Visszatevés nélküli mintavétel (3. előadás)

- Egy dobozban N golyó van, közülük M **fekete**, a többi **fehér**.

Visszatevés nélküli mintavétel (3. előadás)

- Egy dobozban N golyó van, közülük M **fekete**, a többi **fehér**.
- **Visszatevés nélkül** kihúznak n darabot (minden húzásnál minden, még a dobozban lévő golyót azonos valószínűséggel választva).

Visszatevés nélküli mintavétel (3. előadás)

- Egy dobozban N golyó van, közülük M **fekete**, a többi **fehér**.
- **Visszatevés nélkül** kihúznak n darabot (minden húzásnál minden, még a dobozban lévő golyót azonos valószínűséggel választva).
- Tegyük fel, hogy $n \leq M$ és $n \leq N - M$. Annak valószínűsége, hogy pontosan k darab fekete golyót húznak ki:

Visszatevés nélküli mintavétel (3. előadás)

- Egy dobozban N golyó van, közülük M **fekete**, a többi **fehér**.
- **Visszatevés nélkül** kihúznak n darabot (minden húzásnál minden, még a dobozban lévő golyót azonos valószínűséggel választva).
- Tegyük fel, hogy $n \leq M$ és $n \leq N - M$. Annak valószínűsége, hogy pontosan k darab fekete golyót húznak ki:

$$\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ fekete}) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Megjegyzés: a kihúzott fekete golyók száma **hipergeometrikus eloszlású.**

Mivel az $\binom{N}{n}$ lehetséges eset mindegyike egyformán valószínű, a **klasszikus valószínűségi mező** modelljét használtuk.

Visszatevéses mintavétel

- Egy dobozban N golyó van, közülük M fekete, a többi fehér.
- **Visszatevéssel** kihúznak n darabot, minden húzásnál a korábbiakat elfelejtve mind az N golyót azonos valószínűséggel választva.
- Annak valószínűsége, hogy az n húzás közül pontosan k-nál jön fekete:

Visszatevéses mintavétel

- Egy dobozban N golyó van, közülük M fekete, a többi fehér.
- **Visszatevéssel** kihúznak n darabot, minden húzásnál a korábbiakat elfelejtve mind az N golyót azonos valószínűséggel választva.
- Annak valószínűsége, hogy az n húzás közül pontosan k-nál jön fekete:

$$\boxed{\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ fekete}) = \binom{n}{k} \frac{M^k \cdot (N-M)^{n-k}}{N^n} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n).}$$

Visszatevéses mintavétel

- Egy dobozban N golyó van, közülük M fekete, a többi fehér.
- **Visszatevéssel** kihúznak n darabot, minden húzásnál a korábbiakat elfelejtve mind az N golyót azonos valószínűséggel választva.
- Annak valószínűsége, hogy az n húzás közül pontosan k-nál jön fekete:

melyik feketéket húztunk (k húzás)

melyik k húzás fekete

melyik fehéreket húztuk ($n-k$ húzás)

$$\boxed{\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ fekete}) = \binom{n}{k}\frac{M^k\cdot(N-M)^{n-k}}{N^n} \qquad (k = 0, 1, 2, \dots, n).}$$

összes lehetőség

Visszatevéses mintavétel

- Egy dobozban N golyó van, közülük M fekete, a többi fehér.
- **Visszatevéssel** kihúznak n darabot, minden húzásnál a korábbiakat elfelejtve mind az N golyót azonos valószínűséggel választva.
- Annak valószínűsége, hogy az n húzás közül pontosan k-nál jön fekete:

melyik feketéket húztunk (k húzás)

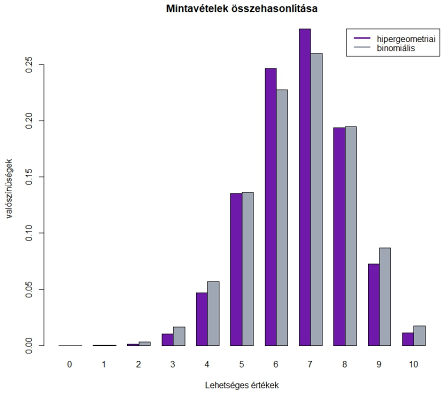
melyik k húzás fekete | melyik fehéreket húztuk ($n-k$ húzás)

$$\boxed{\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ fekete}) = \binom{n}{k}\frac{M^k \cdot (N-M)^{n-k}}{N^n} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n).}$$

összes lehetőség

Megjegyzés: a kihúzott fekete golyók száma **binomiális eloszlású**.

Mintavételek összehasonlítása

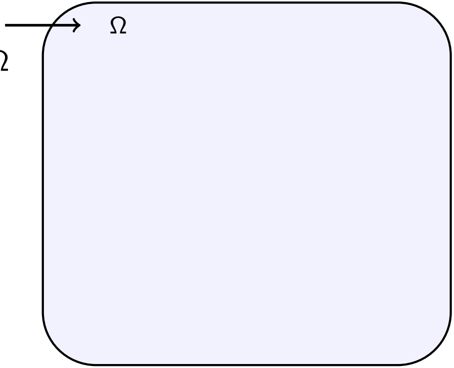


Visszatevés nélküli mintavétel (hipergeometriai eloszlás) és visszatevéses mintavétel (binomiális eloszlás) összehasonlítása $N = 60$, $M = 40$, $n = 10$ esetén

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

eseménytér

összes lehetőség: Ω



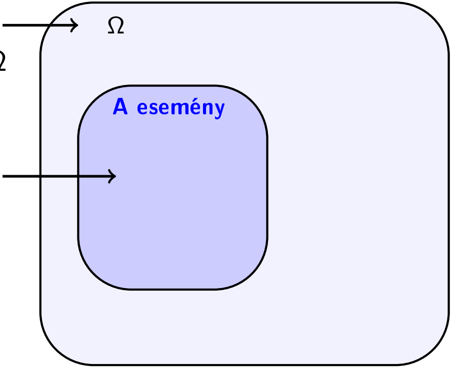
A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

eseménytér

összes lehetőség: Ω

esemény

$A \subseteq \Omega$ részhalmaz



A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

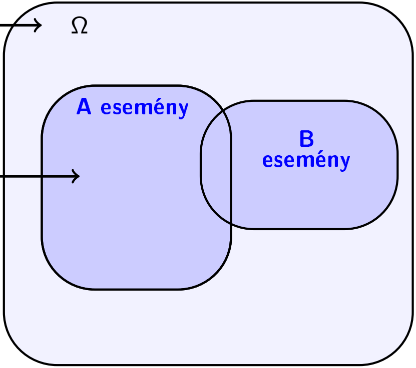
eseménytér

összes lehetőség: Ω

$$\boxed{\mathbb{P}(\Omega) = 1}$$

esemény

$A \subseteq \Omega$ részhalmaz



A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Ω: (magyar) **felnőtt emberek**

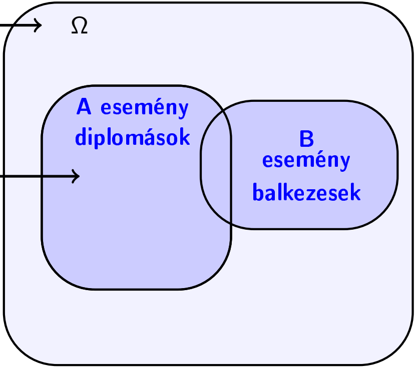
eseménytér

összes lehetőség: Ω

$\boxed{\mathbb{P}(\Omega) = 1}$

esemény

$A \subseteq \Omega$ részhalmaz



A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Ω: (magyar) **felnőtt emberek**

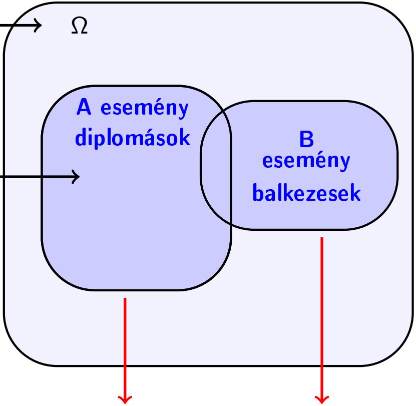
eseménytér

összes lehetőség: Ω

$\boxed{\mathbb{P}(\Omega) = 1}$

esemény

$A \subseteq \Omega$ részhalmaz



$\boxed{\mathbb{P}(A) = 22\%}$ $\boxed{\mathbb{P}(B) = 10\%}$

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Ω: (magyar) **felnőtt emberek**

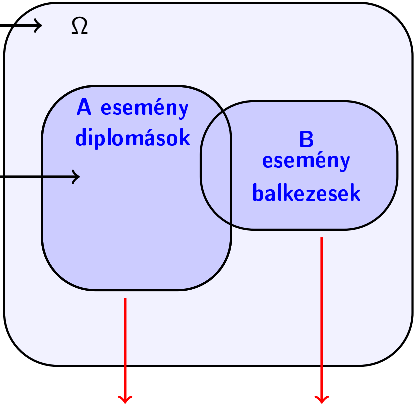
eseménytér

összes lehetőség: Ω

$\boxed{\mathbb{P}(\Omega) = 1}$

esemény

$A \subseteq \Omega$ részhalmaz



$\boxed{\mathbb{P}(A) = 22\%}$ $\boxed{\mathbb{P}(B) = 10\%}$

valószínűség: eseményekhez $[0,1]$-beli számokat rendelő függvény

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Ω: (magyar) **felnőtt emberek**

eseménytér

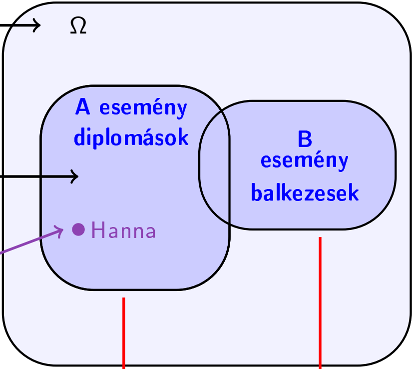
összes lehetőség: Ω

$\boxed{\mathbb{P}(\Omega) = 1}$

esemény

$A \subseteq \Omega$ részhalmaz

elemi esemény



valószínűség: eseményekhez $[0, 1]$-beli számokat rendelő függvény

$\boxed{\mathbb{P}(A) = 22\%}$ $\boxed{\mathbb{P}(B) = 10\%}$

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ hármas **Kolmogorov-féle valószínűségi mező**, ha

- az Ω **eseménytér** egy nem üres halmaz;

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ hármas **Kolmogorov-féle valószínűségi mező**, ha

- az Ω **eseménytér** egy nem üres halmaz;
- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ az **az események halmaza**, azaz minden $A \in \mathcal{A}$-ra $A \subseteq \Omega$ úgy, hogy
  1. $\Omega \in \mathcal{A}$;
  2. ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, akkor $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ (azaz megszámlálható sok $\mathcal{A}$-beli elem uniója is $\mathcal{A}$-beli);
  3. ha $A \in \mathcal{A}$, akkor $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ (azaz $\mathcal{A}$-beli halmazok komplementere is $\mathcal{A}$-beli.

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ hármas **Kolmogorov-féle valószínűségi mező**, ha

- az Ω **eseménytér** egy nem üres halmaz;
- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ az **az események halmaza**, azaz minden $A \in \mathcal{A}$-ra $A \subseteq \Omega$ úgy, hogy
  1. $\Omega \in \mathcal{A}$;
  2. ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, akkor $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ (azaz megszámlálható sok $\mathcal{A}$-beli elem uniója is $\mathcal{A}$-beli);
  3. ha $A \in \mathcal{A}$, akkor $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ (azaz $\mathcal{A}$-beli halmazok komplementere is $\mathcal{A}$-beli.
- a **valószínűség** egy $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$ függvény, melyre
  1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, azaz a biztos esemény valószínűsége 1;
  2. ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ és minden $1 \leq i < j$-re $A_i \cap A_j = \emptyset$, akkor

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n),$$

azaz megszámlálható sok kizáró esemény uniójának valószínűsége a valószínűségek összege.

Véges valószínűségi mező

Tegyük fel, hogy véges sok lehetséges kimenetel van, vagyis $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$
továbbá $\mathcal{A}$ az Ω összes részhalmazából áll.

Jelölés: $p_j = \mathbb{P}(\omega_j)$ a j. kimenetel valószínűsége. Ekkor az additivitás miatt

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = \sum_{j=1}^{n} p_j,$$

vagyis az elemi események valószínűségének összege 1. Továbbá

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\Bigg(\bigcup_{j:\, \omega_j \in A} p_j \Bigg) = \sum_{j:\, \omega_j \in A} p_j,$$

ami azt jelenti, hogy

minden esemény valószínűsége a benne lévő elemi események valószínűségének összege.

Klasszikus valószínűségi mező

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ olyan valószínűségi mező, melyre

- Ω véges halmaz;
- $\mathcal{A}$ az Ω összes részhalmazából áll;
- továbbá **minden elemi esemény egyformán valószínű**, azaz

$$\mathbb{P}(\omega_j) = p_j = \frac{1}{n} \qquad \text{minden } j = 1, 2, \ldots, n\text{-re.}$$

Ekkor $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$-t **klasszikus valószínűségi mezőnek** nevezzük. Ilyenkor tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ eseményre

$$\mathbb{P}(A) = \frac{k}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n},$$

ahol k az A elemeinek száma, n pedig az összes elemi esemény (lehetőség) száma.

Klasszikus valószínűségi mező

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ olyan valószínűségi mező, melyre

- Ω véges halmaz;
- $\mathcal{A}$ az Ω összes részhalmazából áll;
- továbbá **minden elemi esemény egyformán valószínű**, azaz

$$\mathbb{P}(\omega_j) = p_j = \frac{1}{n} \qquad \text{minden } j = 1, 2, \ldots, n\text{-re.}$$

Ekkor $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$-t **klasszikus valószínűségi mezőnek** nevezzük. Ilyenkor tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ eseményre

$$\mathbb{P}(A) = \frac{k}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n},$$

ahol k az A elemeinek száma, n pedig az összes elemi esemény (lehetőség) száma.

Példa: visszatevéses és visszatevés nélküli mintavétel, mindkét esetben az elemi események egyformán valószínűek voltak

Példa: két szabályos kockadobás

Két szabályos dobókockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7?

Példa: két szabályos kockadobás

Két szabályos dobókockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7?

A dobókockák, emberek, tárgyak stb. mindig különbözőek.

- **eseménytér**: lehetséges dobássorozatok. Ezek száma:

$$6 \cdot 6 = 36; \text{mindkét dobás hatféle lehet.}$$

- A dobássorozatok egyformán valószínűek: mindegyiknek $1/36$ a valószínűsége.
- A kedvező dobássorozatok száma: 6.

11	12	13	14	15	**16**
21	22	23	24	**25**	26
31	32	33	**34**	35	36
41	42	**43**	44	45	46
51	**52**	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

Tehát $\mathbb{P}(\text{az összeg } 7) = 6/36 = 1/6$.

Leszámlálások és jelölések

$$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots 2\cdot 1; \ \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k(k-1)\ldots 2\cdot 1}.$$

- n tárgyat $n!$-féleképpen lehet sorrendbe tenni.
- n tárgy közül k darabot visszatevés nélkül $n(n-1)\ldots(n-k+1)$-féleképpen lehet húzni, ha figyelembe vesszük a sorrendet: az első n-féle, a második $n-1$-féle lehet (akármi volt az első), a harmadik $n-2$-féle lehet (akármi volt az első kettő), és így tovább
- n tárgy közül egy k darabból álló csoportot $\binom{n}{k}$-féleképpen lehet kiválasztani (itt a kiválasztás sorrendje nem számít)
- ha n egymás utáni kísérlet mindegyikénél k lehetőség van, akkor az összes lehetőség száma a sorrendet is figyelembe véve

$$n\cdot n\cdot\ldots\cdot n = n^k.$$

Például egy kockadobás hatféle lehet, kettő 36-féle, három $6\cdot 6\cdot 6$-féle, n kockadobás 6^n-féle.

Tulajdonságok

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}; \quad \binom{n}{0} = 1; \binom{n}{1} = n; \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\binom{n}{N} = 0, \text{ ha } N > n.$$

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ általánosítása a **binomiális tétel**:

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{k}x^k y^{n-k} + \ldots + nxy^{n-1} + y^n.$$

Következmény $x = y = 1$-re:

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{k} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}.$$

Multinomiális/polinomiális tétel

- $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$
- $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

Multinomiális/polinomiális tétel

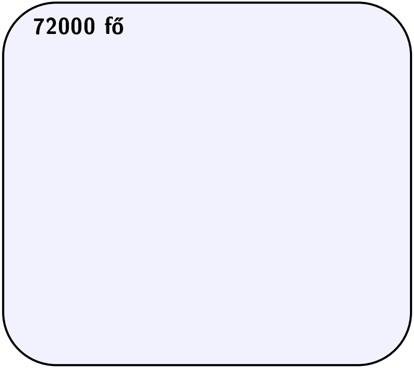
- $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$
- $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
- általánosan:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n = \sum \frac{n!}{i_1! \cdot i_2! \cdot \ldots \cdot i_k!} \cdot x_1^{i_1} \cdot x_2^{i_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{i_k},$$

ahol összegzünk az összes olyan $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ pozitív egészekből álló sorozatra, melyre $i_1 + i_2 + \ldots + i_k = n$.

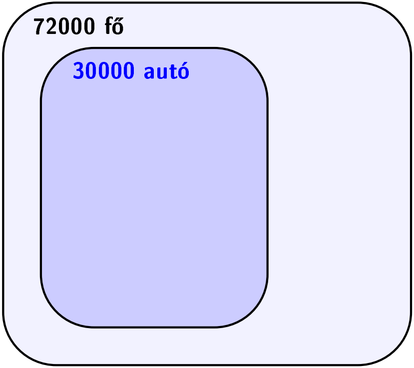
Unió valószínűsége: példa

Egy **72000 fős** városban



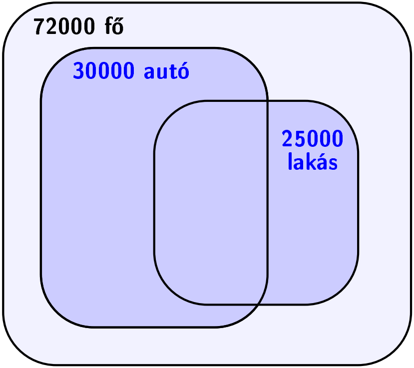
Unió valószínűsége: példa

Egy **72000 fős** városban **30000** embernek van autója,



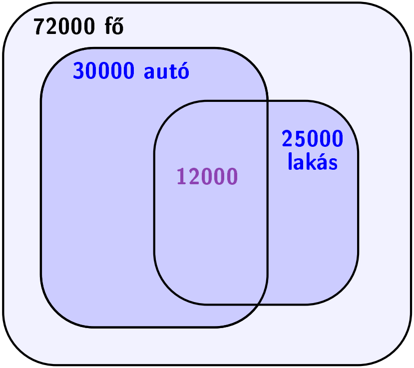
Unió valószínűsége: példa

Egy **72000 fős** városban **30000** embernek van autója, **25000**-nek lakása,



Unió valószínűsége: példa

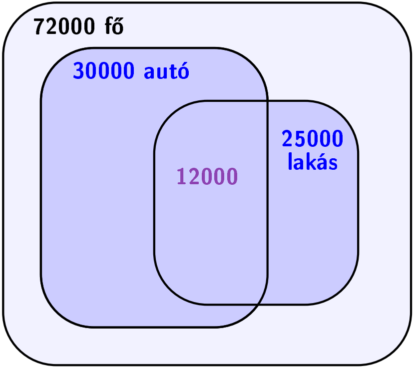
Egy **72000 fős** városban **30000** embernek van autója, **25000**-nek lakása, **12000**-nek autója és lakása is.



Unió valószínűsége: példa

Egy **72000 fős** városban **30000** embernek van autója, **25000**-nek lakása, **12000**-nek autója és lakása is.

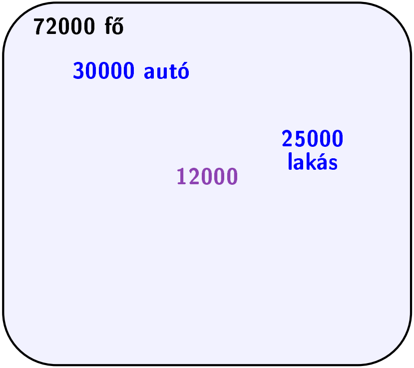
Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember **legalább az egyikkel** rendelkezik?



Unió valószínűsége: példa

Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember **legalább az egyikkel** rendelkezik?

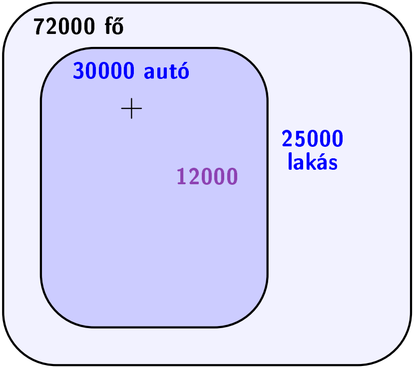
$\mathbb{P}($**legalább az egyik**$) =$



Unió valószínűsége: példa

Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember **legalább az egyikkel** rendelkezik?

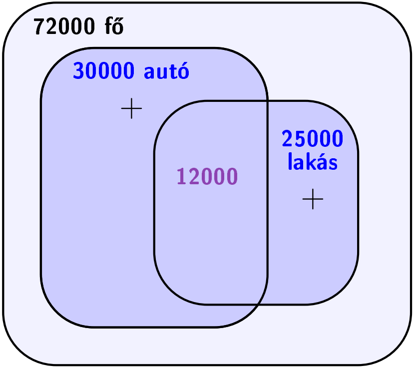
$\mathbb{P}(\textbf{legalább az egyik}) = \mathbb{P}(\textbf{autó})$



Unió valószínűsége: példa

Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember **legalább az egyikkel** rendelkezik?

$\mathbb{P}(\textbf{legalább az egyik}) = \mathbb{P}(\textbf{autó}) + \mathbb{P}(\textbf{lakás})$

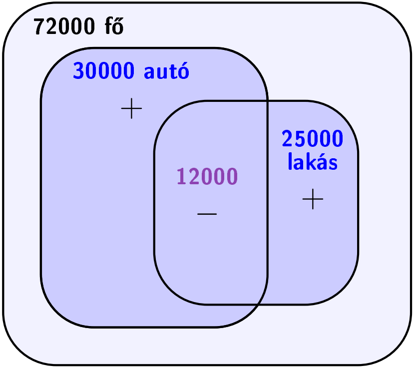


Unió valószínűsége: példa

Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember **legalább az egyikkel** rendelkezik?

$\mathbb{P}(\textbf{legalább az egyik}) = \mathbb{P}(\textbf{autó}) + \mathbb{P}(\textbf{lakás}) - \mathbb{P}(\textbf{mindkettő})$

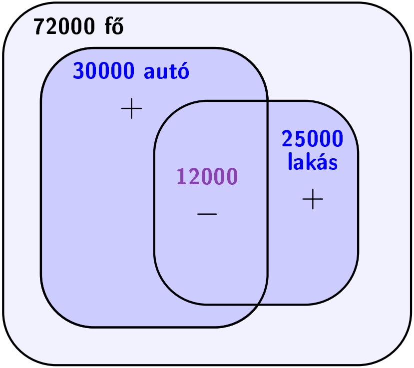
12000 embert kétszer számoltunk, ezt le kell vonni



Unió valószínűsége: példa

Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember **legalább az egyikkel** rendelkezik?

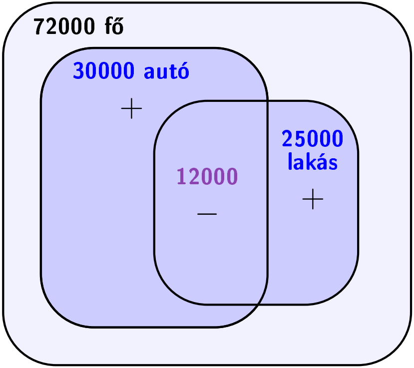
$$\mathbb{P}(\textbf{legalább az egyik}) = \mathbb{P}(\textbf{autó}) + \mathbb{P}(\textbf{lakás}) - \mathbb{P}(\textbf{mindkettő})$$
$$= 30000/72000 + 25000/72000 - 12000/72000$$



Unió valószínűsége: példa

Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember **legalább az egyikkel** rendelkezik?

$$\mathbb{P}(\textbf{legalább az egyik}) = \mathbb{P}(\textbf{autó}) + \mathbb{P}(\textbf{lakás}) - \mathbb{P}(\textbf{mindkettő})$$
$$= 30000/72000 + 25000/72000 - 12000/72000$$
$$= 43000/72000 = 59\%.$$



Unió valószínűsége: példa

Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember **legalább az egyikkel** rendelkezik?

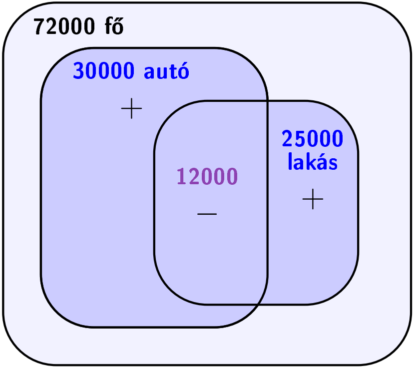
$$\boxed{\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(\textbf{autó}) + \mathbb{P}(\textbf{lakás}) - \mathbb{P}(\textbf{mindkettő})}$$

$$\uparrow$$

unió

$$= 30000/72000 + 25000/72000 - 12000/72000$$

$$= 43000/72000 = 59\%.$$

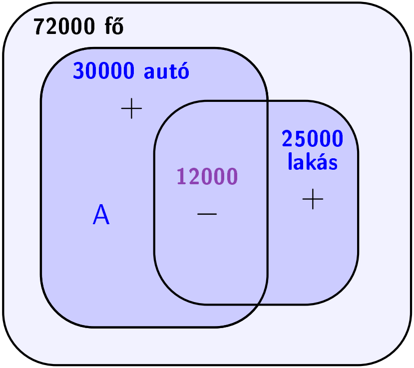


Unió valószínűsége: példa

Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember **legalább az egyikkel** rendelkezik?

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\textbf{lakás}) - \mathbb{P}(\textbf{mindkettő})}$$

$$\begin{aligned} \uparrow \quad & = 30000/72000 + 25000/72000 - 12000/72000 \\ \textbf{unió} \quad & = 43000/72000 = 59\%. \end{aligned}$$



Unió valószínűsége: példa

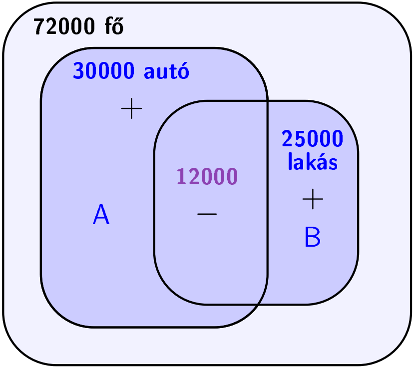
Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember **legalább az egyikkel** rendelkezik?

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(\text{mindkettő})}$$

$$= 30000/72000 + 25000/72000 - 12000/72000$$

$$= 43000/72000 = 59\%.$$

↑ **unió**



Unió valószínűsége: példa

Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember **legalább az egyikkel** rendelkezik?

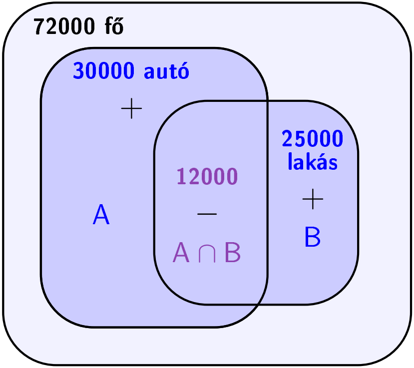
$$\boxed{\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)}$$

$$= 30000/72000 + 25000/72000 - 12000/72000$$

$$= 43000/72000 = 59\%.$$

unió

metszet



Unió valószínűsége: példa

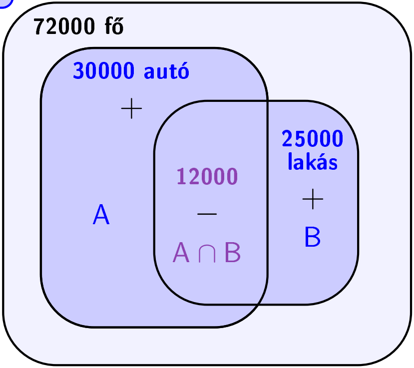
Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember **legalább az egyikkel** rendelkezik?

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cup B) = \quad \mathbb{P}(A) \quad + \mathbb{P}(B) \quad - \mathbb{P}(A \cap B)}$$

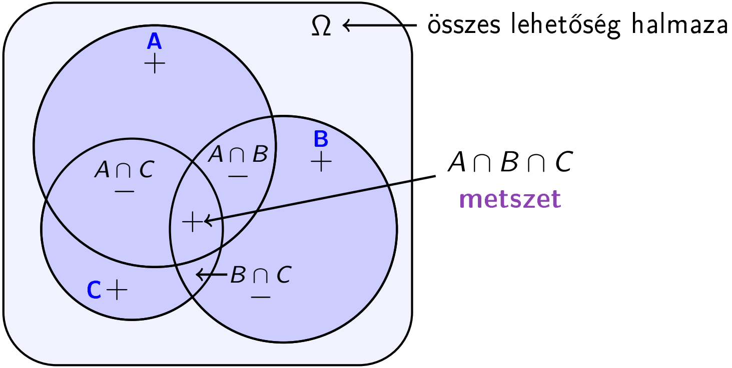
$$= 30000/72000 + 25000/72000 - 12000/72000$$

$$= 43000/72000 = 59\%.$$

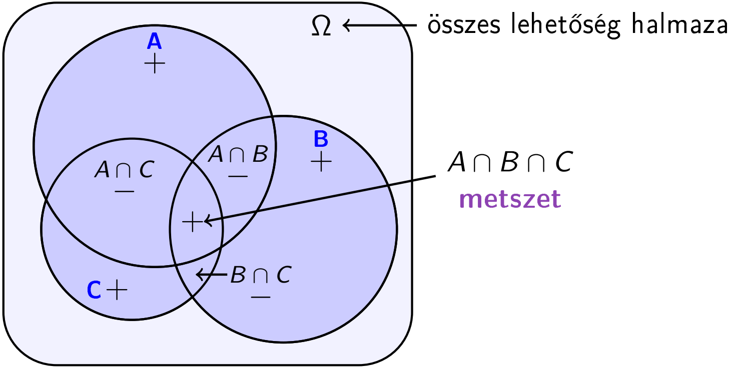
szitaformula



Szitaformula három eseményre



Szitaformula három eseményre



Az **unió** (legalább az egyik bekövetkezik) valószínűsége:

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)$$
$$-\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) +$$
$$+\mathbb{P}(A \cap B \cap C).$$

Szitaformula

Szitaformula két eseményre. Annak valószínűsége, hogy A és B közül legalább az egyik bekövetkezik:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Szitaformula három eseményre. Annak valószínűsége, hogy A, B és C közül legalább az egyik bekövetkezik:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = {} & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \\ & - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

Szitaformula

Szitaformula két eseményre. Annak valószínűsége, hogy A és B közül legalább az egyik bekövetkezik:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Szitaformula három eseményre. Annak valószínűsége, hogy A, B és C közül legalább az egyik bekövetkezik:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \\ - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

Szitaformula általánosan: az $A_1, \ldots, A_n$ események uniójának (vagyis annak, hogy legalább az egyik bekövetkezik) a valószínűsége:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \ldots + \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \\ - \ldots - \mathbb{P}(A_{n-1} \cap A_n) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \ldots\end{aligned}$$

Szitaformula

Annak valószínűsége, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események közül legalább az egyik bekövetkezik:

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \ldots + \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \\ - \ldots - \mathbb{P}(A_{n-1} \cap A_n) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \ldots$$

Vagyis:

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \\ + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) - \\ - \ldots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \\ = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}).$$

Szitaformula: példa

Egy kisfiú Kinder-figurákat gyűjt. Tízféle Kinder-figura van, a tojásokban a többitől függetlenül mindegyik azonos valószínűséggel található. Mennyi a valószínűsége, hogy 20 Kinder-tojás felbontása után mind a tíz figurából lesz legalább egy példánya?

Szitaformula: példa

Egy kisfiú Kinder-figurákat gyűjt. Tízféle Kinder-figura van, a tojásokban a többitől függetlenül mindegyik azonos valószínűséggel található. Mennyi a valószínűsége, hogy 20 Kinder-tojás felbontása után mind a tíz figurából lesz legalább egy példánya?

Legyen A_i az az esemény, hogy az i. figura nincs meg a kisfiúnak ($i = 1, \ldots, 10$). Ekkor annak a valószínűsége, hogy mind a 10 figurából van neki legalább egy:

Szitaformula: példa

Egy kisfiú Kinder-figurákat gyűjt. Tízféle Kinder-figura van, a tojásokban a többitől függetlenül mindegyik azonos valószínűséggel található. Mennyi a valószínűsége, hogy 20 Kinder-tojás felbontása után mind a tíz figurából lesz legalább egy példánya?

Legyen A_i az az esemény, hogy az i. figura nincs meg a kisfiúnak ($i = 1, \ldots, 10$). Ekkor annak a valószínűsége, hogy mind a 10 figurából van neki legalább egy: $1 - \mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_{10})$.

Szitaformula: példa

Egy kisfiú Kinder-figurákat gyűjt. Tízféle Kinder-figura van, a tojásokban a többitől függetlenül mindegyik azonos valószínűséggel található. Mennyi a valószínűsége, hogy 20 Kinder-tojás felbontása után mind a tíz figurából lesz legalább egy példánya?

Legyen A_i az az esemény, hogy az i. figura nincs meg a kisfiúnak ($i = 1, \ldots, 10$). Ekkor annak a valószínűsége, hogy mind a 10 figurából van neki legalább egy: $1 - \mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_{10})$.

Kezdjük el felírni a szitaformulát. Az első tag:

$$\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \ldots + \mathbb{P}(A_{10}) = 10 \cdot \frac{9^{20}}{10^{20}},$$

hiszen A_j azt jelenti, hogy a j. figura nem fordulhat elő, a többi 9 közül bármelyik bármelyik tojásban lehet (mint a visszatevéses mintavételnél).

Szitaformula: példa

Hasonlóképpen a következő tag, amit le kell vonnunk:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) + \ldots + \mathbb{P}(A_9 \cap A_{10}) = \binom{10}{2} \cdot \frac{8^{20}}{10^{20}},$$

hiszen a tagok száma megegyezik az $1, 2, \ldots, 10$ közül kiválasztható párok számával, $A_i \cap A_j$ pedig azt jelenti, hogy az i. és j. figura nem fordulhat elő, így mindegyik tojásban 8-féle figura lehet.

Szitaformula: példa

Hasonlóképpen a következő tag, amit le kell vonnunk:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) + \ldots + \mathbb{P}(A_9 \cap A_{10}) = \binom{10}{2} \cdot \frac{8^{20}}{10^{20}},$$

hiszen a tagok száma megegyezik az $1, 2, \ldots, 10$ közül kiválasztható párok számával, $A_i \cap A_j$ pedig azt jelenti, hogy az i. és j. figura nem fordulhat elő, így mindegyik tojásban 8-féle figura lehet.

Összességében:

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_{10}) = 10 \cdot \frac{9^{20}}{10^{20}} - \binom{10}{2} \cdot \frac{8^{20}}{10^{20}} + \binom{10}{3} \cdot \frac{7^{20}}{10^{20}} - \ldots =$$

$$= \sum_{k=1}^{10} (-1)^{k+1} \binom{10}{k} \frac{(10-k)^{20}}{10^{20}} = 78,53\%.$$

Szitaformula: példa

Hasonlóképpen a következő tag, amit le kell vonnunk:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) + \ldots + \mathbb{P}(A_9 \cap A_{10}) = \binom{10}{2} \cdot \frac{8^{20}}{10^{20}},$$

hiszen a tagok száma megegyezik az $1, 2, \ldots, 10$ közül kiválasztható párok számával, $A_i \cap A_j$ pedig azt jelenti, hogy az i. és j. figura nem fordulhat elő, így mindegyik tojásban 8-féle figura lehet.

Összességében:

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_{10}) = 10 \cdot \frac{9^{20}}{10^{20}} - \binom{10}{2} \cdot \frac{8^{20}}{10^{20}} + \binom{10}{3} \cdot \frac{7^{20}}{10^{20}} - \ldots =$$

$$= \sum_{k=1}^{10} (-1)^{k+1} \binom{10}{k} \frac{(10-k)^{20}}{10^{20}} = 78,53\%.$$

Ez tehát annak valószínűsége, hogy valamelyik fajta figura hiányzik, és így a keresett valószínűség: $100 - 78,53 = 21,47\%$.

Függetlenség

Mely események tekinthetők egymástól függetlennek, és melyek között van kapcsolat? Péter egy felmérés véletlenszerűen választott résztvevője.

Péternek van saját autója

holnap Budapesten lesz csapadék

Péter jövedelme több az átlagosnál

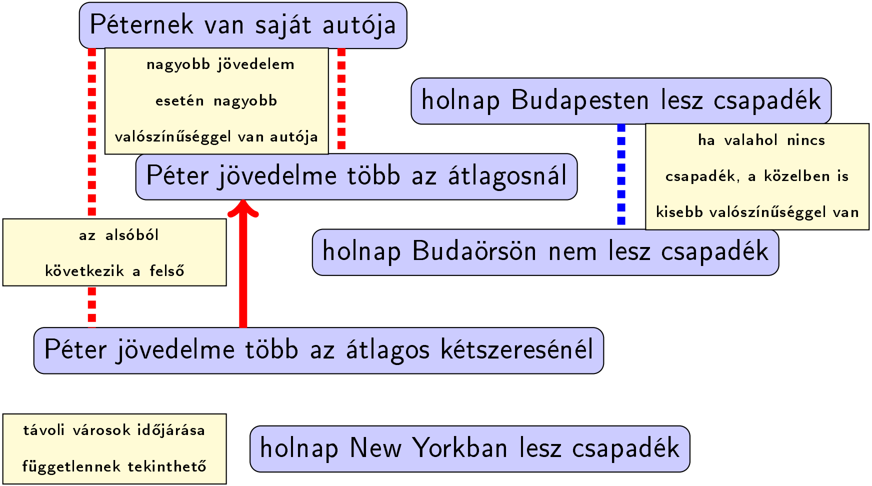
holnap Budaörsön nem lesz csapadék

Péter jövedelme több az átlagos kétszeresénél

holnap New Yorkban lesz csapadék

Függetlenség

Mely események tekinthetők egymástól függetlennek, és melyek között van kapcsolat? Péter egy felmérés véletlenszerűen választott résztvevője.



Események függetlensége: példa

Tegyük fel, hogy egy városban

- összesen 100000 ember él;
- 15000 embernek **van saját autója (A esemény)**:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{15000}{100000} = 0,15.$$

- 25000-nek **több a jövedelme az átlagosnál** (B esemény):

$$\mathbb{P}(B) = \frac{25000}{100000} = 0,25.$$

- 10000 ember van, akinek **több a jövedelme az átlagosnál és saját autóval rendelkezik**:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{10000}{100000} = 0,1.$$

Független-e A és B, vagyis az, hogy egy véletlenszerűen választott lakos jövedelme több az átlagosnál, és saját autóval rendelkezik?

Események függetlensége: példa

Hasonlítsuk össze **az autóval rendelkezők arányát**

Események függetlensége: példa

Hasonlítsuk össze **az autóval rendelkezők arányát a teljes lakosságban**,

Az autóval rendelkezők aránya a teljes lakosságban: $\mathbb{P}(A) = \frac{15000}{100000} = 0,15$

Események függetlensége: példa

Hasonlítsuk össze **az autóval rendelkezők arányát a teljes lakosságban**, illetve **az átlagosnál nagyobb jövedelműek között**. Saját autó (A): 10000, nagy jövedelem (B): 25000,
mindkettő ($A \cap B$): 10000, összes lakos: 100000.

Ha független a két esemény, akkor a két arány megegyezik.

Az autóval rendelkezők aránya a teljes lakosságban: $\mathbb{P}(A) = \frac{15000}{100000} = 0,15$

Az autóval rendelkezők aránya az átlagosnál nagyobb jövedelműek között: $\frac{10000}{25000} = 0,4$

Események függetlensége: példa

Hasonlítsuk össze **az autóval rendelkezők arányát a teljes lakosságban**, illetve **az átlagosnál nagyobb jövedelműek között**. Saját autó (A): 10000, nagy jövedelem (B): 25000,
mindkettő ($A \cap B$): 10000, összes lakos: 100000.

Ha független a két esemény, akkor a két arány megegyezik.

Az autóval rendelkezők aránya a teljes lakosságban: $\mathbb{P}(A) = \frac{15000}{100000} = 0,15$	$\neq$	Az autóval rendelkezők aránya az átlagosnál nagyobb jövedelműek között: $\frac{10000}{25000} = 0,4$

Események függetlensége: példa

Hasonlítsuk össze **az autóval rendelkezők arányát a teljes lakosságban**, illetve **az átlagosnál nagyobb jövedelműek között**. Saját autó (A): 10000, nagy jövedelem (B): 25000,
mindkettő ($A \cap B$): 10000, összes lakos: 100000.

Ha független a két esemény, akkor a két arány megegyezik.

Az autóval rendelkezők aránya a teljes lakosságban: $\mathbb{P}(A) = \frac{15000}{100000} = 0,15$	$\neq$	Az autóval rendelkezők aránya az átlagosnál nagyobb jövedelműek között: $\frac{10000}{25000} = 0,4$

Az autóval rendelkezők aránya több az átlagosnál nagyobb jövedelműek között $\Rightarrow$ **a két esemény nem független.**

Események függetlensége: példa

Hasonlítsuk össze **az autóval rendelkezők arányát a teljes lakosságban**, illetve **az átlagosnál nagyobb jövedelműek között**. Saját autó (A): 10000, nagy jövedelem (B): 25000,
mindkettő ($A \cap B$): 10000, összes lakos: 100000.

Az autóval rendelkezők aránya a teljes lakosságban: $\mathbb{P}(A) = \frac{15000}{100000} = 0,15$	$\neq$	Az autóval rendelkezők aránya az átlagosnál nagyobb jövedelműek között: $\frac{10000}{25000} = 0,4$

Akkor egyezett volna meg a két arány, ha $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$, azaz

Események függetlensége: példa

Hasonlítsuk össze **az autóval rendelkezők arányát a teljes lakosságban**, illetve **az átlagosnál nagyobb jövedelműek között**. Saját autó (A): 10000, nagy jövedelem (B): 25000,
mindkettő ($A \cap B$): 10000, összes lakos: 100000.

Az autóval rendelkezők aránya a teljes lakosságban: $\mathbb{P}(A) = \frac{15000}{100000} = 0,15$	$\neq$	Az autóval rendelkezők aránya az átlagosnál nagyobb jövedelműek között: $\frac{10000}{25000} = 0,4$

Akkor egyezett volna meg a két arány, ha $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$, azaz

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \quad \Leftrightarrow$$

Események függetlensége: példa

Hasonlítsuk össze **az autóval rendelkezők arányát a teljes lakosságban**, illetve **az átlagosnál nagyobb jövedelműek között**. Saját autó (A): 10000, nagy jövedelem (B): 25000,
mindkettő ($A \cap B$): 10000, összes lakos: 100000.

Az autóval rendelkezők aránya a teljes lakosságban: $\mathbb{P}(A) = \frac{15000}{100000} = 0,15$	$\neq$	Az autóval rendelkezők aránya az átlagosnál nagyobb jövedelműek között: $\frac{10000}{25000} = 0,4$

Akkor egyezett volna meg a két arány, ha $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$, azaz

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B).$$

Események függetlensége

Az $A, B \in \mathcal{A}$ események **függetlenek**, ha

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B),$$

vagyis **a metszet valószínűsége a valószínűségek szorzata**.

Események függetlensége

Az $A, B \in \mathcal{A}$ események **függetlenek**, ha

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B),$$

vagyis **a metszet valószínűsége a valószínűségek szorzata**.

Több eseménynél tetszőleges részhalmazra teljesülnie kell ennek a tulajdonságnak.

Az $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ események **függetlenek**, ha tetszőleges $k \geq 1$ és $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ számokra

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2}) \ldots \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

Függetlenség: példa

Két szabályos dobókockával dobunk. Független-e az alábbi két esemény: **az első dobás hatos**; **a második dobás hatos**?

Függetlenség: példa

Két szabályos dobókockával dobunk. Független-e az alábbi két esemény: **az első dobás hatos**; **a második dobás hatos**?

11	12	13	14	15	**16**
21	22	23	24	25	**26**
31	32	33	34	35	**36**
41	42	43	44	45	**46**
51	52	53	54	55	**56**
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**

A: az első dobás hatos; **B**: a második dobás hatos; $A \cap B$: mindkét dobás hatos

Függetlenség: példa

Két szabályos dobókockával dobunk. Független-e az alábbi két esemény: **az első dobás hatos**; **a második dobás hatos**?

11	12	13	14	15	**16**
21	22	23	24	25	**26**
31	32	33	34	35	**36**
41	42	43	44	45	**46**
51	52	53	54	55	**56**
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**

A: az első dobás hatos; **B**: a második dobás hatos; $A \cap B$: mindkét dobás hatos

$$\frac{1}{36} = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}.$$

Az A és B események **függetlenek**.

Függetlenség: példa

Két szabályos dobókockával dobunk. Független-e az alábbi két esemény: **az első dobás hatos**; **az összeg** 10?

Függetlenség: példa

Két szabályos dobókockával dobunk. Független-e az alábbi két esemény: **az első dobás hatos**; **az összeg** 10?

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	**46**
51	52	53	54	**55**	56
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**

A: az első dobás hatos; **C**: az összeg 10; $A \cap C$: az első dobás hatos, a második négyes

Függetlenség: példa

Két szabályos dobókockával dobunk. Független-e az alábbi két esemény: **az első dobás hatos**; **az összeg** 10?

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	**46**
51	52	53	54	**55**	56
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**

A: az első dobás hatos; **C**: az összeg 10; $A \cap C$: az első dobás hatos, a második négyes

$$\frac{1}{36} = \mathbb{P}(A \cap C) \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{12}.$$

Az A és C események **nem függetlenek**.

Függetlenség: példa

Két szabályos dobókockával dobunk. Független-e az alábbi két esemény: **az első dobás hatos**; **az összeg** 7?

Függetlenség: példa

Két szabályos dobókockával dobunk. Független-e az alábbi két esemény: **az első dobás hatos**; **az összeg** 7?

11	12	13	14	15	**16**
21	22	23	24	**25**	26
31	32	33	**34**	35	36
41	42	**43**	44	45	46
51	**52**	53	54	55	56
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**

A: az első dobás hatos; **D**: az összeg 7; $A \cap D$: az első dobás hatos, a második egyes

Függetlenség: példa

Két szabályos dobókockával dobunk. Független-e az alábbi két esemény: **az első dobás hatos**; **az összeg** 7?

11	12	13	14	15	**16**
21	22	23	24	**25**	26
31	32	33	**34**	35	36
41	42	**43**	44	45	46
51	**52**	53	54	55	56
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**

A: az első dobás hatos; **D**: az összeg 7; A ∩ D: az első dobás hatos, a második egyes

$$\frac{1}{36} = \mathbb{P}(A \cap D) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(D) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}.$$

Az A és D események **függetlenek**.

Valószínűségi változók

események (egy kísérlet eredményéhez **igen vagy nem** tartozik):

- A: holnap lesz csapadék Budapesten
- B: egy véletlenszerűen választott magyar ember Budapesten lakik
- C: egy véletlenszerűen választott magyar ember 500000 forintnál többet keres

valószínűségi változók (egy kísérlet eredményéhez egy **szám** tartozik):

- X: a holnap Budapesten lehulló csapadék mennyisége mm-ben
- Y: egy véletlenszerűen választott magyar ember lakcímének irányítószáma
- Z: egy véletlenszerűen választott magyar ember bruttó havi keresete forintban

Valószínűségi változók: jelölések és definíció

- X: a holnap lehulló csapadék mennyisége mm-ben $\to \mathbb{P}(X \leq 5)$, azaz mennyi annak valószínűsége, hogy holnap **legfeljebb** 5 **mm** csapadék esik;
- Y: egy véletlenszerűen választott magyar ember lakcímének irányítószáma $\to \mathbb{P}(Y = 2092)$, azaz mennyi annak valószínűsége, hogy a kiválasztott ember Budakeszin lakik, **irányítószáma pontosan** 2092
- Z: egy véletlenszerűen választott magyar ember bruttó havi keresete forintban $\to \mathbb{P}(Z \leq 500000)$, azaz mennyi annak valószínűsége, hogy a kiválasztott ember **legfeljebb bruttó** 500000 **forintot** keres havonta

Definíció (Valószínűségi változó)

Egy $X : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény ***valószínűségi változó****, ha tetszőleges t valós számra teljesül, hogy*

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\} \in \mathcal{A},$$

azaz tetszőleges t valós számra a $\mathbb{P}(X \leq t)$ valószínűség értelmes.

Valószínűségi változó: példa

Valakinek három gyereke születik. Legyen X a fiúk száma. Ekkor az összes lehetőség halmaza Ω, és $X : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény az alábbi módon:

$$\Omega = \{FFF, FFL, FLF, FLL, LFF, LFL, LLF, LLL\};$$

$$X(LLL) = 0; \qquad X(LLF) = X(LFL) = X(FLL) = 1;$$

$$X(FFL) = X(FLF) = X(LFF) = 2; \qquad X(FFF) = 3.$$

Az X **valószínűségi változó lehetséges értékei**:

$$\{0, 1, 2, 3\} \to \text{véges halmaz}$$

A lehetséges értékekhez tartozó valószínűségek, feltéve, hogy a gyerekek egymástól függetlenül $1/2$ valószínűséggel fiúk:

$$\mathbb{P}(X = 0) = 1/8, \qquad \mathbb{P}(X = 1) = 3/8,$$

$$\mathbb{P}(X = 2) = 3/8, \qquad \mathbb{P}(X = 3) = 1/8.$$

Diszkrét valószínűségi változó és eloszlása: definíciók

Definíció

Egy $X : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény **valószínűségi változó**, *ha tetszőleges t valós számra*

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\} \in \mathcal{A},$$

azaz tetszőleges t valós számra a $\mathbb{P}(X \leq t)$ valószínűség értelmes.

Ilyenkor a $\mathbb{P}(X = t)$ valószínűség is tetszőleges t-re értelmes.

Az $X : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változó **diszkrét**, ha **ha lehetséges értékeinek halmaza véges vagy megszámlálhatóan végtelen**.

Diszkrét valószínűségi változó és eloszlása: definíciók

Definíció

Egy $X : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény **valószínűségi változó**, *ha tetszőleges t valós számra*

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\} \in \mathcal{A},$$

azaz tetszőleges t valós számra a $\mathbb{P}(X \leq t)$ valószínűség értelmes.

Ilyenkor a $\mathbb{P}(X = t)$ valószínűség is tetszőleges t-re értelmes.

Az $X : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változó **diszkrét**, ha **ha lehetséges értékeinek halmaza véges vagy megszámlálhatóan végtelen**.

Legyenek az X **diszkrét valószínűségi változó** lehetséges értékei:

$$\{x_1, x_2, \ldots\}, \qquad \text{és } p_k = \mathbb{P}(X = x_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Ekkor az $(x_1, p_1), (x_2, p_2), \ldots$ sorozat az X valószínűségi változó **eloszlása**. Ilyenkor

$$p_k \geq 0 \text{ minden } k\text{-ra, és } \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1,$$

Diszkrét valószínűségi változó eloszlása

Három gyerek. Valakinek három gyereke születik, X a fiúk száma, feltesszük, hogy mind a $2^3 = 8$ lehetőség egyformán valószínű. Ekkor X lehetséges értékei:

$$\{0, 1, 2, 3\} \to \text{véges halmaz} \to X \textbf{ diszkrét}.$$

Ahogy láttuk:

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{8}; \quad \mathbb{P}(X = 1) = \frac{3}{8}; \quad \mathbb{P}(X = 2) = \frac{3}{8}; \quad \mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{8}.$$

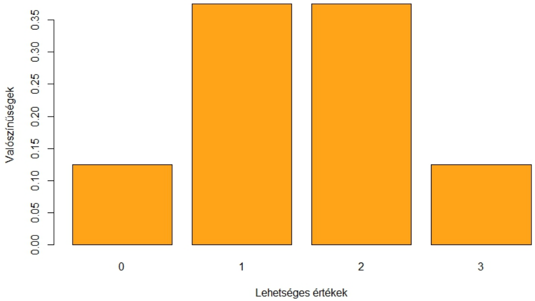
Mindezek alapján X **eloszlása** az alábbi sorozat:

$$(0, 1/8), \qquad (1, 3/8), \qquad (2, 3/8), \qquad (3, 1/8).$$

Szabályos kockadobás. Egyszer dobunk szabályos dobókockával, jelölje Y a dobott számot. Ekkor Y **diszkrét**, és az **eloszlása**:

$$(1, 1/6), \quad (2, 1/6), \quad (3, 1/6), \quad (4, 1/6), \quad (5, 1/6), \quad (6, 1/6).$$

Példa: a fiúk számának eloszlása



A fiúk számának eloszlása: a lehetséges értékek:

$$\{0, 1, 2, 3\}$$

és a hozzájuk tartozó valószínűségek:

$$1/8, \quad 3/8, \quad 3/8, \quad 1/8.$$

Valószínűségi változó eloszlása

Definíció (Valószínűségi változó)

Egy $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *függvény* **valószínűségi változó**, *ha tetszőleges* t *valós számra*

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le t\} \in \mathcal{A},$$

vagyis tetszőleges t *valós számra a* $\mathbb{P}(X \le t)$ *valószínűség értelmes.*

Nem feltétlenül diszkrét $X : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változó **eloszlása**: Q_X mérték, melyre

$$Q_X(B) = \mathbb{P}(X \in B),$$

ahol $B \subseteq \mathbb{R}$ megfelelő feltételeket teljesítő halmaz (Borel-halmaz).

Például: $B = [a, b]$ intervallum esetén

$$Q_X([a, b]) = \mathbb{P}(X \in [a, b]) = \mathbb{P}(a \le X \le b).$$

Vagy $B = (-\infty, t]$ félegyenes esetén

$$Q_X((-\infty, t]) = \mathbb{P}(X \in (-\infty, t]) = \mathbb{P}(X \le t).$$

Házi feladat október 3., hétfő, 10:15-ig

Egy elképzelt faluban 50 háztartás van, mindegyikben négyen laknak. Egy közvéleménykutatáshoz kiválasztanak tíz embert, minden tízfős csoportot azonos valószínűséggel választva. Mennyi a valószínűsége, hogy a közvéleménykutatás résztvevői között lesz legalább egy teljes háztartás, azaz van olyan háztartás, aminek minden tagját kiválasztották?