

Kvantilisek (8. előadás)

Definíció (Kvantilis)

Legyen $0 \leq z \leq 1$, és X egy valószínűségi változó. Ekkor az X valószínűségi változó z -kvantilise:

$$q_z = \inf\{t \in \mathbb{R} : F(t) \geq z\}.$$

Ha az X eloszlásfüggvénye, azaz az $F(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$ függvény folytonos, akkor az igaz, hogy

$$F(q_z) = \mathbb{P}(X \leq q_z) = z,$$

azaz z az a szám, aminél X éppen z valószínűséggel kisebb.

Kvantilisek (8. előadás)

Definíció (Kvantilis)

Legyen $0 \leq z \leq 1$, és X egy valószínűségi változó. Ekkor az X valószínűségi változó z -kvantilise:

$$q_z = \inf\{t \in \mathbb{R} : F(t) \geq z\}.$$

Ha az X eloszlásfüggvénye, azaz az $F(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$ függvény folytonos, akkor az igaz, hogy

$$F(q_z) = \mathbb{P}(X \leq q_z) = z,$$

azaz z az a szám, aminél X éppen z valószínűséggel kisebb.

A $z = 1/2$ -kvantilis a medián: $\mathbb{P}(X \leq m) = 1/2$.

Kvantilisek (8. előadás)

Definíció (Kvantilis)

Legyen $0 \leq z \leq 1$, és X egy valószínűségi változó. Ekkor az X valószínűségi változó z -kvantilise:

$$q_z = \inf\{t \in \mathbb{R} : F(t) \geq z\}.$$

Ha az X eloszlásfüggvénye, azaz az $F(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$ függvény folytonos, akkor az igaz, hogy

$$F(q_z) = \mathbb{P}(X \leq q_z) = z,$$

azaz z az a szám, aminél X éppen z valószínűséggel kisebb.

A $z = 1/2$ -kvantilis a medián: $\mathbb{P}(X \leq m) = 1/2$.

A medián fontos tulajdonsága: a $\mathbb{E}(|X - u|)$ érték az $u = m$ esetén a legkisebb, ahol m a medián.

Összehasonlításképpen: az $\mathbb{E}((X - u)^2)$ érték az $u = \mathbb{E}(X)$ esetén a legkisebb.

Házi feladat november 7., hétfő, 10:15-ig

Legyen az X valószínűségi változó egyenletes eloszlású a $(0, 1)$ intervallumon. Határozzuk meg és ábrázoljuk (a) az X^3 valószínűségi változó eloszlásfüggvényét; (b) a $-\log X$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét.

Világos, hogy ha $t < 0$, akkor $\mathbb{P}(X^3 \leq t) = 0$, és ha $t > 1$, akkor $\mathbb{P}(X^3 \leq t) = 1$, hiszen X és így X^3 is 0 és 1 közé esik. Ha pedig $0 \leq t \leq 1$, akkor

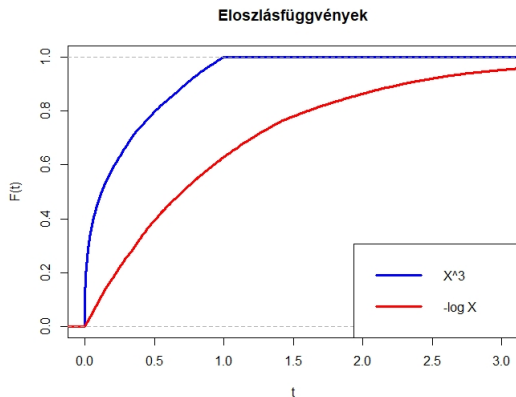
$$F_{X^3}(t) = \mathbb{P}(X^3 \leq t) = \mathbb{P}(X \leq \sqrt[3]{t}) = \sqrt[3]{t}.$$

A második esetben, $-\log X$ mindenképpen pozitív, tehát negatív t értékekre az eloszlásfüggvény 0 lesz. Ha pedig $t > 0$, akkor

$$F_{-\log X}(t) = \mathbb{P}(-\log X \leq t) = \mathbb{P}(\log X \geq -t) = \mathbb{P}(X \geq e^{-t}) = 1 - e^{-t}.$$

Vagyis $-\log X$ exponenciális eloszlású 1 paraméterrel.

Házi feladat november 7., hétfő, 10:15-ig



Az X^3 és $-\log X$ eloszlásfüggvénye, ha X egyenletes eloszlású a $(0, 1)$ intervallumon

Az átlag várható értéke és szórása

A statisztikában alapvető kérdés, hogy ha

- **ugyanazt a mérést**
- sokszor, **egymástól függetlenül** megismételjük,
- majd a kapott eredményeket **átlagoljuk**,
- akkor az átlag, mint valószínűségi változó hogyan viselkedik

Vagyis: X_1, X_2, \dots, X_n **független, azonos eloszlású** valószínűségi változók, akkor mit mondhatunk az

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

átlagról: mennyi a **várható értéke** és mennyi a **szórása**?

Azonos eloszlás: $\mathbb{P}(X_j \in A) = \mathbb{P}(X_1 \in A)$ tetszőleges j -re és $A \subseteq \mathbb{R}$ „megfelelő” halmazra, vagy: X_j és X_1 eloszlásfüggvénye megegyezik tetszőleges j -re.

azonos eloszlás \Rightarrow **azonos várható érték**, **azonos szórás**

Valószínűségi változók függetlensége

- **két valószínűségi változóra:** az $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változók **függetlenek**, ha

$$\mathbb{P}(X \leq t_1, Y \leq t_2) = \mathbb{P}(X \leq t_1) \cdot \mathbb{P}(Y \leq t_2)$$

teljesül tetszőleges $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ valós számokra.

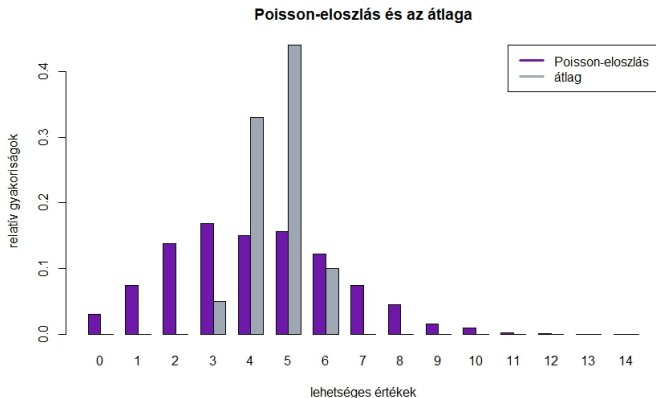
- **véges sok valószínűségi változóra:** $X_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változók **függetlenek**, ha

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 \leq t_1, X_2 \leq t_2, \dots, X_n \leq t_n) &= \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq t_1) \cdot \mathbb{P}(X_2 \leq t_2) \dots \mathbb{P}(X_n \leq t_n) \end{aligned}$$

teljesül tetszőleges t_1, t_2, \dots, t_n valós számokra.

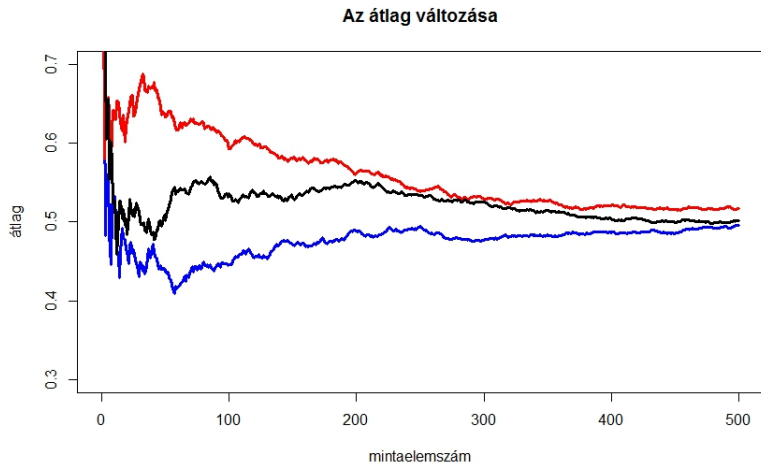
- **megszámlálható sok valószínűségi változóra:** az $X_1, X_2, X_3 \dots$ valószínűségi változók **függetlenek**, ha közülük bármely véges sokat kiválasztva független valószínűségi változókat kapunk.

Az átlag viselkedése



1000 darab $\lambda = 5$ paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változó, illetve 100 darab, tíz független, $\lambda = 5$ paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változó átlagaként előálló megfigyelés hisztogramja → **átlagolásnál a várható érték nem változik**, ez mindkét esetben 5, **a szórás csökken**

Az átlag konvergenciája



A $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlásból vett minta átlaga $n = 500$ -ig

Az átlag várható értéke

Állítás

Legyenek X_1, \dots, X_n független azonos eloszlású valószínűségi változók, melyekre $m = \mathbb{E}(X_1) < \infty$. Ekkor

$$\mathbb{E}(\bar{X}) = \mathbb{E}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \mathbb{E}(X_1) = m.$$

Az átlag várható értéke

Állítás

Legyenek X_1, \dots, X_n független azonos eloszlású valószínűségi változók, melyekre $m = \mathbb{E}(X_1) < \infty$. Ekkor

$$\mathbb{E}(\bar{X}) = \mathbb{E}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \mathbb{E}(X_1) = m.$$

Bizonyítás.

$$\mathbb{E}(\bar{X}) = \mathbb{E}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\mathbb{E}(X_1 + \dots + X_n) = \frac{1}{n} \cdot nm = m.$$

Felhasználtuk a várható érték linearitását, és hogy csak eloszlástól függ:

- $\mathbb{E}(cX) = c\mathbb{E}(X)$, ha $c \in \mathbb{R}$;
- $\mathbb{E}(Y + Z) = \mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(Z)$;
- ha Y és Z eloszlása (azaz eloszlásfüggvényük) megegyezik, akkor $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(Z)$

Az átlag szórása

Állítás

Legyenek X_1, \dots, X_n független azonos eloszlású valószínűségi változók, melyekre $\sigma = D(X_1) < \infty$. Ekkor

$$D(\bar{X}) = D\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{D(X_1)}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Az átlag szórása

Állítás

Legyenek X_1, \dots, X_n független azonos eloszlású valószínűségi változók, melyekre $\sigma = D(X_1) < \infty$. Ekkor

$$D(\bar{X}) = D\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{D(X_1)}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Bizonyítás.

$$D(\bar{X}) = D\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{D(X_1 + \dots + X_n)}{n} = \frac{\sqrt{n\sigma^2}}{n} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Felhasználtuk a szórás alábbi tulajdonságait:

- $D(cX) = |c|D(X)$, ha $c \in \mathbb{R}$;
- $D^2(Y + Z) = D^2(Y) + D^2(Z)$, ha Y és Z függetlenek;
- ha Y és Z eloszlása megegyezik, akkor $D(Y) = D(Z)$

Egyenlőtlenségek

Tegyük fel, hogy egy véletlenszerűen választott ember p valószínűséggel szavaz egy adott pártra – azonban p -t **nem ismerjük**.

Legalább hány embert kell megkérdeznünk (feltételezve, hogy mindenki a többiektől függetlenül válaszol és igazat mond), hogy annak valószínűsége, hogy a pártra szavazók aránya **legfeljebb 1%-kal** tér el p -től, **tetszőleges p esetén legalább 95% legyen?**

Egyenlőtlenségek

Tegyük fel, hogy egy véletlenszerűen választott ember p valószínűséggel szavaz egy adott pártra – azonban p -t **nem ismerjük**.

Legalább hány embert kell megkérdeznünk (feltételezve, hogy mindenki a többiektől függetlenül válaszol és igazat mond), hogy annak valószínűsége, hogy a pártra szavazók aránya **legfeljebb 1%-kal** tér el p -től, **tetszőleges p esetén legalább 95% legyen?**

Ennek megértéséhez ezekre van szükség:

- az arány átlagolás \rightarrow milyen gyorsan csökken a szórás?
- ha a **szórás kicsi**, abból hogyan következik, hogy nagy valószínűséggel csak keveset tévedünk \rightarrow ebben segít a **Markov- és a Csebisev-egyenlőtlenség**.

Egyenlőtlenségek

Többek között az **átlag** viselkedésének megértéséhez van szükség az alábbi egyenlőtlenségekre.

Markov-egyenlőtlenség. Legyen $t > 0$, és X **nemnegatív, véges várható értékű** valószínűségi változó, vagyis melyre $X \geq 0$ biztosan teljesül. Ekkor

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{t}.$$

Egyenlőtlenségek

Többek között az **átlag** viselkedésének megértéséhez van szükség az alábbi egyenlőtlenségekre.

Markov-egyenlőtlenség. Legyen $t > 0$, és X **nemnegatív, véges várható értékű** valószínűségi változó, vagyis melyre $X \geq 0$ biztosan teljesül. Ekkor

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{t}.$$

Csebisev-egyenlőtlenség. Legyen X **véges szórású** valószínűségi változó, $t > 0$ pozitív szám. Ekkor

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t) \leq \frac{D^2(X)}{t^2}.$$

Egyenlőtlenségek

Többek között az **átlag** viselkedésének megértéséhez van szükség az alábbi egyenlőtlenségekre.

Markov-egyenlőtlenség. Legyen $t > 0$, és X **nemnegatív, véges várható értékű** valószínűségi változó, vagyis melyre $X \geq 0$ biztosan teljesül. Ekkor

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{t}.$$

Csebisev-egyenlőtlenség. Legyen X **véges szórású** valószínűségi változó, $t > 0$ pozitív szám. Ekkor

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t) \leq \frac{D^2(X)}{t^2}.$$

Következmény. Legyen X **véges szórású** valószínűségi változó, $t > 0$ pozitív szám. Ekkor

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| < t) \geq 1 - \frac{D^2(X)}{t^2}.$$

A Csebisev-egyenlőtlenség alkalmazása

Legalább hány embert kell megkérdeznünk (feltételezve, hogy mindenki a többiektől függetlenül válaszol és igazat mond), hogy annak valószínűsége, hogy a pártra szavazók aránya **legfeljebb 1%-kal** tér el p -től, **tetszőleges p esetén legalább 95% legyen?**

n megkérdezett, mindenki p valószínűséggel támogatja a pártot

X : a pártot támogatók száma a megkérdezettek között

Kell:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \leq 0,01\right) \geq 0,95$$

teljesüljön minden $0 \leq p \leq 1$ -re – hiszen p -t nem ismerjük.

A Csebisev-egyenlőtlenség alkalmazása

n megkérdezett, mindenki p valószínűséggel támogatja a pártot

X : a pártot támogatók száma a megkérdezettek között

Mivel X binomiális eloszlású:

$$\mathbb{E}\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot np = p; \quad D\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n} \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}.$$

A Csebisev-egyenlőtlenség alkalmazása

n megkérdezett, mindenki p valószínűséggel támogatja a pártot

X : a pártot támogatók száma a megkérdezettek között

Mivel X binomiális eloszlású:

$$\mathbb{E}\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot np = p; \quad D\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n} \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}.$$

Csebisev-egyenlőtlenség alkalmazva az X/n valószínűségi változóra:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq 0,01\right) \leq \frac{D^2\left(\frac{X}{n}\right)}{0,01^2} = \frac{p(1-p)}{0,01^2 \cdot n} \leq \frac{1}{4 \cdot 0,01^2 \cdot n},$$

mivel $p(1-p) \leq 1/4$ a számtani-mértani közepek közötti egyenlőtlenség szerint.

A Csebisev-egyenlőtlenség alkalmazása

n megkérdezett, mindenki p valószínűséggel támogatja a pártot

X : a pártot támogatók száma a megkérdezettek között

A Csebisev-egyenlőtlenség szerint

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq 0,01\right) \leq \frac{1}{4 \cdot 0,01^2 \cdot n}$$

Kell:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \leq 0,01\right) \geq 0,95,$$

azaz

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| > 0,01\right) \leq 0,05.$$

Tehát ennyi embert **biztosan elég megkérdezni**:

$$\frac{1}{4 \cdot 0,01^2 \cdot n} \leq 0,05 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq \frac{1}{4 \cdot 0,01^2 \cdot 0,05} = 50000.$$

A Csebisev-egyenlőtlenség alkalmazása

n megkérdezett, mindenki p valószínűséggel támogatja a pártot

X : a pártot támogatók száma a megkérdezettek között

A Csebisev-egyenlőtlenség szerint

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq 0,01\right) \leq \frac{1}{4 \cdot 0,01^2 \cdot n}$$

Kell:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \leq 0,01\right) \geq 0,95,$$

azaz

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| > 0,01\right) \leq 0,05.$$

Tehát ennyi embert **biztosan elég megkérdezni**:

$$\frac{1}{4 \cdot 0,01^2 \cdot n} \leq 0,05 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq \frac{1}{4 \cdot 0,01^2 \cdot 0,05} = 50000.$$

Ha 0,01 helyett 0,005-öt írnánk (a felét), $n \geq 200000$ (négyyszer annyi) adódna.

Házi feladat november 14., hétfő, 10:15-ig

Egy biztosító 1000 ügyfele közül mindenki a többiektől függetlenül 0,05 valószínűséggel okoz balesetet egy év alatt. Legyen X a balesetet okozó ügyfelek száma egy év alatt.

- Adjunk felső becslést Markov-, illetve Csebisev-egyenlőtlenséggel annak valószínűségére, hogy $X \geq 100$.
- Az R vagy más szoftver segítségével számítsuk ki a pontos értéket, és hasonlítsuk össze a becslésekkel.

A Markov-egyenlőtlenség bizonyítása

Markov-egyenlőtlenség. Legyen $t > 0$, és X **nemnegatív, véges várható értékű** valószínűségi változó, vagyis melyre $X \geq 0$ biztosan teljesül. Ekkor

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{t}.$$

Bizonyítás. Tekintsük az alábbi Y valószínűségi változót:

$$Y = \begin{cases} t, & \text{ha } X \geq t; \\ 0, & \text{ha } X < t. \end{cases}$$

A Markov-egyenlőtlenség bizonyítása

Markov-egyenlőtlenség. Legyen $t > 0$, és X **nemnegatív, véges várható értékű** valószínűségi változó, vagyis melyre $X \geq 0$ biztosan teljesül. Ekkor

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{t}.$$

Bizonyítás. Tekintsük az alábbi Y valószínűségi változót:

$$Y = \begin{cases} t, & \text{ha } X \geq t; \\ 0, & \text{ha } X < t. \end{cases}$$

Mindkét esetben Y értéke legfeljebb X értéke (hiszen $X \geq 0$):

$$Y \leq X \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}(Y) \leq \mathbb{E}(X).$$

Másrészt, mivel Y értéke összesen kétféle lehet, a várható értékét kiszámítva:

$$\mathbb{E}(Y) = 0 \cdot \mathbb{P}(Y = 0) + t \cdot \mathbb{P}(Y = t) = t \cdot \mathbb{P}(X \geq t) \leq \mathbb{E}(X).$$

A Markov-egyenlőtlenség bizonyítása

Markov-egyenlőtlenség. Legyen $t > 0$, és X **nemnegatív, véges várható értékű** valószínűségi változó, vagyis melyre $X \geq 0$ biztosan teljesül. Ekkor

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{t}.$$

Bizonyítás. Tekintsük az alábbi Y valószínűségi változót:

$$Y = \begin{cases} t, & \text{ha } X \geq t; \\ 0, & \text{ha } X < t. \end{cases}$$

Mindkét esetben Y értéke legfeljebb X értéke (hiszen $X \geq 0$):

$$Y \leq X \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}(Y) \leq \mathbb{E}(X).$$

Másrészt, mivel Y értéke összesen kétféle lehet, a várható értékét kiszámítva:

$$\mathbb{E}(Y) = 0 \cdot \mathbb{P}(Y = 0) + t \cdot \mathbb{P}(Y = t) = t \cdot \mathbb{P}(X \geq t) \leq \mathbb{E}(X).$$

Az utolsó egyenlőtlenség mindkét oldalát a t pozitív számmal osztva a Markov-egyenlőtlenséget kapjuk.

A Csebisev-egyenlőtlenség bizonyítása

Markov-egyenlőtlenség. Legyen $t > 0$, és X **nemnegatív, véges várható értékű** valószínűségi változó, vagyis melyre $X \geq 0$ biztosan teljesül. Ekkor

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{t}.$$

Csebisev-egyenlőtlenség. Legyen X **véges szórású** valószínűségi változó, $t > 0$ pozitív szám. Ekkor

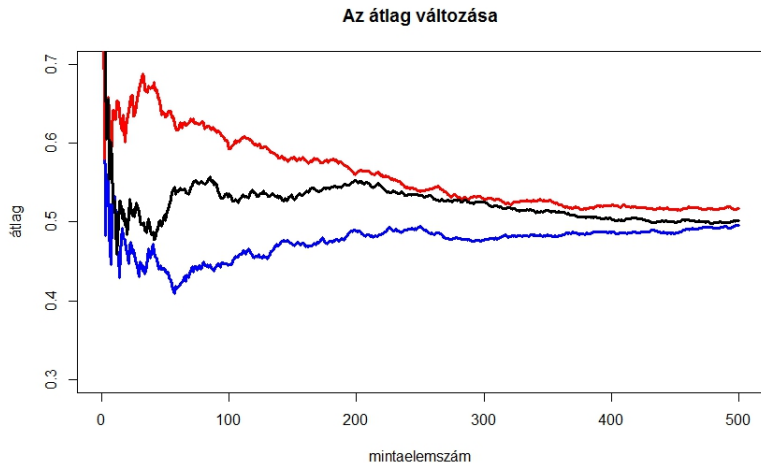
$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t) \leq \frac{D^2(X)}{t^2}.$$

Bizonyítás. Legyen $Z = (X - \mathbb{E}(X))^2$. Ez a valószínűségi változó nemnegatív, ezért alkalmazható a Markov-egyenlőtlenség, a t^2 pozitív számmal:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t) &= \mathbb{P}((X - \mathbb{E}(X))^2 \geq t^2) = \mathbb{P}(Z \geq t^2) \leq \\ &\stackrel{\text{Markov}}{\leq} \frac{\mathbb{E}(Z)}{t^2} = \frac{\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)}{t^2} = \frac{D^2(X)}{t^2} \end{aligned}$$

a szórásnégyzet definíciója alapján.

Az átlag konvergenciája



A $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlásból vett minta átlaga $n = 500$ -ig

Konvergenciafajták

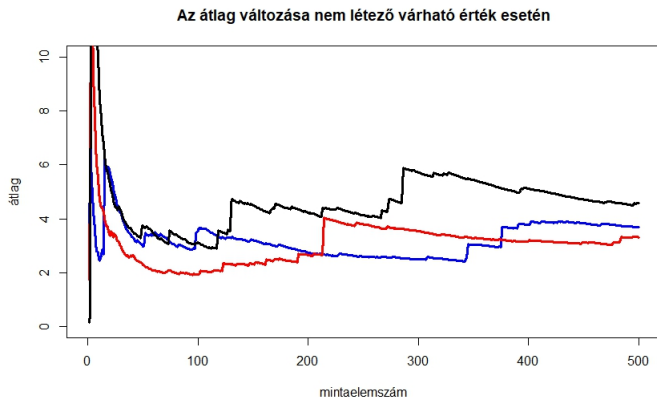
Valószínűségi változók sorozatának (mint amilyen az átlagok sorozata) **többféle értelemben** definiálhatjuk a határértékét.

A Z_1, Z_2, \dots , valószínűségi változókból álló sorozat **sztochasztikusan konvergál** az Z valószínűségi változóhoz, ha minden $\varepsilon > 0$ -ra

$$\mathbb{P}(|Z_n - Z| > \varepsilon) \rightarrow 0$$

teljesül $n \rightarrow \infty$ esetén.

Az átlag változása



Az átlag változása egy olyan esetben, amikor nem létezik a várható érték (nincs abszolút konvergencia a definícióban)

A nagy számok gyenge törvénye

Legyenek X_1, \dots, X_n független azonos eloszlású véges szórású valószínűségi változók. Legyen $m = \mathbb{E}(X_1)$ és $\sigma = D(X_1)$.

A korábbiak szerint

$$\mathbb{E}(\bar{X}) = m; \quad D^2(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

A nagy számok gyenge törvénye

Legyenek X_1, \dots, X_n független azonos eloszlású véges szórású valószínűségi változók. Legyen $m = \mathbb{E}(X_1)$ és $\sigma = D(X_1)$.

A korábbiak szerint

$$\mathbb{E}(\bar{X}) = m; \quad D^2(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

A Csebisev-egyenlőtlenség szerint minden $\varepsilon > 0$ -ra

$$\mathbb{P}(|\bar{X} - m| > \varepsilon) \leq \frac{D^2(\bar{X})}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Tehát $\bar{X} \rightarrow m = \mathbb{E}(X_1)$ sztochasztikusan.

A nagy számok törvénye

Tétel (A nagy számok gyenge törvénye)

Legyenek X_1, X_2, \dots olyan valószínűségi változók, melyek függetlenek és azonos eloszlásúak. Tegyük fel, hogy $D(X_1) < \infty$. Ekkor minden $\varepsilon > 0$ esetén

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mathbb{E}(X_1)| > \varepsilon) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

azaz $\bar{X}_n \rightarrow \mathbb{E}(X_1)$ sztochasztikusan.

A nagy számok törvénye

Tétel (A nagy számok gyenge törvénye)

Legyenek X_1, X_2, \dots olyan valószínűségi változók, melyek függetlenek és azonos eloszlásúak. Tegyük fel, hogy $D(X_1) < \infty$. Ekkor minden $\varepsilon > 0$ esetén

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mathbb{E}(X_1)| > \varepsilon) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

azaz $\bar{X}_n \rightarrow \mathbb{E}(X_1)$ sztochasztikusan.