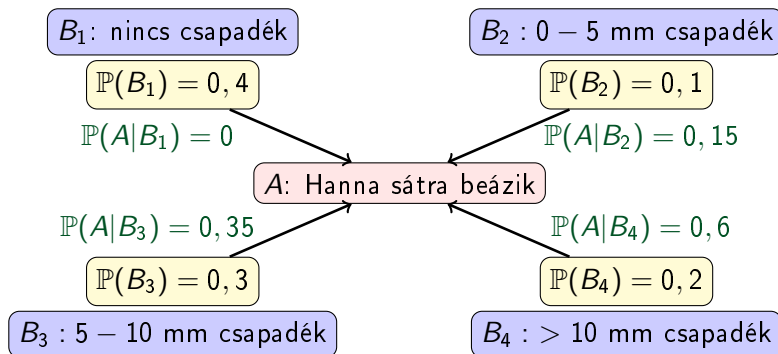
csapadék (mm)	0	0 – 5	5 – 10	10-nél több
beázás valószínűsége	0	15%	35%	60%
előrejelzés	40%	10%	30%	20%



$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \\ &\quad + \mathbb{P}(A|B_3)\mathbb{P}(B_3) + \mathbb{P}(A|B_4)\mathbb{P}(B_4) =\end{aligned}$$

Teljes valószínűség tétele

csapadék (mm)	0	0 – 5	5 – 10	10-nél több
beázás valószínűsége	0	15%	35%	60%
előrejelzés	40%	10%	30%	20%



$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \\ &\quad + \mathbb{P}(A|B_3)\mathbb{P}(B_3) + \mathbb{P}(A|B_4)\mathbb{P}(B_4) = \\ &= 0 \cdot 0,4 + 0,15 \cdot 0,1 + 0,35 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,2 = 24\%.\end{aligned}$$

Bayes-tétel: példa

Hanna sátorozni megy Sopronba. Az alábbi táblázat mutatja, hogy adott mennyiségű csapadék esetén mennyi valószínűséggel ázik be a sátra, illetve az előrejelzés szerint mennyi az adott csapadékmennyiség valószínűsége.

csapadék (mm)	0	0 – 5	5 – 10	10-nél több
beázás valószínűsége	0	15%	35%	60%
előrejelzés	40%	10%	30%	20%

Mennyi a valószínűsége, hogy **Hanna sátra beázik?**

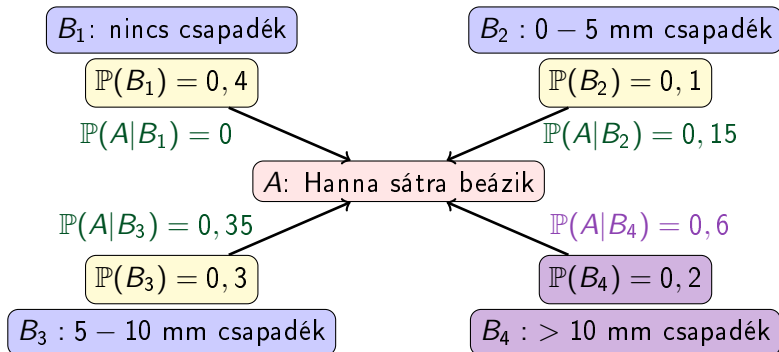
$$0 \cdot 0,4 + 0,15 \cdot 0,1 + 0,35 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,2 = 24\%.$$

Hanna a **beázott sátorról** küld képeket.

Erre feltételesen mennyi annak valószínűsége, hogy Sopronban **több mint 10 mm eső** esett ezen a napon?

Bayes-tétel: példa

csapadék (mm)	0	0 – 5	5 – 10	10-nél több
beázás valószínűsége	0	15%	35%	60%
előrejelzés	40%	10%	30%	20%



Bayes-tétel: példa

Hanna a **beázott sátorról** küld képeket. Mennyi annak valószínűsége, hogy Sopronban **több mint 10 mm eső** esett ezen a napon? Azaz mennyi $\mathbb{P}(B_4|A)$?

csapadék (mm)	0	0 – 5	5 – 10	10-nél több
beázás valószínűsége	0	15%	35%	60%
előrejelzés	40%	10%	30%	20%

Bayes-tétel: példa

Hanna a **beázott sátorról** küld képeket. Mennyi annak valószínűsége, hogy Sopronban **több mint 10 mm eső** esett ezen a napon? Azaz mennyi $\mathbb{P}(B_4|A)$?

csapadék (mm)	0	0 – 5	5 – 10	10-nél több
beázás valószínűsége	0	15%	35%	60%
előrejelzés	40%	10%	30%	20%

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_4|A) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap B_4)}{\mathbb{P}(B_4)} = \frac{\mathbb{P}(A|B_4)\mathbb{P}(B_4)}{\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \dots + \mathbb{P}(A|B_4)\mathbb{P}(B_4)} = \\ &= \frac{0,6 \cdot 0,2}{0 \cdot 0,4 + 0,15 \cdot 0,1 + 0,35 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,2} = \frac{0,12}{0,24} = 50\%.\end{aligned}$$

Bayes-tétel: példa

Hanna a **beázott sátorról** küld képeket. Mennyi annak valószínűsége, hogy Sopronban **több mint 10 mm eső** esett ezen a napon? Azaz mennyi $\mathbb{P}(B_4|A)$?

csapadék (mm)	0	0 – 5	5 – 10	10-nél több
beázás valószínűsége	0	15%	35%	60%
előrejelzés	40%	10%	30%	20%

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_4|A) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap B_4)}{\mathbb{P}(B_4)} = \frac{\mathbb{P}(A|B_4)\mathbb{P}(B_4)}{\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \dots + \mathbb{P}(A|B_4)\mathbb{P}(B_4)} = \\ &= \frac{0,6 \cdot 0,2}{0 \cdot 0,4 + 0,15 \cdot 0,1 + 0,35 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,2} = \frac{0,12}{0,24} = 50\%.\end{aligned}$$

Vagyis feltéve, hogy beázott a sátor, 50% valószínűséggel volt 10 mm-nél több csapadék. Ez több, mint 20%: feltéve, hogy beázott a sátor, valószínűbb a sok csapadék, mint az új információ nélkül.

Teljes eseményrendszer

Definíció (Teljes eseményrendszer)

A $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{A}$ (véges vagy megszámlálható sok) esemény együttesét teljes eseményrendszernek nevezzük, ha

- i) $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$, azaz minden elemi esemény szerepel valamelyik eseményben;
- ii) $B_i \cap B_j = \emptyset$ teljesül minden $1 \leq i < j$ -re, azaz páronként kizáróak, semelyik elemi esemény nem szerepel egyszerre két eseményben is;
- iii) $\mathbb{P}(B_i) > 0$ minden $i = 1, 2, \dots$ -re, azaz mindegyiknek pozitív a valószínűsége.

Teljes eseményrendszer

Definíció (Teljes eseményrendszer)

A $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{A}$ (véges vagy megszámlálható sok) esemény együttesét teljes eseményrendszernek nevezzük, ha

- ❶ $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$, azaz minden elemi esemény szerepel valamelyik eseményben;
- ❷ $B_i \cap B_j = \emptyset$ teljesül minden $1 \leq i < j$ -re, azaz páronként kizáróak, semelyik elemi esemény nem szerepel egyszerre két eseményben is;
- ❸ $\mathbb{P}(B_i) > 0$ minden $i = 1, 2, \dots$ -re, azaz mindegyiknek pozitív a valószínűsége.

Tétel (Teljes valószínűség tétele)

Legyen $A \in \mathcal{A}$ tetszőleges esemény, B_1, B_2, \dots teljes eseményrendszer. Ekkor

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i).$$

Bayes-tétel

Tétel (Teljes valószínűség tétele)

Legyen $A \in \mathcal{A}$ tetszőleges esemény, B_1, B_2, \dots teljes eseményrendszer. Ekkor

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i).$$

Tétel (Bayes-tétel)

Legyen $A \in \mathcal{A}$ olyan esemény, melyre $\mathbb{P}(A) > 0$, B_1, B_2, \dots pedig teljes eseményrendszer. Ekkor minden $k = 1, 2, \dots$ -re teljesül, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_k|A) &= \frac{\mathbb{P}(A|B_k)\mathbb{P}(B_k)}{\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3)\mathbb{P}(B_3) + \dots} = \\ &= \frac{\mathbb{P}(A|B_k)\mathbb{P}(B_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}. \end{aligned}$$

Bayes-tétel: példa

Példa. Tegyük fel, hogy egy város lakosságának 36%-a rendelkezik diplomával, 42%-a érettségivel (mint legmagasabb végzettség), a többiek egyikkel sem. A diplomások 23%-a, az érettségizettek 21%-a, az érettségivel nem rendelkezők 10%-ának van saját autója.

- Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott lakos saját autóval rendelkezik?
- A város egyik lakosa elárulja, hogy van saját autója. Ez alapján mennyi a feltételes valószínűsége, hogy az illető diplomával rendelkezik?

Bayes-tétel: példa

Példa. Tegyük fel, hogy egy város lakosságának 36%-a rendelkezik diplomával, 42%-a érettségivel (mint legmagasabb végzettség), a többiek egyikkel sem. A diplomások 23%-a, az érettségizettek 21%-a, az érettségivel nem rendelkezők 10%-ának van saját autója.

A : autó; B_1 : diploma; B_2 : érettségi; B_3 : nem érettségizett

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A \cap B_1) + \mathbb{P}(A \cap B_2) + \mathbb{P}(A \cap B_3) = \\ &= \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3)\mathbb{P}(B_3) = \\ &= 0,23 \cdot 0,36 + 0,21 \cdot 0,42 + 0,1 \cdot 0,22 = 19,3\%.\end{aligned}$$

Vagyis egy véletlenszerűen választott lakos 19,3% valószínűséggel rendelkezik saját autóval.

Bayes-tétel: példa

Példa. Tegyük fel, hogy egy város lakosságának 36%-a rendelkezik diplomával, 42%-a érettségivel (mint legmagasabb végzettség), a többiek egyikkel sem. A diplomások 23%-a, az érettségizettek 21%-a, az érettségivel nem rendelkezők 10%-ának van saját autója.

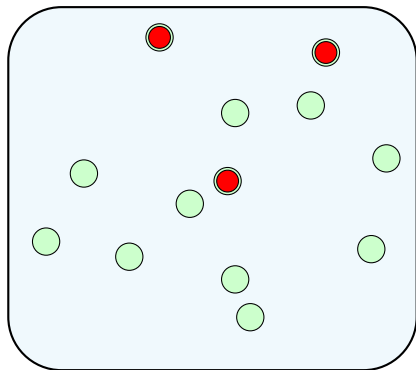
A : autó; B_1 : diploma; B_2 : érettségi; B_3 : nem érettségizett

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_1|A) &= \frac{\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1)}{\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3)\mathbb{P}(B_3)} = \\ &= \frac{0,23 \cdot 0,36}{0,23 \cdot 0,36 + 0,21 \cdot 0,42 + 0,1 \cdot 0,22} = 42,9\%.\end{aligned}$$

Vagyis egy autóval rendelkező lakosnak 42,9% valószínűséggel van diplomája. Ez nagyobb a diplomások arányánál (36%), hiszen a diplomások között nagyobb az autósok aránya, mint a teljes népességben.

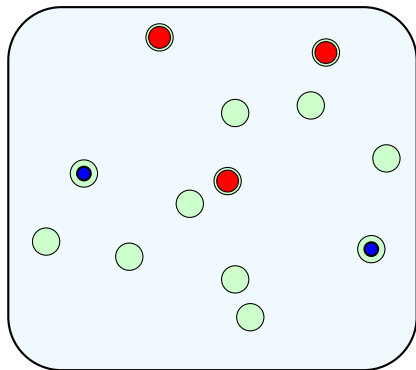
Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Egy vízilabdacsapat **13 tagja** közül **három játékos** doppingol.
A doppingtesztre kiválasztanak **két különböző** játékost,
minden lehetséges párt azonos valószínűséggel választva.



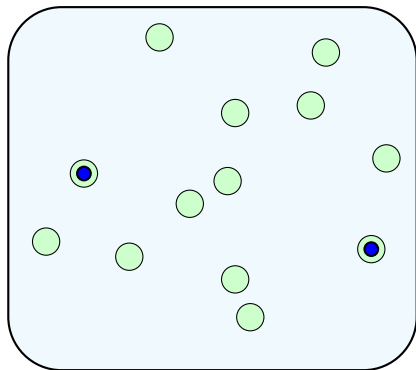
Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Egy vízilabdacsapat **13 tagja** közül **három játékos** doppingol.
A doppingtesztre kiválasztanak **két különböző** játékost,
minden lehetséges párt azonos valószínűséggel választva.
Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott játékosok közül
egy sem doppingol?



Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Hányféleképpen lehet **13 játékos** közül **két különbözőt** választani?



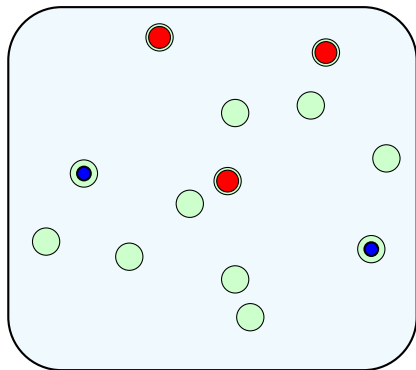
Visszatevés nélküli mintavétel: példa

első második

$$\frac{13 \cdot 12}{2} = \binom{13}{2} = 78$$

↑
a sorrend nem számít

$\binom{13}{2} = 78$
egyformán
valószínű
eset van

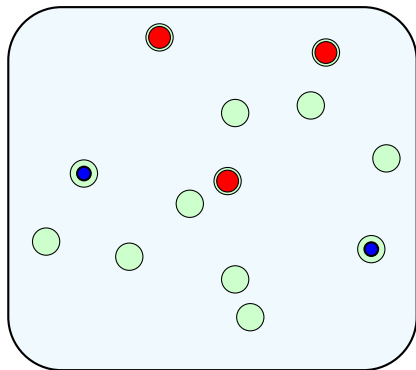


Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Hányféleképpen lehet **13-3=10 nem doppingoló játékos** közül **két különbözőt** választani?

$$\frac{10 \cdot 9}{2} = \binom{10}{2} = 45$$

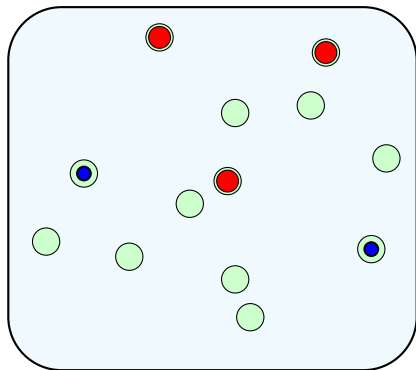
$\binom{13}{2} = 78$
egyformán
valószínű
eset van



Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Annak valószínűsége, hogy a **két játékos egyike sem** doppingol:

$\binom{13}{2} = 78$
egyformán
valószínű
eset van

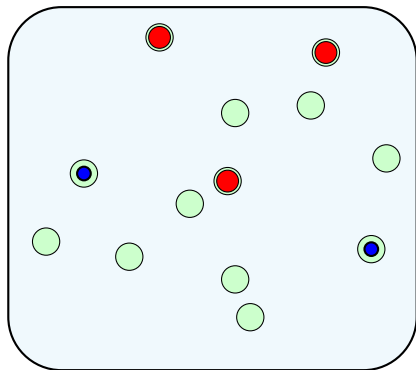


Visszatevés nélküli mintavétel: példa

egyik sem doppingol $\rightarrow \frac{\binom{10}{2}}{\binom{13}{2}} = \frac{45}{78} = 57,7\%$.

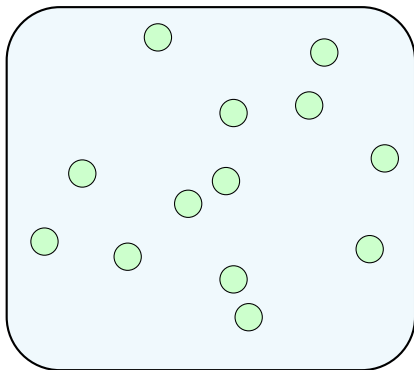
összes eset \rightarrow

$\binom{13}{2} = 78$
egyformán
valószínű
eset van



Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Egy vízilabdacsapat **13 tagja** közül **három játékos** doppingol.
A doppingtesztre kiválasztanak **két különböző** játékost,
minden lehetséges párt azonos valószínűséggel választva.

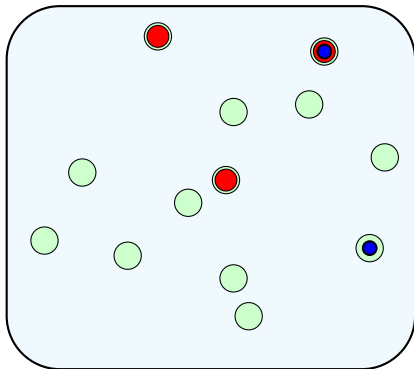


Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Egy vízilabdacsapat **13 tagja** közül **három játékos** doppingol.

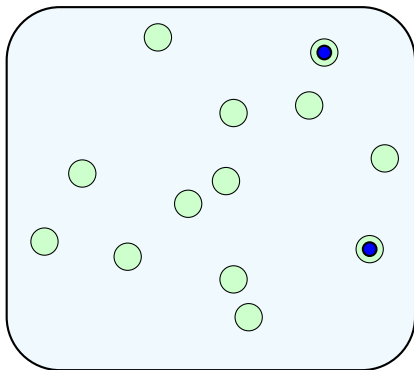
A doppingtesztre kiválasztanak **két különböző** játékost, minden lehetséges párt azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott játékosok közül **pontosan egy** doppingol?



Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Hányféleképpen lehet **13 játékos** közül **két különbözőt** választani?

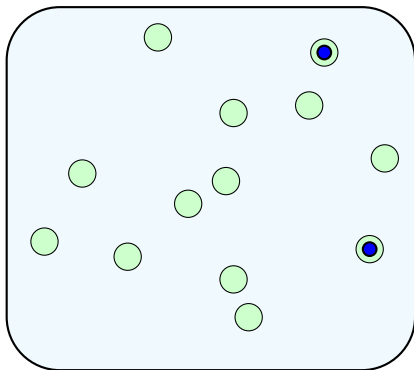


Visszatevés nélküli mintavétel: példa

első második

$$\frac{13 \cdot 12}{2} = \binom{13}{2} = 78$$

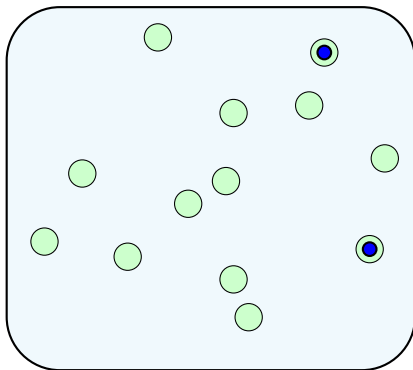
↑
a sorrend nem számít



Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Hányféleképpen lehet **egy doppingoló** és **egy nem doppingoló** játékost választani?

$\binom{13}{2} = 78$
egyformán
valószínű
eset van

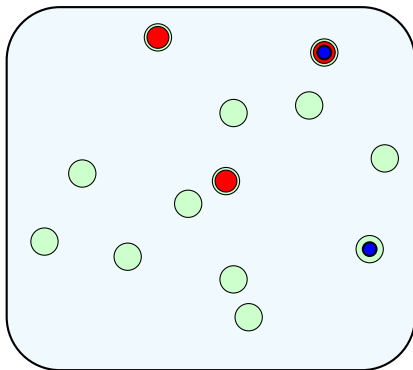


Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Hányféleképpen lehet **egy doppingoló** és **egy nem doppingoló** játékost választani?

$$3 \cdot 10 = 30$$

$\binom{13}{2} = 78$
egyformán
valószínű
eset van



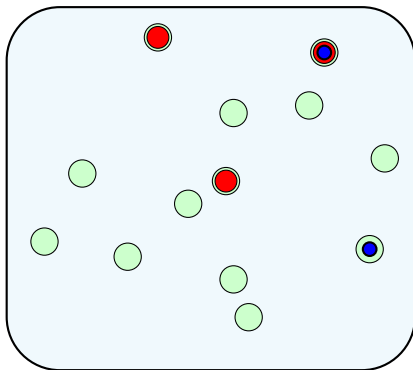
Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Hányféleképpen lehet **egy doppingoló** és **egy nem doppingoló** játékost választani?

$$3 \cdot 10 = 30$$

a doppingoló **háromféle**, a másik **tízféle** lehet
ezek mind különböző esetek

$\binom{13}{2} = 78$
egyformán
valószínű
eset van

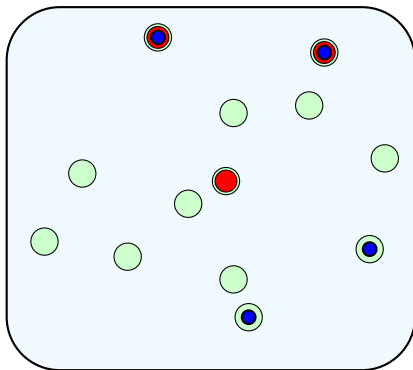


Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Annak valószínűsége, hogy a **két játékos** közül
pontosan egy doppingol:

$$\begin{array}{l} \text{egyik igen, másik nem} \rightarrow \frac{3 \cdot 10}{\binom{13}{2}} = \frac{30}{78} = 38,5\%. \\ \text{összes eset} \rightarrow \end{array}$$

$\binom{13}{2} = 78$
egyformán
valószínű
eset van



Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Annak valószínűsége, hogy a **két játékos** közül **pontosan egy** doppingol:

egyik igen, másik nem $\rightarrow \frac{3 \cdot 10}{\binom{13}{2}} = \frac{30}{78} = 38,5\%$.

összes eset

\rightarrow

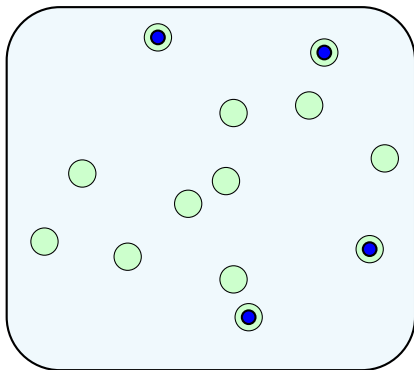
$$\binom{13}{2}$$

$$= \frac{30}{78}$$

$$= 38,5\%$$

mindkettő doppingol: $100 - 57,7 - 38,5 = 3,8\%$

$\binom{13}{2} = 78$
egyformán
valószínű
eset van



Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Egy vízilabdacsapat N tagja közül

Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Egy vízilabdacsapat N tagja közül M játékos doppingol.

Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Egy vízilabdacsapat N tagja közül M játékos doppingol.

A doppingtesztre kiválasztanak n különböző játékost, minden lehetséges csoportot azonos valószínűséggel választva.

Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Egy vízilabdacsapat N tagja közül M játékos doppingol.

A doppingtesztre kiválasztanak n különböző játékost, minden lehetséges csoportot azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott játékosok közül pontosan k doppingol?

Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Hányféleképpen lehet N játékos közül n különbözőt választani?

Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Hányféleképpen lehet N játékos közül n különbözőt választani?

$$\begin{array}{c} \text{első} \quad \text{második} \quad \quad \quad n. \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ N \cdot (N-1) \cdot \dots \cdot (N-n+1) \\ \hline n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1 \\ \uparrow \\ \text{a sorrend nem számít} \end{array} = \frac{N!}{n!(N-n)!} = \binom{N}{n}$$

Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Hányféleképpen lehet N játékos közül n különbözőt választani?

$$\begin{array}{c} \text{első} \quad \text{második} \quad \quad \quad n. \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ N \cdot (N-1) \cdot \dots \cdot (N-n+1) \\ \hline n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1 \end{array} = \frac{N!}{n!(N-n)!} = \binom{N}{n}$$

a sorrend nem számít

Hányféleképpen lehet k doppingoló és $n - k$ nem doppingoló játékost választani, ha összesen M doppingoló és $N - M$ nem doppingoló játékos van?

Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Hányféleképpen lehet N játékos közül n különbözőt választani?

$$\begin{array}{c} \text{első} \quad \text{második} \quad \quad n. \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ N \cdot (N-1) \cdot \dots \cdot (N-n+1) \\ \hline n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1 \\ \uparrow \\ \text{a sorrend nem számít} \end{array} = \frac{N!}{n!(N-n)!} = \binom{N}{n}$$

Hányféleképpen lehet k doppingoló és $n - k$ nem doppingoló játékost választani, ha összesen M doppingoló és $N - M$ nem doppingoló játékos van?

$$\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}$$

doppingolók nem doppingolók

Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Hányféleképpen lehet N játékos közül n különbözőt választani?

$$\begin{array}{c} \text{első} \quad \text{második} \quad \quad n. \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ N \cdot (N-1) \cdot \dots \cdot (N-n+1) \\ \hline n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1 \\ \uparrow \\ \text{a sorrend nem számít} \end{array} = \frac{N!}{n!(N-n)!} = \binom{N}{n}$$

Hányféleképpen lehet k doppingoló és $n - k$ nem doppingoló játékost választani, ha összesen M doppingoló és $N - M$ nem doppingoló játékos van?

$$\begin{array}{c} \binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k} \\ \swarrow \quad \uparrow \quad \nwarrow \\ \text{doppingolók} \quad \quad \text{nem doppingolók} \end{array}$$

bármelyik csoport bármelyikkel párosítható és különböző esetet ad, ezért lehet szorozni

Visszatevés nélküli mintavétel

- Egy dobozban N golyó van, közülük M **fekete**, a többi **fehér**.

Visszatevés nélküli mintavétel

- Egy dobozban N golyó van, közülük M **fekete**, a többi **fehér**.
- **Visszatevés nélkül** kihúznak n darabot (minden húzásnál minden, még a dobozban lévő golyót azonos valószínűséggel választva).

Visszatevés nélküli mintavétel

- Egy dobozban N golyó van, közülük M **fekete**, a többi **fehér**.
- **Visszatevés nélkül** kihúznak n darabot (minden húzásnál minden, még a dobozban lévő golyót azonos valószínűséggel választva).
- Tegyük fel, hogy $n \leq M$ és $n \leq N - M$. Annak valószínűsége, hogy pontosan k darab fekete golyót húznak ki:

Visszatevés nélküli mintavétel

- Egy dobozban N golyó van, közülük M **fekete**, a többi **fehér**.
- **Visszatevés nélkül** kihúznak n darabot (minden húzásnál minden, még a dobozban lévő golyót azonos valószínűséggel választva).
- Tegyük fel, hogy $n \leq M$ és $n \leq N - M$. Annak valószínűsége, hogy pontosan k darab fekete golyót húznak ki:

$$\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ fekete}) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Megjegyzés: a kihúzott fekete golyók száma **hipergeometrikus eloszlású**.

Mivel az $\binom{N}{n}$ lehetséges eset mindegyike egyformán valószínű, a **klasszikus valószínűségi mező** modelljét használtuk.

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van.

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van. Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik, minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét azonos valószínűséggel választva.

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van. Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik, minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt pontosan négyszer iszik kék bögréből?**

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van. Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik, minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt pontosan négyszer iszik kék bögréből?**

az **összes lehetőség** száma:

5

az első napon ötféle lehetőség van

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van.
Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik,
minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét
azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt**
pontosan négyszer iszik kék bögréből?

az **összes lehetőség** száma:



az első két napon $5 \cdot 5 = 25$ -féle lehetőség van
bármelyik bögre bármelyikkel választható, lehet szorozni

a bögrék különbözők

ezek az esetek egyformán valószínűk

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van. Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik, minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt pontosan négyszer iszik kék bögréből?**

az **összes lehetőség** száma:



az első három napon $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ -féle lehetőség van bármelyik bögre bármelyikkel választható, lehet szorozni

a bögrék különbözők

ezek az esetek egyformán valószínűk

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van.
Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik,
minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét
azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt**
pontosan négyszer iszik kék bögréből?

az összes lehetőség száma:



összesen 5^7 egyformán valószínű lehetőség van egy hét alatt
bármelyik bögre bármelyikkel választható, lehet szorozni

a bögrék különbözők

ezek az esetek egyformán valószínűek

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van. Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik, minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt pontosan négyszer iszik kék bögréből?**

5^7 egyformán valószínű lehetőség

jó lehetőség például, amikor első négy nap iszik kék bögréből:

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van. Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik, minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt pontosan négyszer iszik kék bögréből?**

5^7 egyformán valószínű lehetőség

jó lehetőség például, amikor első négy nap iszik kék bögréből:



Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van. Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik, minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt pontosan négyszer iszik kék bögréből?**

5^7 egyformán valószínű lehetőség

jó lehetőség például, amikor első négy nap iszik kék bögréből:



$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 3^4 \cdot 2^3$ ilyen lehetőség van bármelyik bögre bármelyikkel választható, lehet szorozni **a bögrék különbözők**

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van. Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik, minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt pontosan négyszer iszik kék bögréből?**

5^7 egyformán valószínű lehetőség

egy másik jó sorrend, ha az 1., 3., 4., 6. napon iszik kék bögréből:

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van. Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik, minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt pontosan négyszer iszik kék bögréből?**

5^7 egyformán valószínű lehetőség

egy másik jó sorrend, ha az 1., 3., 4., 6. napon iszik kék bögréből:



Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van. Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik, minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt pontosan négyszer iszik kék bögréből?**

5^7 egyformán valószínű lehetőség

egy másik jó sorrend, ha az 1., 3., 4., 6. napon iszik kék bögréből:



$3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 3^4 \cdot 2^3$ ilyen lehetőség van
bármelyik bögre bármelyikkel választható, lehet szorozni
a bögrék különbözők

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van. Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik, minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt pontosan négyszer iszik kék bögréből?**

5^7 egyformán valószínű lehetőség

jó lehetőségek száma:

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van. Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik, minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt pontosan négyszer iszik kék bögréből?**

5^7 egyformán valószínű lehetőség

jó lehetőségek száma:

színezések száma

lehetőségek száma adott színezésnél

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van. Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik, minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt pontosan négyszer iszik kék bögréből?**

5^7 egyformán valószínű lehetőség

jó lehetőségek száma:

$$\text{színezések száma} \times \text{lehetőségek száma adott színezésnél}$$
$$\binom{7}{4} \times 3^4 \cdot 2^3 = 35 \cdot 3^4 \cdot 2^3$$

ennyiféleképpen választhatjuk ki a négy kék napot a hétből minden színezéshez ugyanannyi lehetőség tartozik

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van. Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik, minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt pontosan négyszer iszik kék bögréből?**

5^7 egyformán valószínű le-
hetőség

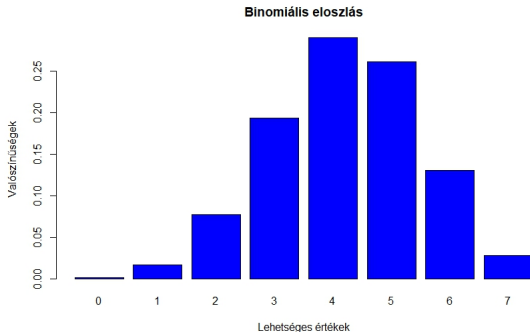
$$\mathbb{P}(\text{pontosan négyszer iszik kék bögréből}) = \frac{\binom{7}{4} \cdot 3^4 \cdot 2^3}{5^7},$$

$$\text{azaz } \frac{35 \cdot 81 \cdot 8}{78125} = 29,03\%.$$

Példa: visszatevéses mintavétel

3 kék, 2 zöld bögre, Péter hét napon át találomra választ.

$$\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ kék}) = \frac{\binom{7}{k} \cdot 3^k \cdot 2^{7-k}}{5^7}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 7.$$



A kék bögrés napok száma: lehetséges értékek és valószínűségek

Visszatevéses mintavétel

- Egy dobozban N golyó van, közülük M fekete, a többi fehér.
- **Visszatevéssel** kihúznak n darabot, minden húzásnál a korábbiakat elfelejtve mind az N golyót azonos valószínűséggel választva.
- Annak valószínűsége, hogy az n húzás közül pontosan k -nál jön fekete:

Visszatevéses mintavétel

- Egy dobozban N golyó van, közülük M fekete, a többi fehér.
- **Visszatevéssel** kihúznak n darabot, minden húzásnál a korábbiakat elfelejtve mind az N golyót azonos valószínűséggel választva.
- Annak valószínűsége, hogy az n húzás közül pontosan k -nál jön fekete:

$$\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ fekete}) = \binom{n}{k} \frac{M^k \cdot (N-M)^{n-k}}{N^n} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Visszatevéses mintavétel

- Egy dobozban N golyó van, közülük M fekete, a többi fehér.
- **Visszatevéssel** kihúznak n darabot, minden húzásnál a korábbiakat elfelejtve mind az N golyót azonos valószínűséggel választva.
- Annak valószínűsége, hogy az n húzás közül pontosan k -nál jön fekete:

melyik feketét húztunk (k húzás)

melyik k húzás fekete ↓ melyik fehéret húztuk ($n - k$ húzás)

$$\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ fekete}) = \binom{n}{k} \frac{M^k \cdot (N-M)^{n-k}}{N^n} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

↑
összes lehetőség

Visszatevéses mintavétel

- Egy dobozban N golyó van, közülük M fekete, a többi fehér.
- **Visszatevéssel** kihúznak n darabot, minden húzásnál a korábbiakat elfelejtve mind az N golyót azonos valószínűséggel választva.
- Annak valószínűsége, hogy az n húzás közül pontosan k -nál jön fekete:

melyik feketét húztunk (k húzás)

melyik k húzás fekete ↓ melyik fehéret húztuk ($n - k$ húzás)

$$\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ fekete}) = \binom{n}{k} \frac{M^k \cdot (N-M)^{n-k}}{N^n} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

↑
összes lehetőség

Megjegyzés: a kihúzott fekete golyók száma **binomiális eloszlású**.

Visszatevéses mintavétel: példa

Egy osztályba **14 lány** és **22 fiú** jár.

Visszatevéses mintavétel: példa

Egy osztályba **14 lány** és **22 fiú** jár.

A tanár minden fizikaórán kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal a korábbiakat elfelejtve, és mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet).

Visszatevéses mintavétel: példa

Egy osztályba **14 lány** és **22 fiú** jár.

A tanár minden fizikaórán kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal a korábbiakat elfelejtve, és mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet).

Visszatevéses mintavétel: példa

Egy osztályba **14 lány** és **22 fiú** jár.

A tanár minden fizikaórán kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal a korábbiakat elfelejtve, és mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet).

Mennyi a valószínűsége, hogy **hat egymást követő órán pontosan két lány** felel?

Visszatevéses mintavétel: példa

Egy osztályba **14 lány** és **22 fiú** jár.

$N = 36$ a diákok száma

A tanár minden fizikaórán kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal a korábbiakat elfelejtve, és mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet).

Mennyi a valószínűsége, hogy **hat egymást követő órán pontosan két lány** felel?

Visszatevéses mintavétel: példa

$M = 14$ a lányok száma

Egy osztályba **14 lány** és **22 fiú** jár.  $N = 36$ a diákok száma

A tanár minden fizikaórán kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal a korábbiakat elfelejtve, és mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet).

Mennyi a valószínűsége, hogy **hat egymást követő órán pontosan két lány** felel?

Visszatevéses mintavétel: példa

$M = 14$ a lányok száma

Egy osztályba **14 lány** és **22 fiú** jár. $N = 36$ a diákok száma

A tanár minden fizikaórán kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal a korábbiakat elfelejtve, és mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet).

$n = 6$ a minta nagysága

Mennyi a valószínűsége, hogy **hat egymást követő órán pontosan két lány** felel?

Visszatevéses mintavétel: példa

$M = 14$ a lányok száma

Egy osztályba **14 lány** és **22 fiú** jár. $N = 36$ a diákok száma

A tanár minden fizikaórán kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal a korábbiakat elfelejtve, és mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet).

$n = 6$ a minta nagysága

Mennyi a valószínűsége, hogy **hat egymást követő órán**

$k = 2$ a kérdés **pontosan két lány** felel?

Visszatevéses mintavétel: példa

$M = 14$ a lányok száma

Egy osztályba **14 lány** és **22 fiú** jár.

$N = 36$ a diákok száma

A tanár minden fizikaórán kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal a korábbiakat elfelejtve, és mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet).

$n = 6$ a minta nagysága

Mennyi a valószínűsége, hogy **hat egymást követő órán**

$k = 2$ a kérdés **← pontosan két lány** felel?

$$\mathbb{P}(\text{pontosan két lány}) = \binom{n}{k} \frac{M^k \cdot (N-M)^{n-k}}{N^n} = \binom{6}{2} \frac{14^2 \cdot 22^4}{36^6} = 31,6\%.$$

Visszatevéses mintavétel: példa

$M = 14$ a lányok száma

$N = 36$ a diákok száma

Egy osztályba **14 lány** és **22 fiú** jár.

A tanár minden fizikaórán kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal a korábbiakat elfelejtve, és mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet).

$n = 6$ a minta nagysága

Mennyi a valószínűsége, hogy **hat egymást követő órán**

$k = 2$ a kérdés **← pontosan két lány** felel?

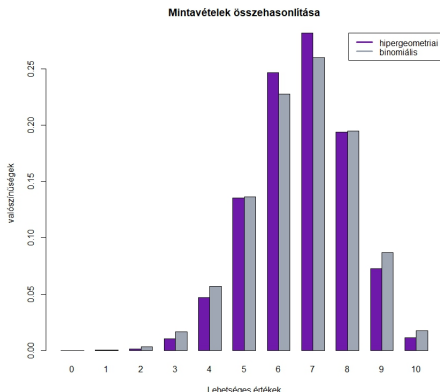
lányok kiválasztása fiúk kiválasztása

$$\mathbb{P}(\text{pontosan két lány}) = \binom{n}{k} \frac{M^k \cdot (N-M)^{n-k}}{N^n} = \binom{6}{2} \frac{14^2 \cdot 22^4}{36^6} = 31,6\%.$$

szorzás: bármely felelő bármely másikkal választható

↑ összes eset
↑ melyik két órán felel lány

Mintavételek összehasonlítása



Visszatevés nélküli mintavétel (hipergeometriai eloszlás) és visszatevéses mintavétel (binomiális eloszlás) összehasonlítása $N = 60, M = 40, n = 10$ esetén; ha N még nagyobb lenne n -hez képest, még jobban hasonlítana a két eloszlás

Házi feladat szeptember 25., hétfő, 10:15-ig

Péternek két tolla van, mind a kettőt találomra szokta beletenni az íróasztal 4 fiókjának valamelyikébe, minden fiókot azonos valószínűséggel választva (a két toll lehet ugyanabban a fiókban is, és így értve a tollak minden lehetséges elhelyezése egyformán valószínű).

- a) Mennyi a valószínűsége, hogy a két toll ugyanabban a fiókban van?
- b) Péter megnézte a felső fiókot, abban nem volt egyik toll sem. Erre feltételesen mennyi a valószínűsége, hogy a két toll ugyanabban a fiókban van?