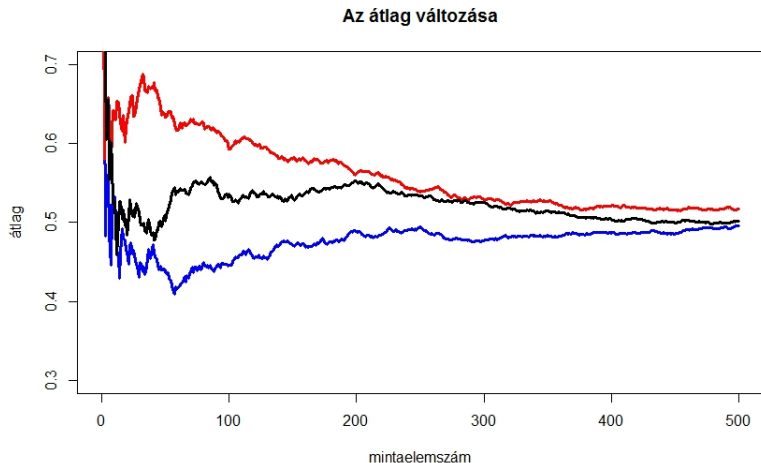


# Az átlag konvergenciája



A  $[0, 1]$  intervallumon egyenletes eloszlásból vett minta átlaga  $n = 500$ -ig  
`a<-runif(500, min=0, max=1) avonas=a for (j in 1:500) avonas[j]=sum(a[1:j]),  
plot(avonas, type="l", lwd="3", col="blue", main="Az átlag változása",`

# Konvergenciafajták

**Valószínűségi változók sorozatának** (mint amilyen az átlagok sorozata) **többféle értelemben** definiálhatjuk a határértékét.

A  $Z_1, Z_2, \dots$ , valószínűségi változókból álló sorozat **sztochasztikusan konvergál** az  $Z$  valószínűségi változóhoz, ha minden  $\varepsilon > 0$ -ra

$$\mathbb{P}(|Z_n - Z| > \varepsilon) \rightarrow 0$$

teljesül  $n \rightarrow \infty$  esetén.

## Konvergenciafajták

**Valószínűségi változók sorozatának** (mint amilyen az átlagok sorozata) **többféle értelemben** definiálhatjuk a határértékét.

A  $Z_1, Z_2, \dots$ , valószínűségi változókból álló sorozat **sztochasztikusan konvergál** az  $Z$  valószínűségi változóhoz, ha minden  $\varepsilon > 0$ -ra

$$\mathbb{P}(|Z_n - Z| > \varepsilon) \rightarrow 0$$

teljesül  $n \rightarrow \infty$  esetén.

A  $Z_1, Z_2, \dots$ , valószínűségi változókból álló sorozat **1 valószínűséggel** konvergál az  $Z$  valószínűségi változóhoz, ha

$$\mathbb{P}(\omega \in \Omega : Z_n(\omega) \rightarrow Z(\omega) \text{ } n \rightarrow \infty \text{ esetén}) = 1.$$

# Konvergenciafajták

**Valószínűségi változók sorozatának** (mint amilyen az átlagok sorozata) **többféle értelemben** definiálhatjuk a határértékét.

A  $Z_1, Z_2, \dots$ , valószínűségi változókból álló sorozat **sztochasztikusan konvergál** az  $Z$  valószínűségi változóhoz, ha minden  $\varepsilon > 0$ -ra

$$\mathbb{P}(|Z_n - Z| > \varepsilon) \rightarrow 0$$

teljesül  $n \rightarrow \infty$  esetén.

A  $Z_1, Z_2, \dots$ , valószínűségi változókból álló sorozat **1 valószínűséggel** konvergál az  $Z$  valószínűségi változóhoz, ha

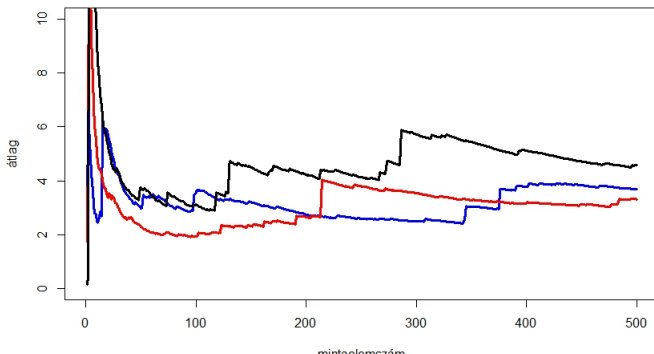
$$\mathbb{P}(\omega \in \Omega : Z_n(\omega) \rightarrow Z(\omega) \text{ } n \rightarrow \infty \text{ esetén}) = 1.$$

1 valószínűséggel konvergál a sorozat  $\Rightarrow$  sztochasztikusan is, de fordítva nem feltétlenül.

## Az átlag változása

```
a<-abs(rcauchy(500)) avonas=a for (j in 1:500) avonas[j]=sum(a[1:j])/j
plot(avonas, type="l", lwd="3", col="blue", main="Az átlag változása
nem létező várható érték esetén", xlab="mintaelemszám", ylab="átlag",
ylim=c(0, 10)) b<-abs(rcauchy(500)) bvonas=b for (j in 1:500) bvonas[j]=sum
lines(bvonas, type="l", lwd="3", col="red") c<-abs(rcauchy(500)) cvon
nas=c for (j in 1:500) cvonas[j]=sum(c[1:j])/j lines(cvonas, type="l", lwd="3")
```

Az átlag változása nem létező várható érték esetén



## A nagy számok gyenge törvénye

Legyenek  $X_1, \dots, X_n$  független azonos eloszlású véges szórású valószínűségi változók. Legyen  $m = \mathbb{E}(X_1)$  és  $\sigma = D(X_1)$ .

A korábbiak szerint

$$\mathbb{E}(\bar{X}) = m; \quad D^2(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

## A nagy számok gyenge törvénye

Legyenek  $X_1, \dots, X_n$  független azonos eloszlású véges szórású valószínűségi változók. Legyen  $m = \mathbb{E}(X_1)$  és  $\sigma = D(X_1)$ .

A korábbiak szerint

$$\mathbb{E}(\bar{X}) = m; \quad D^2(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

A Csebisev-egyenlőtlenség szerint minden  $\varepsilon > 0$ -ra

$$\mathbb{P}(|\bar{X} - m| > \varepsilon) \leq \frac{D^2(\bar{X})}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Tehát  $\bar{X} \rightarrow m = \mathbb{E}(X_1)$  sztochasztikusan.

## A nagy számok törvénye

### Tétel (A nagy számok gyenge törvénye)

*Legyenek  $X_1, X_2, \dots$  olyan valószínűségi változók, melyek függetlenek és azonos eloszlásúak. Tegyük fel, hogy  $D(X_1) < \infty$ . Ekkor minden  $\varepsilon > 0$  esetén*

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mathbb{E}(X_1)| > \varepsilon) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

*azaz  $\bar{X}_n \rightarrow \mathbb{E}(X_1)$  sztochasztikusan.*

## A nagy számok törvénye

### Tétel (A nagy számok gyenge törvénye)

Legyenek  $X_1, X_2, \dots$  olyan valószínűségi változók, melyek függetlenek és azonos eloszlásúak. Tegyük fel, hogy  $D(X_1) < \infty$ . Ekkor minden  $\varepsilon > 0$  esetén

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mathbb{E}(X_1)| > \varepsilon) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

azaz  $\bar{X}_n \rightarrow \mathbb{E}(X_1)$  sztochasztikusan.

### Tétel (A nagy számok erős törvénye)

Legyenek  $X_1, X_2, \dots$  valószínűségi változók, melyek függetlenek és azonos eloszlásúak. Tegyük fel még, hogy  $m = \mathbb{E}(X_1) < \infty$ . Ekkor

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \rightarrow \mathbb{E}(X_1) = m$$

teljesül 1 valószínűséggel  $n \rightarrow \infty$  esetén.

A második esetben gyengébb feltevésből erősebb állítás következik.

# Konvolúció

## Állítás

*Legyenek  $X$  és  $Y$  független, abszolút folytonos valószínűségi változók, az  $X$  sűrűségfüggvénye  $f$ , az  $Y$  sűrűségfüggvénye  $g$ . Ekkor az  $X + Y$  valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:*

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t - s)ds.$$

Ennek segítségével igazolható, hogy független normális eloszlások összege is normális eloszlású.

# Konvolúció

## Állítás

Legyenek  $X$  és  $Y$  független, nemnegatív egész értékű valószínűségi változók. Ekkor az  $X + Y$  valószínűségi változó eloszlását az alábbi módon határozhatjuk meg:

$$\mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_{l=0}^k \mathbb{P}(X = l)\mathbb{P}(Y = k - l) \quad (k \geq 0).$$

Továbbá

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y); \quad D(X) = \sqrt{D^2(X) + D^2(Y)}.$$

*Bizonyítás.* Diszjunkt eseményekre való szétbontással, illetve a függetlenség definíciójának felhasználásával:

$$\mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_{l=0}^k \mathbb{P}(X = l, Y = k - l) = \sum_{l=0}^k \mathbb{P}(X = l)\mathbb{P}(Y = k - l).$$


## Konvolúció: példa

### Állítás

Legyenek  $X$  és  $Y$  független Poisson-eloszlású valószínűségi változók,  $X$  paramétere  $\lambda$ , az  $Y$  paramétere  $\mu$ . Ekkor az  $X + Y$  valószínűségi változó is Poisson-eloszlású, paramétere  $\lambda + \mu$ , várható értéke és szórásnégyzete is  $\lambda + \mu$ .

*Bizonyítás.* Legyen  $k \geq 0$  tetszőleges. Ekkor a Poisson-eloszlás definíciója alapján

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X + Y = k) &= \sum_{l=0}^k \mathbb{P}(X = l)\mathbb{P}(Y = k - l) = \sum_{l=0}^k \frac{\lambda^l}{l!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\mu^{k-l}}{(k-l)!} e^{-\mu} = \\ &= e^{-\lambda+\mu} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^k \frac{k!}{l!(k-l)!} \lambda^l \mu^{k-l} = \\ &= e^{-\lambda+\mu} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \lambda^l \mu^{k-l} = e^{-\lambda+\mu} \frac{(\lambda + \mu)^k}{k!},\end{aligned}$$

ahol az utolsó lépésben a binomiális tételt használtuk. 

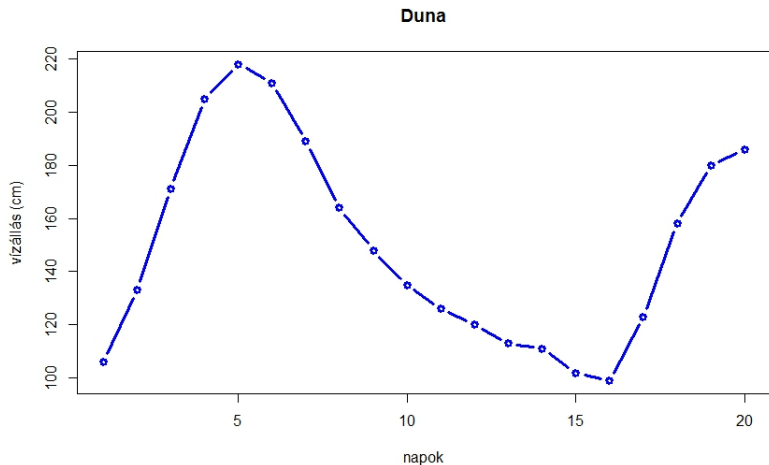
## Nevezetes eloszlások összege

- $X, Y$  független Poisson-eloszlásúak  $\lambda_1$  és  $\lambda_2$  paraméterrel  $\Rightarrow X + Y$  Poisson-eloszlású  $\lambda_1 + \lambda_2$  paraméterrel;
- $X, Y$  független binomiális eloszlásúak,  $n_1$ , illetve  $n_2$  renddel, és azonos  $p$  paraméterrel

## Nevezetes eloszlások összege

- $X, Y$  független Poisson-eloszlásúak  $\lambda_1$  és  $\lambda_2$  paraméterrel  $\Rightarrow X + Y$  Poisson-eloszlású  $\lambda_1 + \lambda_2$  paraméterrel;
- $X, Y$  független binomiális eloszlásúak,  $n_1$ , illetve  $n_2$  renddel, és azonos  $p$  paraméterrel  $\Rightarrow X + Y$  binomiális eloszlású  $n_1 + n_2$  renddel és  $p$  paraméterrel;
- $X_1, X_2, \dots, X_n$  független normális eloszlásúak  $\Rightarrow$  az összegük és az átlaguk is normális eloszlású;
- $X, Y$  exponenciális eloszlásúak  $\lambda$  paraméterrel  $\Rightarrow$  az összegük Gamma-eloszlású  $a = 2$  renddel és  $\lambda$  paraméterrel

## Valószínűségi vektorváltozó: példa



A Duna vízállása 20 napon keresztül (az adatok forrása: *Országos Vízelző Szolgálat*):  $X_1 = 106, X_2 = 133, \dots, X_{20} = 186$

## Valószínűségi vektorváltozó

Sok esetben nem egyetlen valószínűségi változó viselkedését vizsgáljuk, hanem több valószínűségi változó **együttes viselkedését**. Például:

- egy véletlen folyamat (tőzsdeindex, egy folyó vízállása, egy ország népessége) különböző időpontokban;
- egy ember (vagy ország, cég stb.) több különböző jellemzője (például egy ember életkora, jövedelme és kiadásai);
- egy mérésorozatban a különböző mérések során megfigyelt értékek (például egy mérést tízszer megismételve tíz különböző valószínűségi változót kapunk).

Valószínűségi változók együttesét **valószínűségi vektorváltozónak** nevezük. Ez állhat **összefüggő** (mint az első két esetben) vagy **független** (mint tipikusan a harmadik esetben) valószínűségi változókból is.

Amint látni fogjuk, az eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény az együttes esetben is definiálható.

## Valószínűségi vektorváltozó

Az

$$\underline{X} = (X_1, \dots, X_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

függvény **valószínűségi vektorváltozó**, ha  $X_1, X_2, \dots, X_n$  valószínűségi változók.

- 1000 embert megkérdezzük a havi jövedelméről. Legyen  $X_i$  az  $i$ . megkérdezett jövedelme. Ekkor  $(X_1, X_2, \dots, X_{1000})$  valószínűségi vektorváltozó.
- $(X_1, X_2, \dots, X_{20})$  is valószínűségi vektorváltozó, ahol  $X_j$  a Duna vízálása a  $j$ . napon ( $j = 1, 2, \dots, 20$ ).

Ha  $\underline{X}$  valószínűségi vektorváltozó, akkor az  $X_j$  valószínűségi változó eloszlását az  $\underline{X}$   **$i$ . peremeloszlásának** nevezzük.

Az  $\underline{X}$  valószínűségi vektorváltozó **diszkrét**, ha értékészlete véges vagy megszámlálhatóan végtelen.

## Együttes eloszlásfüggvény

Az  $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$  valószínűségi vektorváltozó **együttes eloszlásfüggvénye** az  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$  függvény, melyre

$$F(\underline{t}) = F(t_1, \dots, t_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq t_1, X_2 \leq t_2, \dots, X_n \leq t_n),$$

ha  $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$  valós számok. Például:

- egy véletlenszerűen választott embert megkérdezzük a havi jövedelméről ( $X_1$ ), a havi kiadásairól ( $X_2$ ), és az életkoráról ( $X_3$ );
- ekkor  $(X_1, X_2, X_3)$  valószínűségi vektorváltozó, és
- ha eloszlásfüggvénye  $F$ , akkor például

$$F(200000, 150000, 40) = \mathbb{P}(X_1 \leq 200000, X_2 \leq 150000, X_3 \leq 40)$$

annak valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott ember havi jövedelme legfeljebb 200000 (forint), havi kiadása legfeljebb 150000 (forint), életkora pedig legfeljebb 40 (év).

## Valószínűségi változók függetlensége

- **két valószínűségi változóra:** az  $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  valószínűségi változók **függetlenek**, ha

$$\mathbb{P}(X \leq t_1, Y \leq t_2) = \mathbb{P}(X \leq t_1) \cdot \mathbb{P}(Y \leq t_2)$$

teljesül tetszőleges  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  valós számokra.

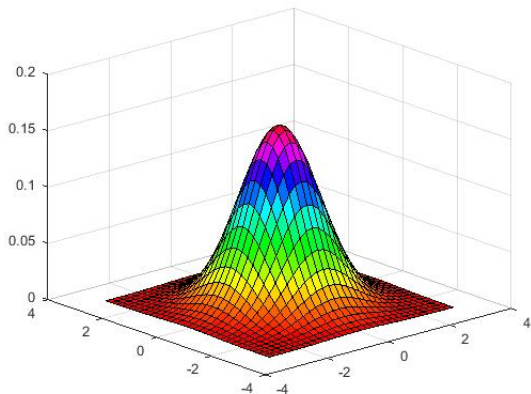
- **véges sok valószínűségi változóra:**  $X_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  valószínűségi változók **függetlenek**, ha

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 \leq t_1, X_2 \leq t_2, \dots, X_n \leq t_n) &= \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq t_1) \cdot \mathbb{P}(X_2 \leq t_2) \dots \mathbb{P}(X_n \leq t_n) \end{aligned}$$

teljesül tetszőleges  $t_1, t_2, \dots, t_n$  valós számokra.

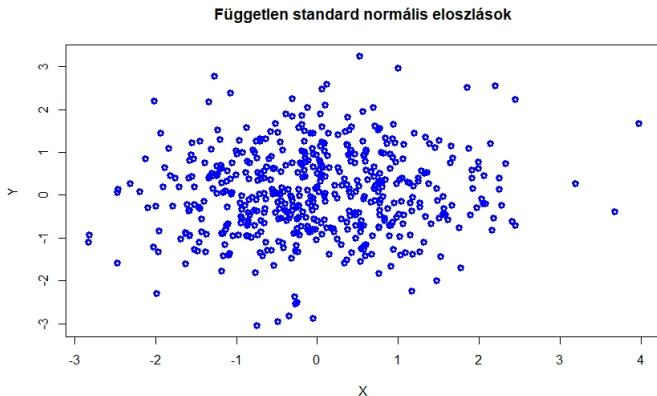
- **megszámlálható sok valószínűségi változóra:** az  $X_1, X_2, X_3 \dots$  valószínűségi változók **függetlenek**, ha közülük bármely véges sokat kiválasztva független valószínűségi változókat kapunk.

## Kétdimenziós normális eloszlás



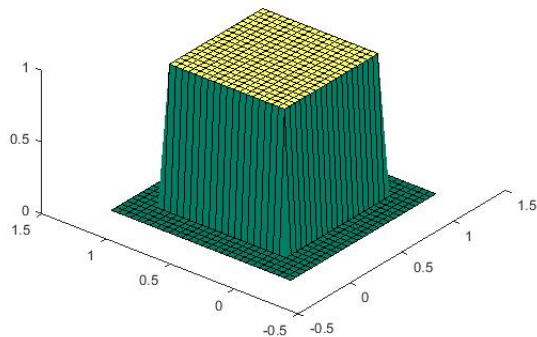
Két független standard normális eloszlás együttes sűrűségfüggvénye. Azaz:  $(X, Y)$  együttes sűrűségfüggvénye, ahol  $X, Y$  függetlenek,  $N(0, 1)$  eloszlásúak.

# Kétdimenziós normális eloszlás



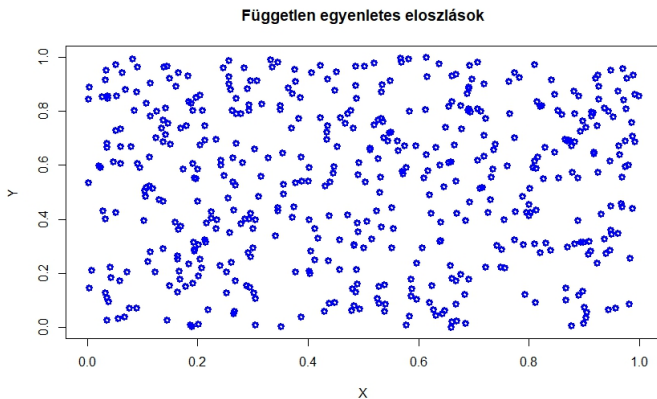
500 darab véletlen pont a síkon, melyek koordinátái független standard normális eloszlásúak. Ahol nagyobb az együttes sűrűségfüggvény (előző ábra), oda több pont esik.

## Kétdimenziós egyenletes eloszlás



$(X, Y)$  együttes sűrűségfüggvénye, ahol  $X$  és  $Y$  függetlenek és a  $[0, 1]$  intervallumon egyenletes eloszlásúak

# Kétdimenziós egyenletes eloszlás



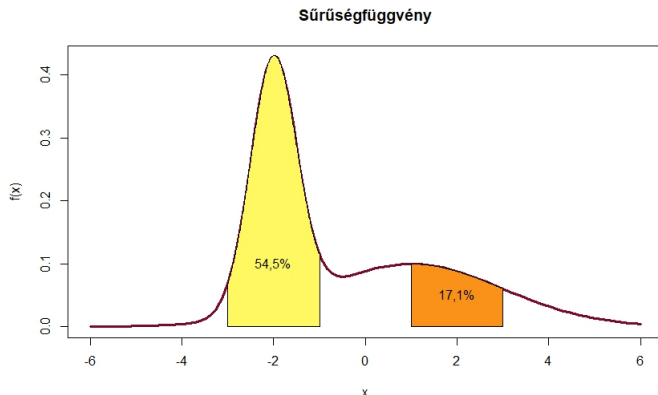
500 darab véletlen pont a síkon, melyek koordinátái függetlenek és a  $[0, 1]$  intervallumon egyenletes eloszlásúak (az együttes sűrűségfüggvény az előző ábrán látható).

## Együttes eloszlás: példa

Kétszer dobunk szabályos kockával. Legyen  $X$  az első dobás,  $Y$  pedig a dobott számok közül a nagyobb. Ekkor az  $(X, Y)$  valószínűségi vektorváltozó együttes eloszlása:

$X/Y$	1	2	3	4	5	6	összesen
1	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/6$
2	0	$1/18$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/6$
3	0	0	$1/12$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/6$
4	0	0	0	$1/9$	$1/36$	$1/36$	$1/6$
5	0	0	0	0	$5/36$	$1/36$	$1/6$
6	0	0	0	0	0	$1/6$	$1/6$
összesen	$1/36$	$1/12$	$5/36$	$7/36$	$1/4$	$11/36$	1

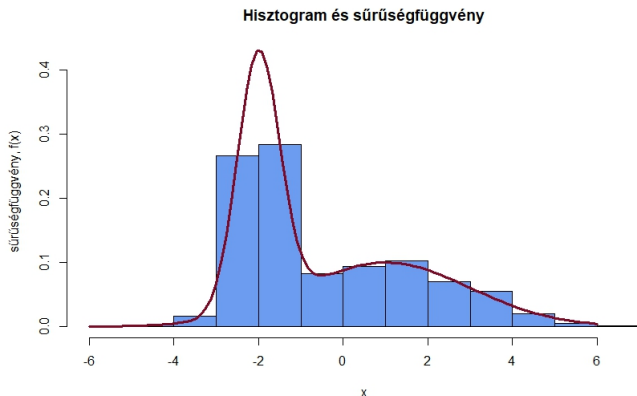
# Sűrűségfüggvény



Ha  $X$  sűrűségfüggvénye  $f$  (ami most az ábrán látható függvény):  $\mathbb{P}(-3 \leq X \leq -1) = \int_{-3}^{-1} f(x)dx = 54,5\%$ ;

$\mathbb{P}(1 \leq X \leq 3) = \int_1^3 f(x)dx = 17,1\%$ .

# Sűrűségfüggvény



Egy sűrűségfüggvény és hozzá tartozó ezer elemű független minta hisztogramja; nagyobb a sűrűségfüggvény  $\rightarrow$  nagyobb a gyakoriság;  
minta: független valószínűségi változók, melyek mindegyikének  $f$  a sűrűségfüggvénye

## Sűrűségfüggvény: definíció

Az  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  valószínűségi változó **sűrűségfüggvénye** az  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, ha

$$\mathbb{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$$

teljesül minden  $t \in \mathbb{R}$  számra.

**Nem minden** valószínűségi változónak van sűrűségfüggvénye, például a diszkrétnek nincs. Ha  $X$ -nek **van sűrűségfüggvénye**, akkor **abszolút folytonos** valószínűségi változónak nevezzük.

Ha az  $X$  valószínűségi változó sűrűségfüggvénye  $f$ , akkor tetszőleges  $a < b$  számokra

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx.$$

## A sűrűségfüggvény tulajdonságai

Legyen  $X$  abszolút folytonos valószínűségi változó, melynek  $F$  az eloszlásfüggvénye. (a) Ha  $f$  az  $X$  sűrűségfüggvénye, akkor minden  $t \in \mathbb{R}$  számra

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx.$$

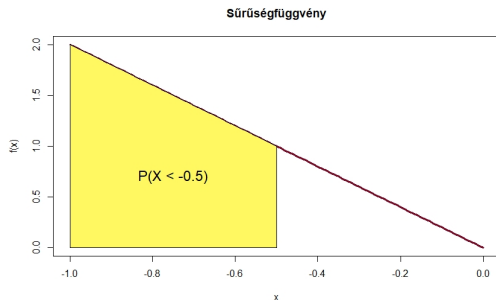
(b) Az  $f(t) = F'(t)$  függvény (azokra a  $t$ -kre, ahol  $F$  differenciálható) az  $X$  sűrűségfüggvénye.

Ha az  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény sűrűségfüggvény, akkor

- ❶  $f(x) \geq 0$  teljesül „majdnem minden”  $x \in \mathbb{R}$ -re (például véges vagy megszámlálható sok kivétel lehetséges).
- ❷  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ .

*Fordítva:* ha  $f$  teljesíti ezt a két tulajdonságot, akkor van olyan valószínűségi változó, aminek  $f$  a sűrűségfüggvénye.

## Sűrűségfüggvény: példa



Ha  $X$  sűrűségfüggvénye  $f$ , akkor

$$F(-1/2) = \mathbb{P}(X \leq -1/2) = \int_{-\infty}^{-1/2} f(x) dx.$$

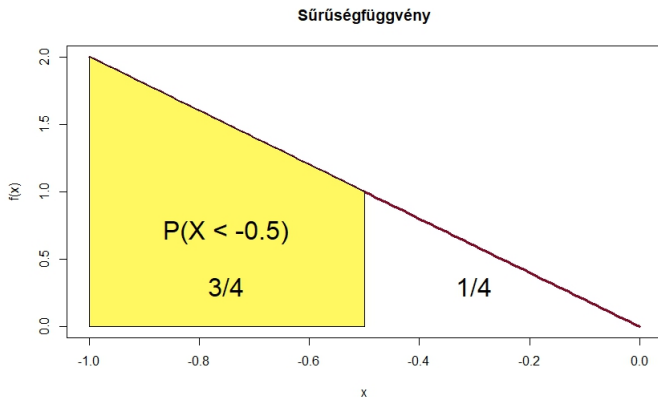
## Sűrűségfüggvény: példa

Legyen az  $X$  valószínűségi változó sűrűségfüggvénye  $f(x) = 2|x|$ , ha  $-1 < x < 0$ , és 0 különben. Mennyi  $X$  eloszlásfüggvényének értéke a  $-1/2$  helyen?

Felhasználva az **eloszlásfüggvény** és a **sűrűségfüggvény** definícióját, illetve hogy  $x \leq -1$  esetén  $f(x) = 0$ , azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} F(-1/2) &= \mathbb{P}(X \leq -1/2) = \int_{-\infty}^{-1/2} f(x) dx = \int_{-1}^{-1/2} f(x) dx = \\ &= \int_{-1}^{-1/2} 2|x| dx = - \int_{-1}^{-1/2} 2x dx = - [x^2]_{x=-1}^{x=-1/2} = \\ &= - \left( \frac{1}{4} - 1 \right) = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

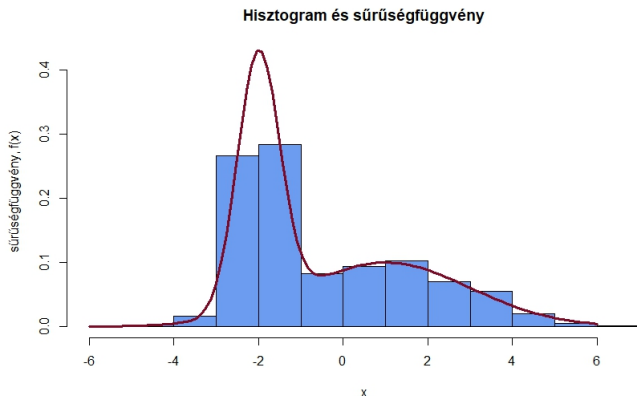
## Sűrűségfüggvény: példa



Ha  $X$  sűrűségfüggvénye  $f$ , akkor

$$F(-1/2) = \mathbb{P}(X \leq -1/2) = \int_{-\infty}^{-1/2} f(x) dx = \frac{3}{4}.$$

# Sűrűségfüggvény



Egy sűrűségfüggvény és hozzá tartozó ezer elemű független minta histogramja – mennyi lehet az  $f$  sűrűségfüggvényű valószínűségi változó **várható értéke** és **szórása**?

## Diszkrét és abszolút folytonos eset

A **várható értéket** olyan formában nem tudjuk definiálni abszolút folytonos eloszlásokra, mint diszkrét esetben, hiszen  $\mathbb{P}(X = x) = 0$  minden  $x$ -re. Helyette:

**diszkrét**

$X$  lehetséges értékei:  $x_1, x_2, \dots$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \cdot \mathbb{P}(X = x_j)$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 \cdot \mathbb{P}(X = x_j)$$

**abszolút folytonos**

$X$  sűrűségfüggvénye:  $f$ .

## Diszkrét és abszolút folytonos eset

A **várható értéket** olyan formában nem tudjuk definiálni abszolút folytonos eloszlásokra, mint diszkrét esetben, hiszen  $\mathbb{P}(X = x) = 0$  minden  $x$ -re. Helyette:

**diszkrét**

$X$  lehetséges értékei:  $x_1, x_2, \dots$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \cdot \mathbb{P}(X = x_j)$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 \cdot \mathbb{P}(X = x_j)$$

**abszolút folytonos**

$X$  sűrűségfüggvénye:  $f$ .

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx$$

## Diszkrét és abszolút folytonos eset

A **várható értéket** olyan formában nem tudjuk definiálni abszolút folytonos eloszlásokra, mint diszkrét esetben, hiszen  $\mathbb{P}(X = x) = 0$  minden  $x$ -re. Helyette:

**diszkrét**

$X$  lehetséges értékei:  $x_1, x_2, \dots$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \cdot \mathbb{P}(X = x_j)$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 \cdot \mathbb{P}(X = x_j)$$

**abszolút folytonos**

$X$  sűrűségfüggvénye:  $f$ .

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx$$

$$D(X) = \sqrt{\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)} = \sqrt{\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2}$$

## Diszkrét és abszolút folytonos eset

A **várható értéket** olyan formában nem tudjuk definiálni abszolút folytonos eloszlásokra, mint diszkrét esetben, hiszen  $\mathbb{P}(X = x) = 0$  minden  $x$ -re. Helyette:

**diszkrét**

$X$  lehetséges értékei:  $x_1, x_2, \dots$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \cdot \mathbb{P}(X = x_j)$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 \cdot \mathbb{P}(X = x_j)$$

$$D(X) = \sqrt{\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)} = \sqrt{\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2}$$

$$\mathbb{E}(X^k) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^k \cdot \mathbb{P}(X = x_j)$$

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{j=1}^{\infty} g(x_j) \cdot \mathbb{P}(X = x_j)$$

**abszolút folytonos**

$X$  sűrűségfüggvénye:  $f$ .

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx$$

$$\mathbb{E}(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx$$

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$$

## Várható érték és szórás abszolút folytonos esetben

Legyen  $X$  abszolút folytonos valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye  $f$ . Ekkor  $X$  **várható értéke**:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx,$$

ha ez az integrál létezik és véges.

Tegyük fel, hogy az  $X$  valószínűségi változó abszolút folytonos, sűrűségfüggvénye  $f$ , és  $\mathbb{E}(X^2)$  létezik, azaz az  $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx$  integrál véges. Ekkor  $X$  **szórásnégyzete**:

$$D^2(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2,$$

**szórása** pedig

$$D(X) = \sqrt{\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)} = \sqrt{\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2}.$$

A szórás definíciója megegyezik a diszkrét esetben [használttal](#). 

## Momentumok

Az  $X$  valószínűségi változók  **$k$ . momentuma** a  $k$ . hatványának várható értéke:

$$\mathbb{E}(X^k).$$

Általában igaz, hogy ha  $X$  abszolút folytonos valószínűségi változó,  $f$  a sűrűségfüggvénye, és  $\mathbb{E}(g(X))$  létezik, akkor

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x) dx.$$

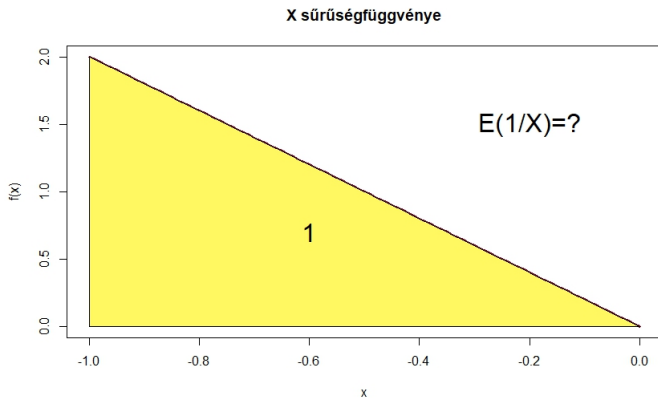
Ezért a  $k$ . momentum kiszámítása:

$$\mathbb{E}(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx.$$

Következmény: a **szórásnégyzetet** a következőképpen számíthatjuk ki abszolút folytonos  $X$  valószínűségi változó esetén:

$$D^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx \right]^2.$$

# Várható érték abszolút folytonos esetben: példa



## Várható érték abszolút folytonos esetben: példa

Legyen az  $X$  valószínűségi változó sűrűségfüggvénye  $f(x) = 2|x|$ , ha  $-1 < x < 0$ , és 0 különben. Mennyi az  $1/X$  valószínűségi változó várható értéke?

Mivel  $X$  sűrűségfüggvénye azonosan 0, ha  $x > 0$ , ezért  $X < 0$  és  $1/X < 0$  biztosan teljesül. Így  $\mathbb{E}(X) < 0$  teljesülni fog.

Pontosabban, mivel

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x) dx,$$

a  $g(x) = 1/x$  függvénnyel:

$$\mathbb{E}(1/X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} \cdot f(x) dx = \int_{-1}^0 \frac{2|x|}{x} dx = \int_{-1}^0 (-2) dx = -2.$$

## Várható érték abszolút folytonos esetben: példa

Tegyük fel, hogy a holnap hulló csapadék mennyiségének sűrűségfüggvénye az alábbi:

$$f(x) = \begin{cases} 0,2, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1; \\ 0,4, & \text{ha } 1 < x \leq 3; \\ 0 & \text{ha } x < 0 \text{ vagy } x > 2. \end{cases}$$

Jelölje a csapadékmennyiséget  $X$ . A csapadékmennyiség **várható értéke**:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \int_0^1 x \cdot 0,2 dx + \int_1^3 x \cdot 0,4 dx = \\ &= 0,2 \cdot \left( \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) + 0,4 \cdot \left( \frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right) = 1,7. \end{aligned}$$

## Szórás abszolút folytonos esetben: példa

Tegyük fel, hogy a holnap hulló csapadék mennyiségének sűrűségfüggvénye az alábbi:

$$f(x) = \begin{cases} 0,2, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1; \\ 0,4, & \text{ha } 1 < x \leq 3; \\ 0 & \text{ha } x < 0 \text{ vagy } x > 2. \end{cases}$$

Már láttuk, hogy  $\mathbb{E}(X) = 1,7$ .

A csapadékmennyiség négyzetének várható értéke:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) \, ds = \int_0^1 x^2 \cdot 0,2 \, dx + \int_1^3 x^2 \cdot 0,4 \, dx = \\ &= 0,2 \cdot \left( \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) + 0,4 \cdot \left( \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} \right) = 3,53. \end{aligned}$$

Ez alapján a csapadékmennyiség szórása:

$$D(X) = \sqrt{\mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2} = \sqrt{3,53 - 1,7^2} = 0,8.$$