

A kovariancia (7. előadás)

Definíció (Kovariancia)

Legyenek X és Y olyan valószínűségi változók, melyeknek szórása létezik. Ekkor az X és Y kovarianciája:

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X)) \cdot (Y - \mathbb{E}(Y))].$$

Legyenek X, Y, Z, X_1, \dots, X_n olyan valószínűségi változók, melyek szórása létezik. Ekkor a következők teljesülnek.

- **A kovariancia kiszámítása:**

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(X \cdot Y) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

- Szimmetria. $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$.
- Kapcsolat a szórásnégyzettel. $\text{cov}(X, X) = D^2(X)$.

Korrelációs együttható: definíció

Legyenek X és Y olyan valószínűségi változók, melyek szórásnégyzete létezik. Ekkor X és Y **korrelációs együtthatója**:

$$R(X, Y) = \begin{cases} \frac{\text{cov}(X, Y)}{D(X)D(Y)}, & \text{ha } D(X) > 0, D(Y) > 0; \\ 0, & \text{ha } D(X) = 0 \text{ vagy } D(Y) = 0. \end{cases}$$

Korrelációs együttható: definíció

Legyenek X és Y olyan valószínűségi változók, melyek szórásnégyzete létezik. Ekkor X és Y **korrelációs együtthatója**:

$$R(X, Y) = \begin{cases} \frac{\text{cov}(X, Y)}{D(X)D(Y)}, & \text{ha } D(X) > 0, D(Y) > 0; \\ 0, & \text{ha } D(X) = 0 \text{ vagy } D(Y) = 0. \end{cases}$$

- **Lehetséges értékek.** A korrelációs együttható értéke mindig -1 és 1 közé esik:

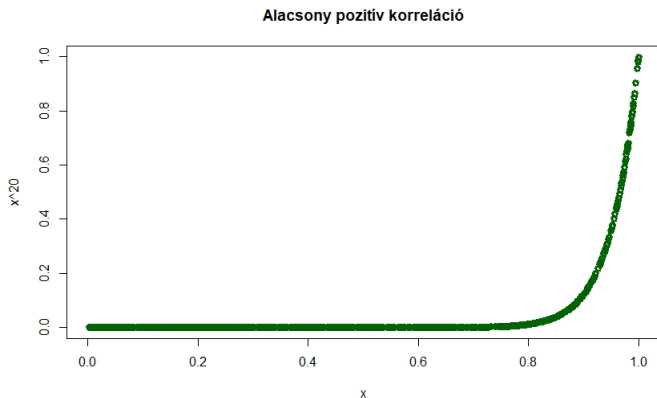
$$|R(X, Y)| \leq 1.$$

- **Lineáris összefüggés.** Legyen $a > 0$ valós szám, b tetszőleges valós szám. Ekkor

$$R(X, aX + b) = 1 \quad \text{és} \quad R(X, -aX + b) = -1.$$

- Tegyük fel, hogy $|R(X, Y)| = 1$. Ekkor léteznek olyan a és b valós számok, hogy az $Y = aX + b$ egyenlet 1 valószínűséggel teljesül. Vagyis a korrelációs együttható lehetséges legnagyobb értékei lineáris összefüggés esetén érhetőek el.

Rangkorreláció



Legyen X egyenletes eloszlású a $(0, 1)$ intervallumból, $Y = X^{20}$. A korrelációs együttható értéke 0,5 körüli, pedig szoros összefüggés van.

Rangkorreláció

Legyenek $X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n$ megfigyelések.

Rangkorreláció

Legyenek $X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n$ megfigyelések.

Rendezzük sorba a két mintát külön-külön nagyság szerint, és írjuk fel, hogy az egyes megfigyelések hányadikak a sorba rendezett mintában. Ezek lesz az egyes megfigyelések rangja.

Például:

$$X_1 = 650, X_2 = 870, X_3 = 720 \quad \Rightarrow \quad (3, 1, 2)$$

$$Y_1 = 18, Y_2 = 15, Y_3 = 17 \quad \Rightarrow \quad (1, 3, 2)$$

Rangkorreláció

Legyenek $X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n$ megfigyelések.

Rendezzük sorba a két mintát külön-külön nagyság szerint, és írjuk fel, hogy az egyes megfigyelések hányadikak a sorba rendezett mintában. Ezek lesz az egyes megfigyelések rangja.

Például:

$$X_1 = 650, X_2 = 870, X_3 = 720 \quad \Rightarrow \quad (3, 1, 2)$$

$$Y_1 = 18, Y_2 = 15, Y_3 = 17 \quad \Rightarrow \quad (1, 3, 2)$$

Számítsuk ki az így kapott két adatsor, vagyis a rangok korrelációs együtthatóját. Ez a **rangkorreláció** (Spearman-korreláció).

Házi feladat október 24., hétfő, 10:15-ig

Legyenek X és Y egymástól független, Poisson-eloszlású valószínűségi változók, a várható értéke mind a kettőnek 5.

a) Számítsuk ki $X + 3Y$ és $X - 2Y$ korrelációs együtthatóját.

b) Sorsoljunk az R-ben két darab, 1000 hosszú vektort, melyek minden eleme független, 5 várható értékű Poisson-eloszlású valószínűségi változó. Legyenek ezek x és y . Számítsuk ki $x + 3 * y$ és $x - 2 * y$ tapasztalati korrelációs együtthatóját (a `cor` segítségével). Ábrázoljuk $x + 3 * y$ és $x - 2 * y$ együttes eloszlását (a `plot(x+3*y ~ x-2*y)` segítségével). Mit állapíthatunk meg az ábra alapján, a korrelációs együtthatót és a tapasztalati korrelációs együtthatót összehasonlítva?

Házi feladat október 24., hétfő, 10:15-ig

Legyenek X és Y egymástól független, Poisson-eloszlású valószínűségi változók, a várható értéke mind a kettőnek 5.

A kovariancia és a szórás tulajdonságai alapján, felhasználva, hogy X és Y függetlenek, valamint Poisson-eloszlás esetén a várható érték és a szórásnégyzet megegyezik:

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X + 3Y, X - 2Y) &= \operatorname{cov}(X, X) - 2\operatorname{cov}(X, Y) + 3\operatorname{cov}(Y, X) - \\ &\quad - 6\operatorname{cov}(Y, Y) = D^2(X) - 6D^2(Y) = 5 - 6 \cdot 5 = \\ &= -25.\end{aligned}$$

Házi feladat október 24., hétfő, 10:15-ig

Legyenek X és Y egymástól független, Poisson-eloszlású valószínűségi változók, a várható értéke mind a kettőnek 5.

A kovariancia és a szórás tulajdonságai alapján, felhasználva, hogy X és Y függetlenek, valamint Poisson-eloszlás esetén a várható érték és a szórásnégyzet megegyezik:

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(X + 3Y, X - 2Y) &= \operatorname{cov}(X, X) - 2\operatorname{cov}(X, Y) + 3\operatorname{cov}(Y, X) - \\ &\quad - 6\operatorname{cov}(Y, Y) = D^2(X) - 6D^2(Y) = 5 - 6 \cdot 5 = \\ &= -25. \end{aligned}$$

$$D(X + 3Y) = \sqrt{D^2(X) + 3^2 D^2(Y)} = \sqrt{5 + 9 \cdot 5} = \sqrt{50}.$$

Házi feladat október 24., hétfő, 10:15-ig

Legyenek X és Y egymástól független, Poisson-eloszlású valószínűségi változók, a várható értéke mind a kettőnek 5.

A kovariancia és a szórás tulajdonságai alapján, felhasználva, hogy X és Y függetlenek, valamint Poisson-eloszlás esetén a várható érték és a szórásnégyzet megegyezik:

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(X + 3Y, X - 2Y) &= \operatorname{cov}(X, X) - 2\operatorname{cov}(X, Y) + 3\operatorname{cov}(Y, X) - \\ &\quad - 6\operatorname{cov}(Y, Y) = D^2(X) - 6D^2(Y) = 5 - 6 \cdot 5 = \\ &= -25. \end{aligned}$$

$$D(X + 3Y) = \sqrt{D^2(X) + 3^2 D^2(Y)} = \sqrt{5 + 9 \cdot 5} = \sqrt{50}.$$

$$D(X - 2Y) = \sqrt{D^2(X) + (-2)^2 D^2(Y)} = \sqrt{5 + 4 \cdot 5} = \sqrt{25} = 5.$$

Házi feladat október 24., hétfő, 10:15-ig

Legyenek X és Y egymástól független, Poisson-eloszlású valószínűségi változók, a várható értéke mind a kettőnek 5.

Tehát a korrelációs együttható:

$$R(X+3Y, X-2Y) = \frac{\text{cov}(X+3Y, X-2Y)}{D(X+3Y)D(X-2Y)} = \frac{-25}{\sqrt{50} \cdot 5} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -0,71.$$

```
> x=rpois(1000, lambda=5)
```

```
> y=rpois(1000, lambda=5)
```

```
> cor(x+3*y,x-2*y)
```

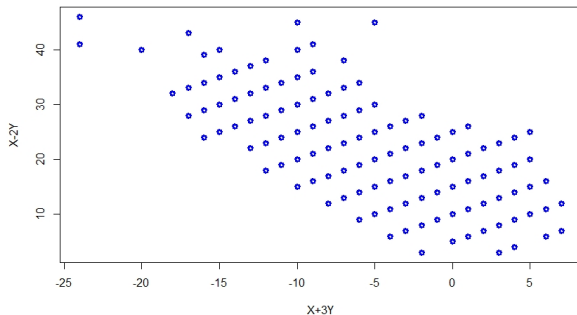
```
[1] -0.6977197
```

```
> z=x+3*y
```

```
> u=x-2*y
```

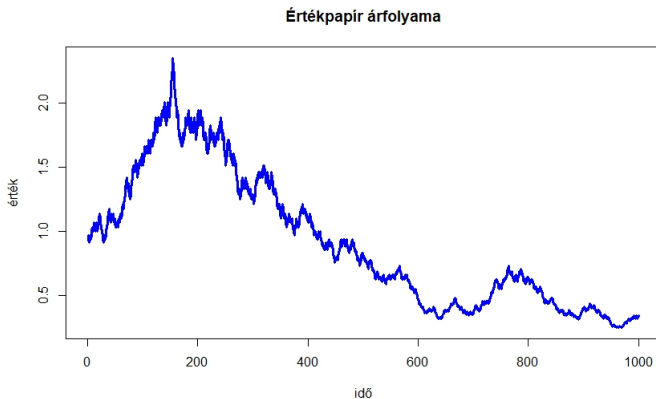
```
> plot(z~u, lwd="3", col="blue", xlab="X+3Y", ylab="X-2Y")
```

Házi feladat október 24., hétfő, 10:15-ig



Legyenek X és Y egymástól független, Poisson-eloszlású valószínűségi változók, a várható értéke mind a kettőnek 5. Az ábrán $X + 3Y$ és $X - 2Y$ együttes eloszlása látható, 1000 elemű mintából.

Eloszlásfüggvény: példa



Egy elképzelt értékpapír árfolyama 1000 napon keresztül, 1000 forintban

Eloszlásfüggvény: bevezetés

- X valószínűségi változó: egy véletlen kísérlet eredménye
- eddig: X **diszkrét**, és a $\mathbb{P}(X = x)$ valószínűségekkel lehet leírni az eloszlását
- ha a lehetséges értékek halmaza „túl nagy”, vagy a valószínűségek „túl kicsik”, ez nem informatív
- például: X az értékpapír árfolyama holnap, $\mathbb{P}(X = 784) = 0,0038$, $\mathbb{P}(X = 785) = 0,004$, stb. egy előrejelzés szerint \rightarrow ennél hasznosabb információ lehet, hogy

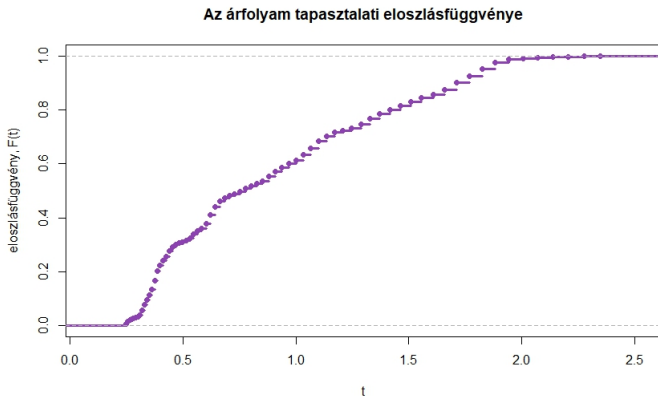
$$\mathbb{P}(X \leq 785) = 0,5,$$

azaz az értékpapír 50% valószínűséggel nem haladja meg a 785 szintet

- **eloszlásfüggvény**: $F(t)$ annak valószínűsége, hogy **a valószínűségi változó értéke legfeljebb t** , azaz

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t).$$

Eloszlásfüggvény: példa



t függvényében a t -nél nem nagyobb árfolyamú napok aránya az előző példában

Eloszlásfüggvény: definíció

Legyen $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változó. Ekkor X **eloszlásfüggvénye** az alábbi $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ függvény:

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\})$$

tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ valós számra.

Ez **minden valószínűségi változóra** és minden $t \in \mathbb{R}$ valós számra értelmes: éppen úgy definiáltuk a valószínűségi változót, hogy $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\} \in \mathcal{A}$ esemény, tehát van valószínűsége.

Eloszlásfüggvény: példa

Valakinek három gyereke születik, a gyerekek mindegyike egymástól függetlenül $1/2$ valószínűséggel fiú. Nyolc egyformán valószínű eset van:

$$\{\text{LLL, FLL, LFL, LLF, FFL, FLF, LFF, FFF}\}$$

Legyen X a fiúk száma. X diszkrét valószínűségi változó, lehetséges értékei: 0, 1, 2, 3, és

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{8}, \quad \mathbb{P}(X = 1) = \frac{3}{8}, \quad \mathbb{P}(X = 2) = \frac{3}{8}, \quad \mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{8}.$$

Az X **eloszlásfüggvényének**, F -nek az értéke néhány helyen:

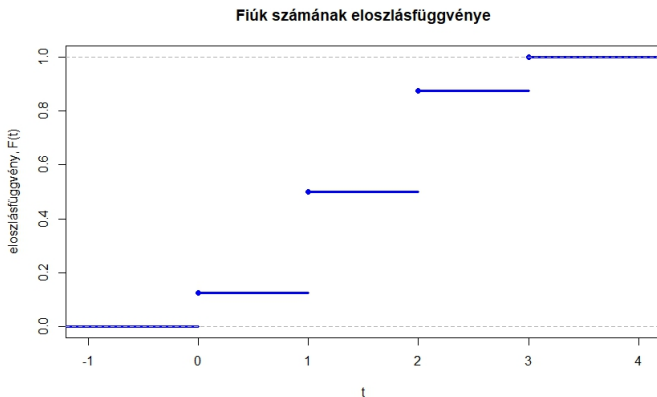
$$F(0) = \mathbb{P}(X \leq 0) = \frac{1}{8};$$

$$F(1) = \mathbb{P}(X \leq 1) = \frac{1}{2};$$

$$F(2, 4) = \mathbb{P}(X \leq 2, 4) = \frac{7}{8};$$

$$F(4) = \mathbb{P}(X \leq 4) = 1.$$

Eloszlásfüggvény: példa



Három gyerek közül a fiúk számának eloszlásfüggvénye vízszintes: t , függőleges: $F(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$.

Eloszlásfüggvény

Definíció (Eloszlásfüggvény)

Legyen $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változó. Ekkor X eloszlásfüggvénye az alábbi $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ függvény:

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\}) \quad \text{minden } t \in \mathbb{R} \text{ valós számra.}$$

Az eloszlásfüggvény minden t valós számhoz hozzárendeli, hogy mennyi annak valószínűsége, hogy a valószínűségi változó értéke legfeljebb t . Például ha X a fiúk száma három gyerek közül:

$$F(1) = \mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(\text{legfeljebb egy fiú van}) = 1/2;$$

$$F(2) = \mathbb{P}(X \leq 2) = \mathbb{P}(\text{legfeljebb két fiú van}) = 7/8;$$

$$F(2,3) = \mathbb{P}(X \leq 2, 3) = \mathbb{P}(\text{legfeljebb 2,3 fiú van}) = 7/8;$$

Eloszlásfüggvény

Definíció (Eloszlásfüggvény)

Legyen $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változó. Ekkor X eloszlásfüggvénye az alábbi $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ függvény:

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\}) \quad \text{minden } t \in \mathbb{R} \text{ valós számra.}$$

Az eloszlásfüggvény minden t valós számhoz hozzárendeli, hogy mennyi annak valószínűsége, hogy a valószínűségi változó értéke legfeljebb t . Például ha X a fiúk száma három gyerek közül:

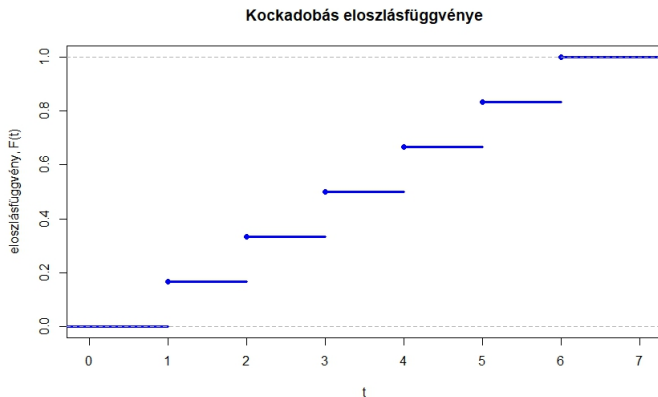
$$F(1) = \mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(\text{legfeljebb egy fiú van}) = 1/2;$$

$$F(2) = \mathbb{P}(X \leq 2) = \mathbb{P}(\text{legfeljebb két fiú van}) = 7/8;$$

$$F(2,3) = \mathbb{P}(X \leq 2,3) = \mathbb{P}(\text{legfeljebb 2,3 fiú van}) = 7/8;$$

Véges értékészletű valószínűségi változók esetén az eloszlásfüggvény lépcsős (véges sok értéket vesz fel), és az ugrások nagyságát az egyes lehetséges értékek valószínűségei adják meg.

Eloszlásfüggvény: példa



Szabályos dobókockával dobott szám eloszlásfüggvénye
vízszintes: t , függőleges: $F(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$.

Az eloszlásfüggvény tulajdonságai

Ha $a, b \in \mathbb{R}$ valós számok, és F az X eloszlásfüggvénye, akkor

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a),$$

hiszen annak valószínűségét, hogy X az a és b közé esik, megkaphatjuk úgy, hogy $\mathbb{P}(X \leq b)$ -ből levonjuk $\mathbb{P}(X \leq a)$ -t.

Legyen F egy tetszőleges valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. Ekkor

- ❶ F monoton növekvő: $a < b$ esetén $F(a) \leq F(b)$.
- ❷ $\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 0$; $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1$.
- ❸ F jobbról folytonos, azaz minden $t \in \mathbb{R}$ valós számra $\lim_{s \rightarrow t+} F(s) = F(t)$.

Fordítva: ha F -re érvényesek ezek a tulajdonságok, akkor van olyan X , aminek F az eloszlásfüggvénye.

Eloszlásfüggvény: példa

Legyen X négy rendű $1/2$ paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó. Mennyi X eloszlásfüggvényének az értéke az 1,5 helyen?

Eloszlásfüggvény: példa

Legyen X négy rendű $1/2$ paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó. Mennyi X eloszlásfüggvényének az értéke az $1,5$ helyen?

X -re a következőképpen gondolhatunk: $n = 4$ független kísérlet, mindegyik $p = 0,5$ valószínűséggel sikerül, X a **sikeres kísérletek száma**.

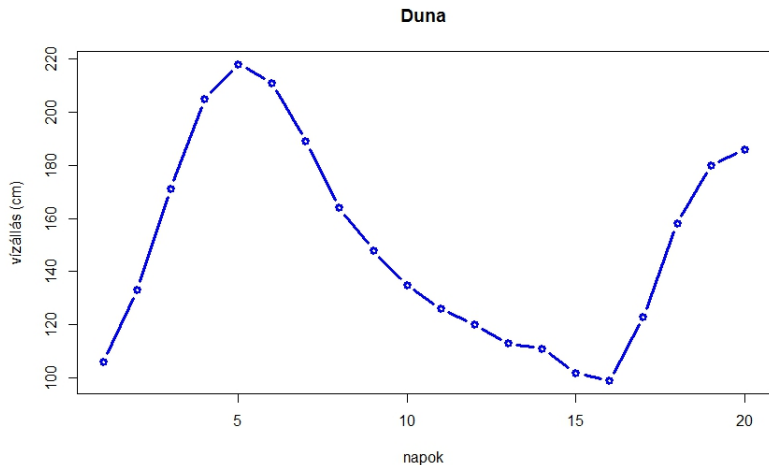
Definíció szerint, ha F az X eloszlásfüggvénye, akkor

$$F(1,5) = \mathbb{P}(X \leq 1,5) = \mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1),$$

hiszen X értéke nemnegatív egész. Így

$$F(1,5) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{16}.$$

Valószínűségi vektorváltozó: példa



A Duna vízállása 20 napon keresztül (az adatok forrása: *Országos Vízelző Szolgálat*): $X_1 = 106, X_2 = 133, \dots, X_{20} = 186$

Egyenletes eloszlás

Tekintsük a következő hétköznapi példát.

- Csomagot várunk, amit a futár véletlen Y időpontban hoz ki.
- Feltételezzük, hogy Y egyenletes eloszlású a $[8, 12]$ intervallumon (órában mérve).
- Mennyi a valószínűsége, hogy a futár 11 óráig megérkezik?
- **Feltéve, hogy a futár 10 óráig még nem érkezett meg, mennyi a valószínűsége, hogy 11 óra előtt megérkezik?**

Legyen X a futár érkezésének időpontja. Így fogunk tudni számolni:

$$\mathbb{P}(X \leq 11)$$

Egyenletes eloszlás

Tekintsük a következő hétköznapi példát.

- Csomagot várunk, amit a futár véletlen Y időpontban hoz ki.
- Feltételezzük, hogy Y egyenletes eloszlású a $[8, 12]$ intervallumon (órában mérve).
- Mennyi a valószínűsége, hogy a futár 11 óráig megérkezik?
- **Feltéve, hogy a futár 10 óráig még nem érkezett meg, mennyi a valószínűsége, hogy 11 óra előtt megérkezik?**

Legyen X a futár érkezésének időpontja. Így fogunk tudni számolni:

$$\mathbb{P}(X \leq 11) = \frac{11 - 8}{12 - 8} = \frac{3}{4} = 75\%.$$

$$\mathbb{P}(X \leq 11 | X > 10)$$

Egyenletes eloszlás

Tekintsük a következő hétköznapi példát.

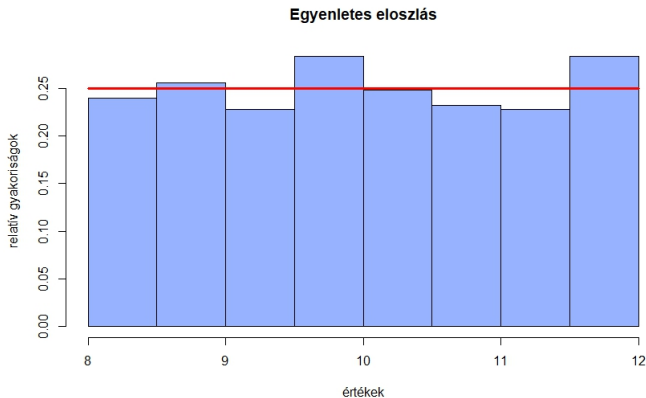
- Csomagot várunk, amit a futár véletlen Y időpontban hoz ki.
- Feltételezzük, hogy Y egyenletes eloszlású a $[8, 12]$ intervallumon (órában mérve).
- Mennyi a valószínűsége, hogy a futár 11 óráig megérkezik?
- **Feltéve, hogy a futár 10 óráig még nem érkezett meg, mennyi a valószínűsége, hogy 11 óra előtt megérkezik?**

Legyen X a futár érkezésének időpontja. Így fogunk tudni számolni:

$$\mathbb{P}(X \leq 11) = \frac{11 - 8}{12 - 8} = \frac{3}{4} = 75\%.$$

$$\mathbb{P}(X \leq 11 | X > 10) = \frac{\mathbb{P}(\{X \leq 11\} \cap \{X > 10\})}{\mathbb{P}(X > 10)} = \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{2}.$$

Egyenletes eloszlás



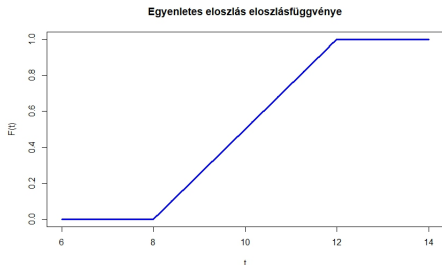
A $[8, 12]$ intervallumon egyenletes eloszlásból vett 500 elemű minta hisztogramja

Egyenletes eloszlás

Definíció (Egyenletes eloszlás (uniform distribution))

Az X valószínűségi változó **egyenletes eloszlású** az $[a, b]$ intervallumon, ha eloszlásfüggvénye:

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \leq a; \\ \frac{t-a}{b-a}, & \text{ha } a < t < b; \\ 1, & \text{ha } t \geq b. \end{cases}$$



Egyenletes eloszlás

Csomagot várunk, a futár 10 és 12 óra között érkezik. Feltesszük, hogy érkezésének időpontja egyenletes eloszlású a $[10, 12]$ intervallumon. Ekkor az előző állítás alapján az alábbiak igazak ($a = 10, b = 12$).

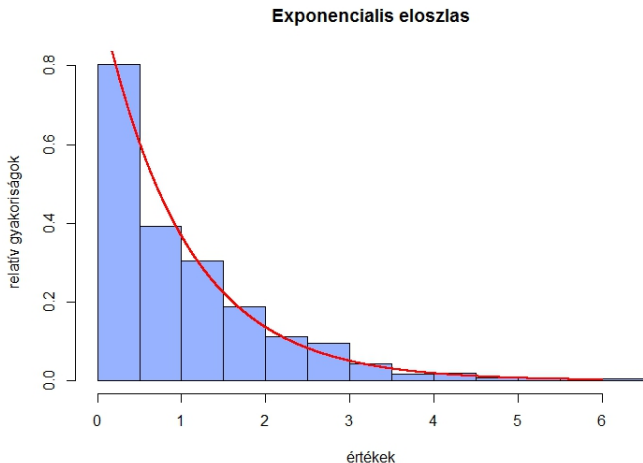
- Annak valószínűsége, hogy 10 és 11 óra között érkezik: $(11 - 10)/(12 - 10) = 1/2$.
- Annak valószínűsége, hogy 10:15 és 10:30 között érkezik: $1/8 = 0,125$.
- Annak valószínűsége, hogy 10 : 30 után érkezik: $3/4 = 0,75$.

Exponenciális eloszlás

Az **exponenciális eloszlás** sokszor használható véletlen időtartamok modellezésére, például

- egy művelet elvégzésének ideje: egy ember kiszolgálása egy boltban, vagy egy számítás elvégzése egy számítógépen
- egy ember reakcióideje
- két esemény bekövetkezése között eltelt idő, például egy üzletben két ügyfél érkezése közötti idő
- járványterjedés modellezésénél: a fertőzés átadásának vagy a gyógyulásnak az ideje
- radioaktív részecske bomlási ideje

Exponenciális eloszlás



$\lambda = 1$ paraméterű exponenciális eloszlás sűrűségfüggvénye és 500 darab független, 1 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változóból álló minta hisztogramja

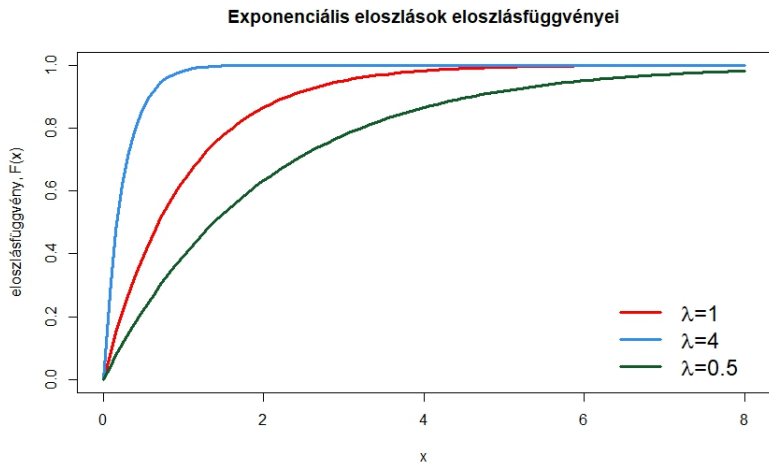
Exponenciális eloszlás

Definíció

Legyen $\lambda > 0$ valós szám. Az X valószínűségi változó **exponenciális eloszlású** λ paraméterrel, ha eloszlásfüggvénye:

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & \text{ha } t > 0; \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Exponenciális eloszlás



Különböző paraméterű ($\lambda = \frac{1}{2}, 1$, illetve 4) exponenciális eloszlások eloszlásfüggvényei

Exponenciális eloszlás

Példa. Tegyük fel, hogy egy boltban egy vevő kiszolgálásának ideje (percben számolva) $1/3$ **paraméterű exponenciális eloszlású** valószínűségi változó.

Mennyi a valószínűsége, hogy a vevőt **legalább 5 percig** tart kiszolgálni?

Mennyi a valószínűsége, hogy a vevő kiszolgálása **legalább 2, de legfeljebb 4 percig** tart?

Az eloszlásfüggvény definíciója alapján

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 5) &= 1 - \mathbb{P}(X < 5) = 1 - F(5) = 1 - (1 - e^{-\lambda \cdot 5}) = e^{-\lambda \cdot 5} = \\ &= e^{-5/3} = 18,9\%.\end{aligned}$$

Exponenciális eloszlás

Példa. Tegyük fel, hogy egy boltban egy vevő kiszolgálásának ideje (percben számolva) $1/3$ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó.

Mennyi a valószínűsége, hogy a vevőt **legalább 5 percig** tart kiszolgálni?

Mennyi a valószínűsége, hogy a vevő kiszolgálása **legalább 2, de legfeljebb 4 percig** tart?

Az eloszlásfüggvény definíciója alapján

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 5) &= 1 - \mathbb{P}(X < 5) = 1 - F(5) = 1 - (1 - e^{-\lambda \cdot 5}) = e^{-\lambda \cdot 5} = \\ &= e^{-5/3} = 18,9\%.\end{aligned}$$

Hasonlóképpen

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(2 \leq X \leq 4) &= \mathbb{P}(X \leq 4) - \mathbb{P}(X \leq 2) = F(4) - F(2) = \\ &= (1 - e^{-4/3}) - (1 - e^{-2/3}) = e^{-2/3} - e^{-4/3} = 25\%.\end{aligned}$$

Exponenciális eloszlás

Állítás (Az exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonsága)

Legyen X exponenciális eloszlású valószínűségi változó, s, t pozitív számok.
Ekkor

$$\mathbb{P}(X \geq s + t | X \geq s) = \mathbb{P}(X \geq t).$$

Bizonyítás. A feltételes valószínűség definícióját és az exponenciális eloszlás eloszlásfüggvényének alakját felhasználva

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq s + t | X \geq s) &= \frac{\mathbb{P}(\{X \geq s + t\} \cap \{X \geq s\})}{\mathbb{P}(X \geq s)} = \frac{1 - \mathbb{P}(X < s + t)}{1 - \mathbb{P}(X < s)} = \\ &= \frac{1 - F(s + t)}{1 - F(s)} = \frac{1 - (1 - e^{-\lambda(s+t)})}{1 - (1 - e^{-\lambda s})} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = \\ &= e^{-\lambda t} = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = 1 - F(t) = \mathbb{P}(X \geq t).\end{aligned}$$

□

Pareto-eloszlás

Biztosításmatematikában, vagy például a jövedelmek eloszlásának modellezésére használják gyakran az alábbi eloszlást.

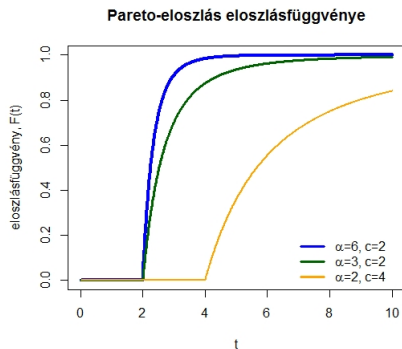
Definíció (Pareto-eloszlás)

Az X valószínűségi változó Pareto-eloszlású $\alpha > 0$ és $c > 0$ paraméterekkel, ha eloszlásfüggvénye

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \begin{cases} 0; & \text{ha } t \leq c; \\ 1 - \left(\frac{c}{t}\right)^\alpha; & \text{ha } t > c. \end{cases}$$

A definícióból látszik, hogy a Pareto-eloszlás a c paraméternél kisebb értékeket nem vehet fel. Gyakran használják jövedelmek eloszlásának modellezésére. Ahogy később látni fogjuk, van olyan α , melyre az eloszlás várható értéke nem létezik, és olyan is, amire a várható érték létezik, de a szórás nem.

Pareto-eloszlás



Különböző paraméterű Pareto-eloszlások eloszlásfüggvényei

Házi feladat november 7., hétfő, 10:15-ig

Legyen az X valószínűségi változó egyenletes eloszlású a $(0, 1)$ intervallumon. Határozzuk meg és ábrázoljuk (a) az X^3 valószínűségi változó eloszlásfüggvényét; (b) a $-\log X$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét.