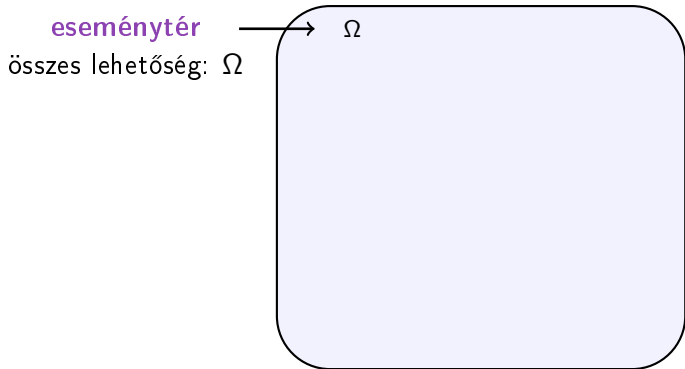
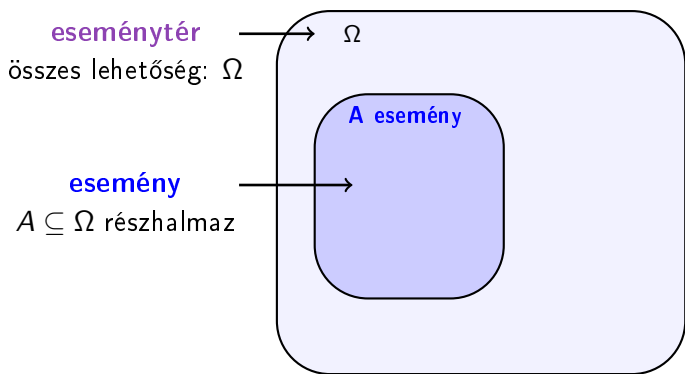


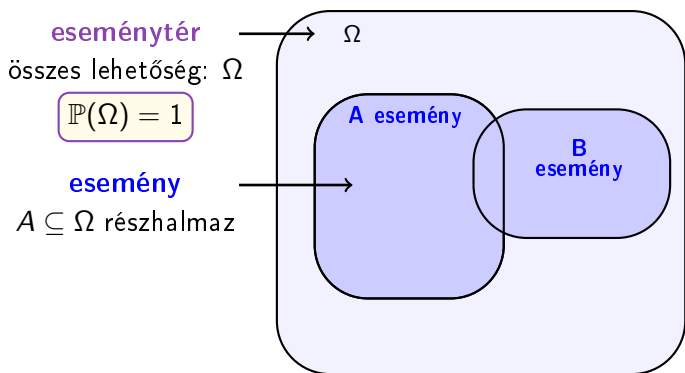
A Kolmogorov-féle valószínűségi mező



A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

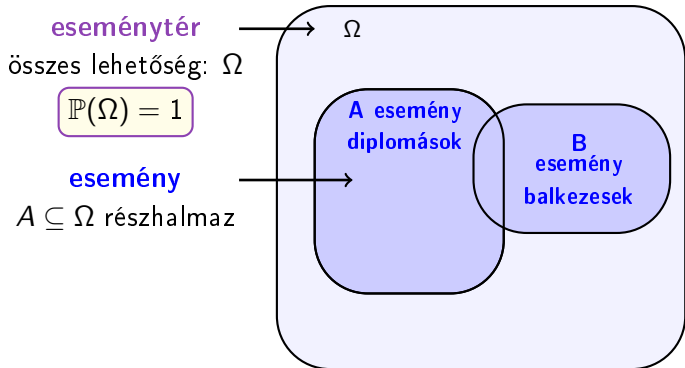


A Kolmogorov-féle valószínűségi mező



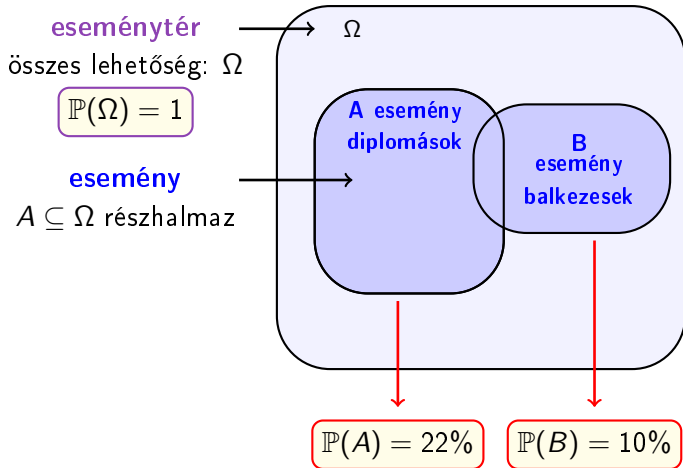
A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Ω : (magyar) **felnőtt emberek**



A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Ω : (magyar) **felnőtt emberek**



A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Ω : (magyar) **felnőtt emberek**

eseménytér

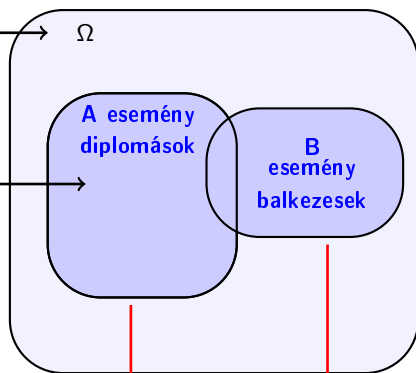
összes lehetőség: Ω

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1$$

esemény

$A \subseteq \Omega$ részhalmaz

valószínűség: eseményekhez $[0, 1]$ -beli számokat rendelő függvény



$$\mathbb{P}(A) = 22\%$$

$$\mathbb{P}(B) = 10\%$$

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Ω : (magyar) **felnőtt emberek**

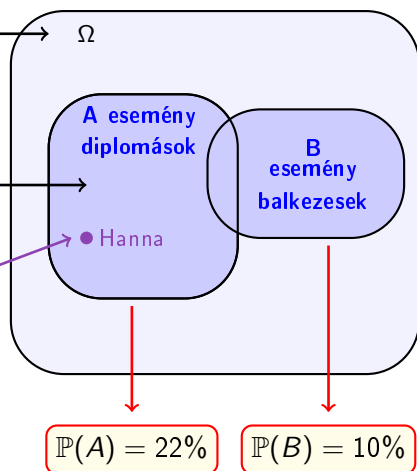
eseménytér
összes lehetőség: Ω

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1$$

esemény
 $A \subseteq \Omega$ részhalmaz

elemi esemény

valószínűség: eseményekhez $[0, 1]$ -beli számokat rendelő függvény



A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ hármas **Kolmogorov-féle valószínűségi mező**, ha

- az Ω **eseménytér** egy nem üres halmaz;

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ hármas **Kolmogorov-féle valószínűségi mező**, ha

- az Ω **eseménytér** egy nem üres halmaz;
- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ az **az események halmaza**, azaz minden $A \in \mathcal{A}$ -ra $A \subseteq \Omega$ úgy, hogy
 - i) $\Omega \in \mathcal{A}$;
 - ii) ha $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, akkor $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ (azaz megszámlálható sok \mathcal{A} -beli elem uniója is \mathcal{A} -beli);
 - iii) ha $A \in \mathcal{A}$, akkor $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ (azaz \mathcal{A} -beli halmazok komplementere is \mathcal{A} -beli).

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ hármast **Kolmogorov-féle valószínűségi mező**, ha

- az Ω **eseménytér** egy nem üres halmaz;
- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ az **az események halmaza**, azaz minden $A \in \mathcal{A}$ -ra $A \subseteq \Omega$ úgy, hogy
 - ❶ $\Omega \in \mathcal{A}$;
 - ❷ ha $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, akkor $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ (azaz megszámlálható sok \mathcal{A} -beli elem uniója is \mathcal{A} -beli);
 - ❸ ha $A \in \mathcal{A}$, akkor $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ (azaz \mathcal{A} -beli halmazok komplementere is \mathcal{A} -beli).
- a **valószínűség** egy $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ függvény, melyre
 - ❶ $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, azaz a biztos esemény valószínűsége 1;
 - ❷ ha $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ és minden $1 \leq i < j$ -re $A_i \cap A_j = \emptyset$, akkor

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n),$$

azaz megszámlálható sok kizáró esemény uniójának valószínűsége a valószínűségek összege.

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

- Ω : **eseménytér** vagy elemi események halmaza.
- Ω elemei ($\omega \in \Omega$): **elemi események**.
- \mathcal{A} : **események halmaza** (vagy események σ -algebrája).
- \mathcal{A} elemei ($A \in \mathcal{A}$): **események**.
- \mathbb{P} : **valószínűség** (probability).
- Ω esemény neve: biztos esemény.
- \emptyset (üres halmaz) esemény neve: lehetetlen esemény.
- $A \in \mathcal{A}$ és $B \in \mathcal{A}$ **kizáró események**, ha $A \cap B = \emptyset$, azaz **egyszerre nem következhetnek be**.

Feltételes valószínűség: példa

Gábornak **három gyereke** van.

Feltételes valószínűség: példa

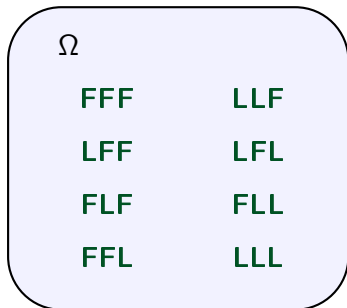
Gábornak **három gyereke** van.

Mennyi a valószínűsége, hogy **a középső gyermeke fiú?**

Feltételes valószínűség: példa

Gábornak **három gyereke** van.

Mennyi a valószínűsége, hogy **a középső gyermeke fiú?**



Feltételes valószínűség: példa

Gábornak **három gyereke** van.

Mennyi a valószínűsége, hogy **a középső gyermeke fiú?**

A esemény

$2^3 = 8$
egyformán
valószínű
lehetőség

4 jó lehetőség

Ω

FFF	LLF
LFF	LFL
FLF	FLL
FFL	LLL

$$\mathbb{P}(A) = \frac{4}{8} = 50\%$$

Feltételes valószínűség: példa

Gábornak **három gyereke** van.

Azt is elárulja, hogy **pontosan egy fia van**.

Most mennyi a valószínűsége, hogy **a középső gyermeke fiú?**

A esemény



Feltételes valószínűség: példa

feltétel: plusz információ

Gábornak **három gyereke** van. ↓ B esemény

Azt is elárulja, hogy **pontosan egy fia van**.

Most mennyi a valószínűsége, hogy **a középső gyermeke fiú?**

↖ A esemény

Feltételes valószínűség: példa

feltétel: plusz információ

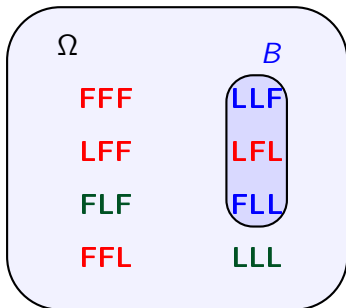
Gábornak **három gyereke** van. \downarrow B esemény

Azt is elárulja, hogy **pontosan egy fia van**.

Most mennyi a valószínűsége, hogy **a középső gyermeke fiú?**

\nwarrow A esemény

$2^3 = 8$
egyformán
valószínű
lehetőség



Feltételes valószínűség: példa

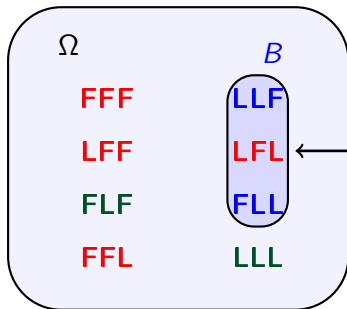
feltétel: plusz információ

Gábornak **három gyereke** van. ↓ B esemény

Azt is elárulja, hogy **pontosan egy fia van**.

Most mennyi a valószínűsége, hogy **a középső gyermeke fiú?**

$2^3 = 8$
egyformán
valószínű
lehetőség



A esemény

$$\mathbb{P}(B) = 3/8$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 1/8$$

Feltételes valószínűség: példa

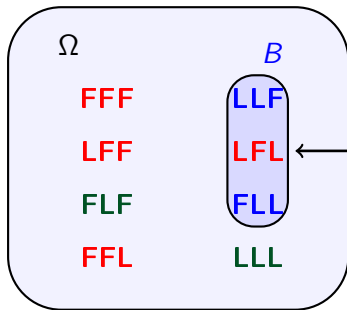
feltétel: plusz információ

Gábornak **három gyereke** van. ↓ B esemény

Azt is elárulja, hogy **pontosan egy fia van**.

Most mennyi a valószínűsége, hogy **a középső gyermeke fiú?**

A -nak B -re vonatkozó feltételes valószínűsége



A esemény

$$\mathbb{P}(B) = 3/8$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 1/8$$

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1/8}{3/8} = \frac{1}{3} < \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A) \text{ ebben az esetben.}$$

Feltételes valószínűség

Legyenek $A, B \in \mathcal{A}$ események úgy, hogy $\mathbb{P}(B) > 0$.

Feltételes valószínűség

Legyenek $A, B \in \mathcal{A}$ események úgy, hogy $\mathbb{P}(B) > 0$.

Ekkor az A eseménynek B -re vonatkozó **feltételes valószínűsége**:

Feltételes valószínűség

Legyenek $A, B \in \mathcal{A}$ események úgy, hogy $\mathbb{P}(B) > 0$.

Ekkor az A eseménynek B -re vonatkozó **feltételes valószínűsége**:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Feltételes valószínűség

Legyenek $A, B \in \mathcal{A}$ események úgy, hogy $\mathbb{P}(B) > 0$.

Ekkor az A eseménynek B -re vonatkozó **feltételes valószínűsége**:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

← metszet valószínűsége

A és B is bekövetkezik

Feltételes valószínűség

Legyenek $A, B \in \mathcal{A}$ események úgy, hogy $\mathbb{P}(B) > 0$.

Ekkor az A eseménynek B -re vonatkozó **feltételes valószínűsége**:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

metszet valószínűsége

A és B is bekövetkezik

feltétel valószínűsége

$\mathbb{P}(B) > 0$, lehet osztani

Értelmezés: feltéve,
hogy B bekövetkezett,
mennyi a valószínűsége,
hogy A is bekövetkezik

Feltételes valószínűség

Legyenek $A, B \in \mathcal{A}$ események úgy, hogy $\mathbb{P}(B) > 0$.

Ekkor az A eseménynek B -re vonatkozó **feltételes valószínűsége**:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

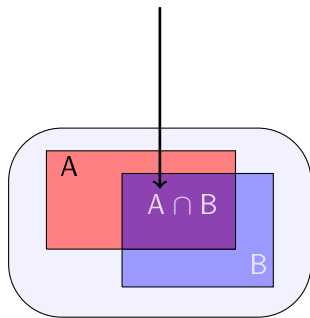
metszet valószínűsége

A és B is bekövetkezik

feltétel valószínűsége

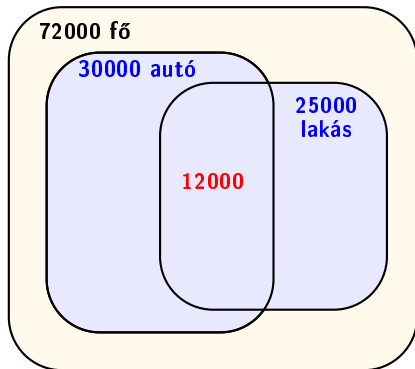
$\mathbb{P}(B) > 0$, lehet osztani

Értelmezés: feltéve, hogy B bekövetkezett, mennyi a valószínűsége, hogy A is bekövetkezik



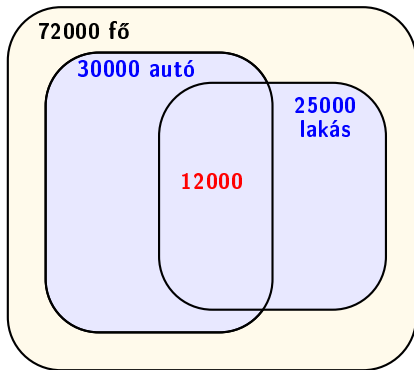
Feltételes valószínűség: példa

Egy 72000 fős városban harmincezer embernek van autója, huszonötezernek lakása, tizenkét ezernek mindkettő. Egy véletlenszerűen választott lakosról tudjuk, hogy van autója. Erre vonatkozóan mennyi a feltételes valószínűsége, hogy az illetőnek van lakása?



Feltételes valószínűség: példa

Egy 72000 fős városban harmincezer embernek van autója, huszonötezernek lakása, tizenkét ezernek mindkettő. Egy véletlenszerűen választott lakosról tudjuk, hogy van autója. Erre vonatkozóan mennyi a feltételes valószínűsége, hogy az illetőnek van lakása?



$$\mathbb{P}(L|A) = \frac{\mathbb{P}(L \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{12000/72000}{30000/72000} = \frac{12000}{30000} = 40\% > \mathbb{P}(L) = \frac{25000}{72000} = 34\%$$

Bayes-tétel: példa

Hanna sátorozni megy Sopronba. Az alábbi táblázat mutatja, hogy adott mennyiségű csapadék esetén mennyi valószínűséggel ázik be a sátra, illetve az előrejelzés szerint mennyi az adott csapadékmennyiség valószínűsége.

csapadék (mm)	0	0 – 5	5 – 10	10-nél több
beázás valószínűsége	0	15%	35%	60%
előrejelzés	40%	10%	30%	20%

Mennyi a valószínűsége, hogy **Hanna sátra beázik?**

Bayes-tétel: példa

Hanna sátorozni megy Sopronba. Az alábbi táblázat mutatja, hogy adott mennyiségű csapadék esetén mennyi valószínűséggel ázik be a sátra, illetve az előrejelzés szerint mennyi az adott csapadékmennyiség valószínűsége.

csapadék (mm)	0	0 – 5	5 – 10	10-nél több
beázás valószínűsége	0	15%	35%	60%
előrejelzés	40%	10%	30%	20%

Mennyi a valószínűsége, hogy **Hanna sátra beázik?**

Hanna a **beázott sátorról** küld képeket.

Erre feltételesen mennyi annak valószínűsége, hogy Sopronban **több mint 10 mm eső** esett ezen a napon?

Teljes valószínűség tétele

csapadék (mm)	0	0 – 5	5 – 10	10-nél több
beázás valószínűsége	0	15%	35%	60%
előrejelzés	40%	10%	30%	20%

B_1 : nincs csapadék

B_2 : 0 – 5 mm csapadék

A: Hanna sátra beázik

B_3 : 5 – 10 mm csapadék

B_4 : > 10 mm csapadék

Teljes valószínűség tétele

csapadék (mm)	0	0 – 5	5 – 10	10-nél több
beázás valószínűsége	0	15%	35%	60%
előrejelzés	40%	10%	30%	20%

B_1 : nincs csapadék

$$\mathbb{P}(B_1) = 0,4$$

B_2 : 0 – 5 mm csapadék

$$\mathbb{P}(B_2) = 0,1$$

A: Hanna sátra beázik

$$\mathbb{P}(B_3) = 0,3$$

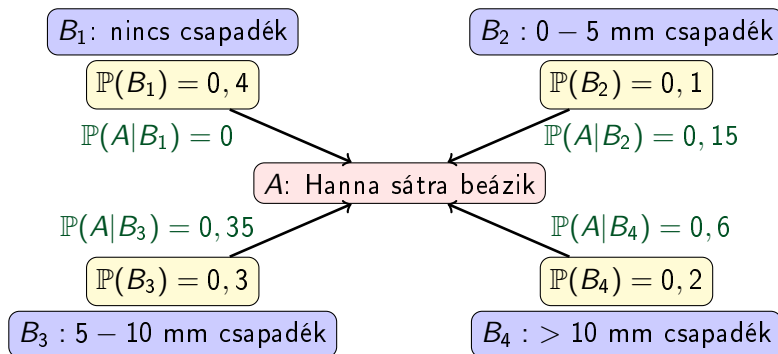
B_3 : 5 – 10 mm csapadék

$$\mathbb{P}(B_4) = 0,2$$

B_4 : > 10 mm csapadék

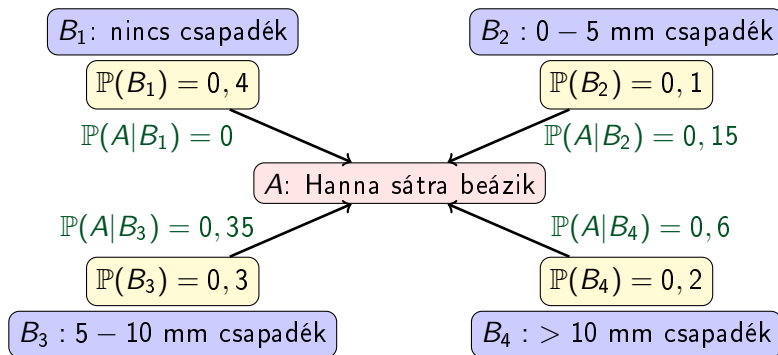
Teljes valószínűség tétele

csapadék (mm)	0	0 – 5	5 – 10	10-nél több
beázás valószínűsége	0	15%	35%	60%
előrejelzés	40%	10%	30%	20%



Teljes valószínűség tétele

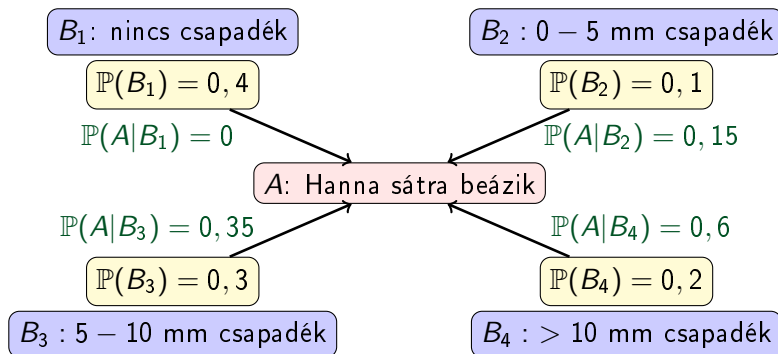
csapadék (mm)	0	0 – 5	5 – 10	10-nél több
beázás valószínűsége	0	15%	35%	60%
előrejelzés	40%	10%	30%	20%



$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \\ &+ \mathbb{P}(A|B_3)\mathbb{P}(B_3) + \mathbb{P}(A|B_4)\mathbb{P}(B_4) =\end{aligned}$$

Teljes valószínűség tétele

csapadék (mm)	0	0 – 5	5 – 10	10-nél több
beázás valószínűsége	0	15%	35%	60%
előrejelzés	40%	10%	30%	20%



$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \\ &\quad + \mathbb{P}(A|B_3)\mathbb{P}(B_3) + \mathbb{P}(A|B_4)\mathbb{P}(B_4) = \\ &= 0 \cdot 0,4 + 0,15 \cdot 0,1 + 0,35 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,2 = 24\%.\end{aligned}$$

Bayes-tétel: példa

Hanna sátorozni megy Sopronba. Az alábbi táblázat mutatja, hogy adott mennyiségű csapadék esetén mennyi valószínűséggel ázik be a sátra, illetve az előrejelzés szerint mennyi az adott csapadékmennyiség valószínűsége.

csapadék (mm)	0	0 – 5	5 – 10	10-nél több
beázás valószínűsége	0	15%	35%	60%
előrejelzés	40%	10%	30%	20%

Mennyi a valószínűsége, hogy **Hanna sátra beázik?**

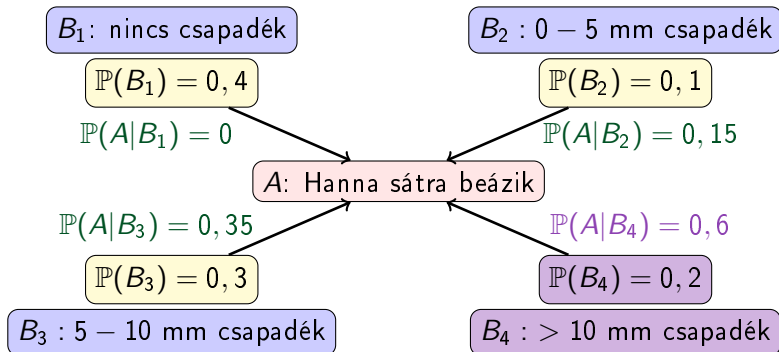
$$0 \cdot 0,4 + 0,15 \cdot 0,1 + 0,35 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,2 = 24\%.$$

Hanna a **beázott sátorról** küld képeket.

Erre feltételesen mennyi annak valószínűsége, hogy Sopronban **több mint 10 mm eső** esett ezen a napon?

Bayes-tétel: példa

csapadék (mm)	0	0 – 5	5 – 10	10-nél több
beázás valószínűsége	0	15%	35%	60%
előrejelzés	40%	10%	30%	20%



Bayes-tétel: példa

Hanna a **beázott sátorról** küld képeket. Mennyi annak valószínűsége, hogy Sopronban **több mint 10 mm eső** esett ezen a napon? Azaz mennyi $\mathbb{P}(B_4|A)$?

csapadék (mm)	0	0 – 5	5 – 10	10-nél több
beázás valószínűsége	0	15%	35%	60%
előrejelzés	40%	10%	30%	20%

Bayes-tétel: példa

Hanna a **beázott sátorról** küld képeket. Mennyi annak valószínűsége, hogy Sopronban **több mint 10 mm eső** esett ezen a napon? Azaz mennyi $\mathbb{P}(B_4|A)$?

csapadék (mm)	0	0 – 5	5 – 10	10-nél több
beázás valószínűsége	0	15%	35%	60%
előrejelzés	40%	10%	30%	20%

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_4|A) &= \frac{\mathbb{P}(A|B_4)\mathbb{P}(B_4)}{\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \dots + \mathbb{P}(A|B_4)\mathbb{P}(B_4)} = \\ &= \frac{0,6 \cdot 0,2}{0 \cdot 0,3 + 0,15 \cdot 0,1 + 0,35 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,2} = \frac{0,12}{0,24} = 50\%.\end{aligned}$$

Bayes-tétel: példa

Hanna a **beázott sátorról** küld képeket. Mennyi annak valószínűsége, hogy Sopronban **több mint 10 mm eső** esett ezen a napon? Azaz mennyi $\mathbb{P}(B_4|A)$?

csapadék (mm)	0	0 – 5	5 – 10	10-nél több
beázás valószínűsége	0	15%	35%	60%
előrejelzés	40%	10%	30%	20%

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_4|A) &= \frac{\mathbb{P}(A|B_4)\mathbb{P}(B_4)}{\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \dots + \mathbb{P}(A|B_4)\mathbb{P}(B_4)} = \\ &= \frac{0,6 \cdot 0,2}{0 \cdot 0,3 + 0,15 \cdot 0,1 + 0,35 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,2} = \frac{0,12}{0,24} = 50\%.\end{aligned}$$

Vagyis feltéve, hogy beázott a sátor, 50% valószínűséggel volt 10 mm-nél több csapadék. Ez több, mint 20%: feltéve, hogy beázott a sátor, valószínűbb a sok csapadék, mint az új információ nélkül.

Teljes eseményrendszer

Definíció (Teljes eseményrendszer)

A $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{A}$ (véges vagy megszámlálható sok) esemény együttesét teljes eseményrendszernek nevezzük, ha

- i) $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$, azaz minden elemi esemény szerepel valamelyik eseményben;
- ii) $B_i \cap B_j = \emptyset$ teljesül minden $1 \leq i < j$ -re, azaz páronként kizáróak, semelyik elemi esemény nem szerepel egyszerre két eseményben is;
- iii) $\mathbb{P}(B_i) > 0$ minden $i = 1, 2, \dots$ -re, azaz mindegyiknek pozitív a valószínűsége.

Teljes eseményrendszer

Definíció (Teljes eseményrendszer)

A $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{A}$ (véges vagy megszámlálható sok) esemény együttesét teljes eseményrendszernek nevezzük, ha

- i) $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$, azaz minden elemi esemény szerepel valamelyik eseményben;
- ii) $B_i \cap B_j = \emptyset$ teljesül minden $1 \leq i < j$ -re, azaz páronként kizáróak, semelyik elemi esemény nem szerepel egyszerre két eseményben is;
- iii) $\mathbb{P}(B_i) > 0$ minden $i = 1, 2, \dots$ -re, azaz mindegyiknek pozitív a valószínűsége.

Tétel (Teljes valószínűség tétele)

Legyen $A \in \mathcal{A}$ tetszőleges esemény, B_1, B_2, \dots pedig teljes eseményrendszer. Ekkor

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3)\mathbb{P}(B_3) + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)$$

Bayes-tétel

Tétel (Teljes valószínűség tétele)

Legyen $A \in \mathcal{A}$ tetszőleges esemény, B_1, B_2, \dots pedig teljes eseményrendszer. Ekkor

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3)\mathbb{P}(B_3) + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)$$

Tétel (Bayes-tétel)

Legyen $A \in \mathcal{A}$ olyan esemény, melyre $\mathbb{P}(A) > 0$, B_1, B_2, \dots pedig teljes eseményrendszer. Ekkor minden $k = 1, 2, \dots$ -re teljesül, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_k|A) &= \frac{\mathbb{P}(A|B_k)\mathbb{P}(B_k)}{\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3)\mathbb{P}(B_3) + \dots} = \\ &= \frac{\mathbb{P}(A|B_k)\mathbb{P}(B_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}. \end{aligned}$$

Bayes-tétel: példa

Példa. Tegyük fel, hogy egy város lakosságának 36%-a rendelkezik diplomával, 42%-a érettségivel (mint legmagasabb végzettség), a többiek egyikkel sem. A diplomások 23%-a, az érettségizettek 21%-a, az érettségivel nem rendelkezők 10%-ának van saját autója.

- Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott lakos saját autóval rendelkezik?
- A város egyik lakosa elárulja, hogy van saját autója. Ez alapján mennyi a feltételes valószínűsége, hogy az illető diplomával rendelkezik?

Bayes-tétel: példa

Példa. Tegyük fel, hogy egy város lakosságának 36%-a rendelkezik diplomával, 42%-a érettségivel (mint legmagasabb végzettség), a többiek egyikkel sem. A diplomások 23%-a, az érettségizettek 21%-a, az érettségivel nem rendelkezők 10%-ának van saját autója.

A : autó; B_1 : diploma; B_2 : érettségi; B_3 : nem érettségizett

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A \cap B_1) + \mathbb{P}(A \cap B_2) + \mathbb{P}(A \cap B_3) = \\ &= \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3)\mathbb{P}(B_3) = \\ &= 0,23 \cdot 0,36 + 0,21 \cdot 0,42 + 0,1 \cdot 0,22 = 19,3\%.\end{aligned}$$

Vagyis egy véletlenszerűen választott lakos 19,3% valószínűséggel rendelkezik saját autóval.

Bayes-tétel: példa

Példa. Tegyük fel, hogy egy város lakosságának 36%-a rendelkezik diplomával, 42%-a érettségivel (mint legmagasabb végzettség), a többiek egyikkel sem. A diplomások 23%-a, az érettségizettek 21%-a, az érettségivel nem rendelkezők 10%-ának van saját autója.

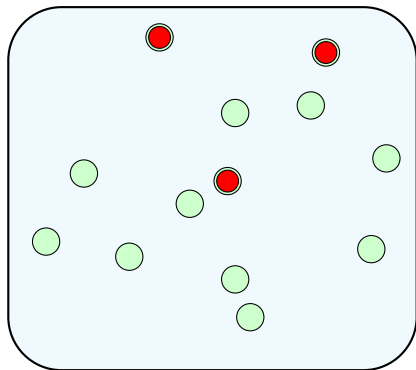
A : autó; B_1 : diploma; B_2 : érettségi; B_3 : nem érettségizett

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_1|A) &= \frac{\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1)}{\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3)\mathbb{P}(B_3)} = \\ &= \frac{0,23 \cdot 0,36}{0,23 \cdot 0,36 + 0,21 \cdot 0,42 + 0,1 \cdot 0,22} = 42,9\%.\end{aligned}$$

Vagyis egy autóval rendelkező lakosnak 42,9% valószínűséggel van diplomája. Ez nagyobb a diplomások arányánál (36%), hiszen a diplomások között nagyobb az autósok aránya, mint a teljes népességben.

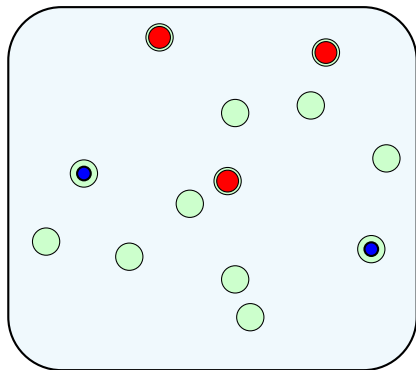
Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Egy vízilabdacsapat **13 tagja** közül **három játékos** doppingol.
A doppingtesztre kiválasztanak **két különböző** játékost,
minden lehetséges párt azonos valószínűséggel választva.



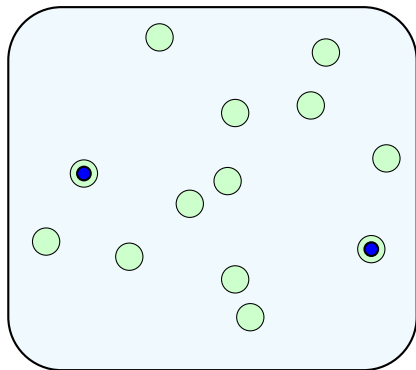
Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Egy vízilabdacsapat **13 tagja** közül **három játékos** doppingol.
A doppingtesztre kiválasztanak **két különböző** játékost,
minden lehetséges párt azonos valószínűséggel választva.
Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott játékosok közül
egy sem doppingol?



Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Hányféleképpen lehet **13 játékos** közül **két különbözőt** választani?



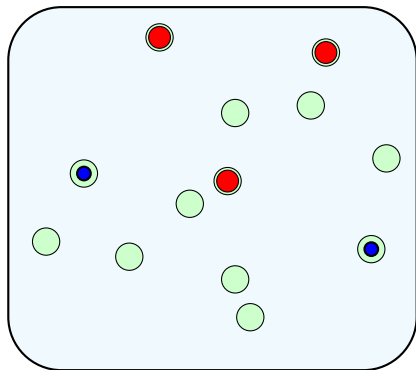
Visszatevés nélküli mintavétel: példa

első második

$$\frac{13 \cdot 12}{2} = \binom{13}{2} = 78$$

↑
a sorrend nem számít

$\binom{13}{2} = 78$
egyformán
valószínű
eset van

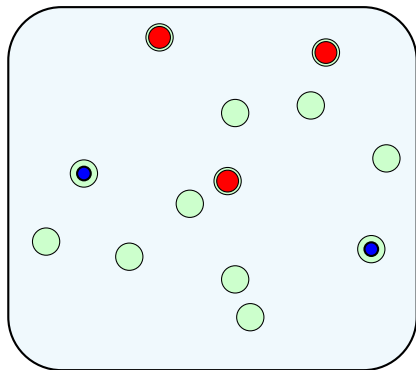


Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Hányféleképpen lehet **13-3=10 nem doppingoló játékos** közül **két különbözőt** választani?

$$\frac{10 \cdot 9}{2} = \binom{10}{2} = 45$$

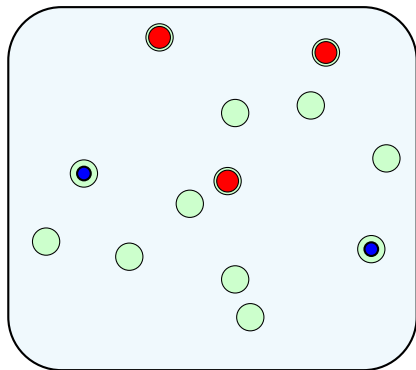
$\binom{13}{2} = 78$
egyformán
valószínű
eset van



Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Annak valószínűsége, hogy a **két játékos egyike sem** doppingol:

$\binom{13}{2} = 78$
egyformán
valószínű
eset van

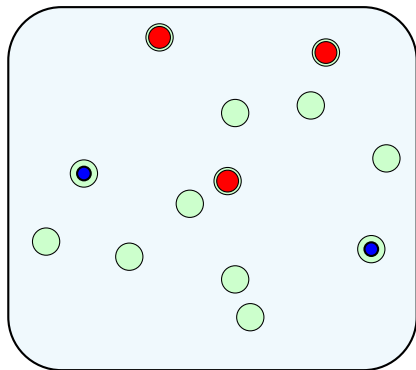


Visszatevés nélküli mintavétel: példa

egyik sem doppingol $\rightarrow \frac{\binom{10}{2}}{\binom{13}{2}} = \frac{45}{78} = 57,7\%$.

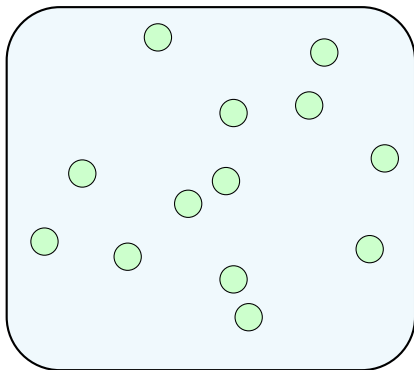
összes eset $\rightarrow \binom{13}{2}$

$\binom{13}{2} = 78$
egyformán
valószínű
eset van



Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Egy vízilabdacsapat **13 tagja** közül **három játékos** doppingol.
A doppingtesztre kiválasztanak **két különböző** játékost,
minden lehetséges párt azonos valószínűséggel választva.

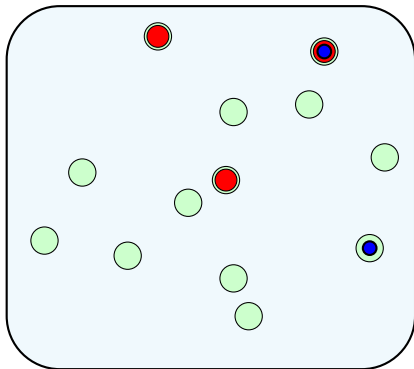


Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Egy vízilabdacsapat **13 tagja** közül **három játékos** doppingol.

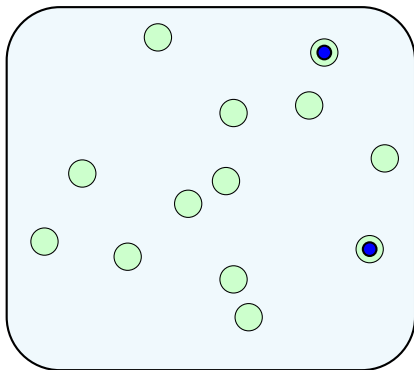
A doppingtesztre kiválasztanak **két különböző** játékost, minden lehetséges párt azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott játékosok közül **pontosan egy** doppingol?



Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Hányféleképpen lehet **13 játékos** közül **két különbözőt** választani?

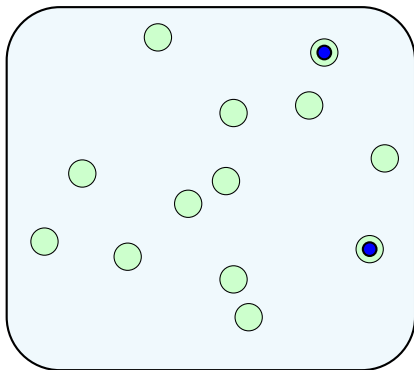


Visszatevés nélküli mintavétel: példa

első második

$$\frac{13 \cdot 12}{2} = \binom{13}{2} = 78$$

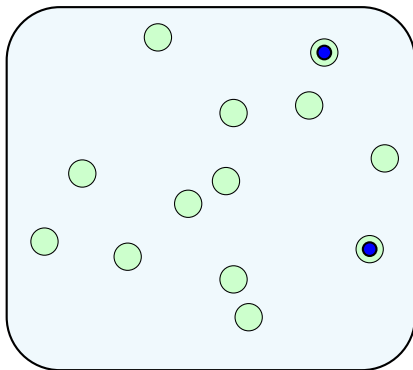
↑
a sorrend nem számít



Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Hányféleképpen lehet **egy doppingoló** és **egy nem doppingoló** játékost választani?

$\binom{13}{2} = 78$
egyformán
valószínű
eset van

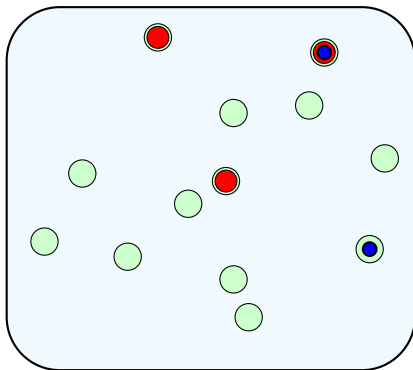


Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Hányféleképpen lehet **egy doppingoló** és **egy nem doppingoló** játékost választani?

$$3 \cdot 10 = 30$$

$\binom{13}{2} = 78$
egyformán
valószínű
eset van



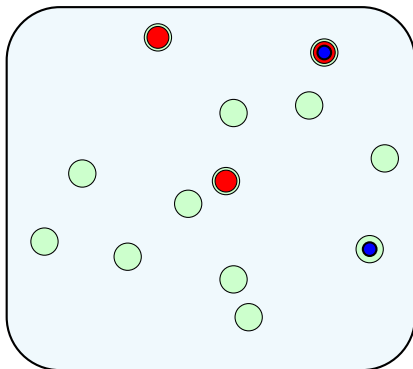
Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Hányféleképpen lehet **egy doppingoló** és **egy nem doppingoló** játékost választani?

$$3 \cdot 10 = 30$$

a doppingoló **háromféle**, a másik **tízféle** lehet
ezek mind különböző esetek

$\binom{13}{2} = 78$
egyformán
valószínű
eset van

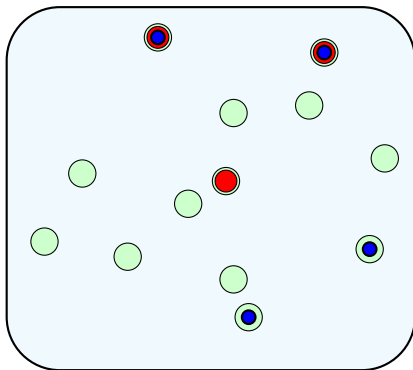


Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Annak valószínűsége, hogy a **két játékos** közül
pontosan egy doppingol:

$$\begin{array}{l} \text{egyik igen, másik nem} \rightarrow \frac{3 \cdot 10}{\binom{13}{2}} = \frac{30}{78} = 38,5\%. \\ \text{összes eset} \rightarrow \end{array}$$

$\binom{13}{2} = 78$
egyformán
valószínű
eset van



Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Annak valószínűsége, hogy a **két játékos** közül **pontosan egy** doppingol:

egyik igen, másik nem $\rightarrow \frac{3 \cdot 10}{\binom{13}{2}} = \frac{30}{78} = 38,5\%$.

összes eset

\rightarrow

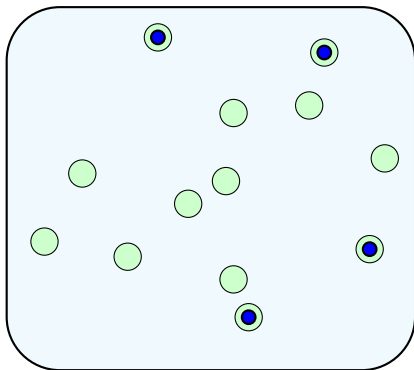
$$\binom{13}{2}$$

$$= \frac{30}{78}$$

$$= 38,5\%$$

mindkettő doppingol: $100 - 57,7 - 38,5 = 3,8\%$

$\binom{13}{2} = 78$
egyformán
valószínű
eset van



Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Egy vízilabdacsapat N tagja közül

Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Egy vízilabdacsapat N tagja közül M játékos doppingol.

Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Egy vízilabdacsapat N tagja közül M játékos doppingol.

A doppingtesztre kiválasztanak n különböző játékost, minden lehetséges csoportot azonos valószínűséggel választva.

Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Egy vízilabdacsapat N tagja közül M játékos doppingol.

A doppingtesztre kiválasztanak n különböző játékost, minden lehetséges csoportot azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott játékosok közül pontosan k doppingol?

Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Hányféleképpen lehet N játékos közül n különbözőt választani?

Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Hányféleképpen lehet N játékos közül n különbözőt választani?

$$\begin{array}{c} \text{első} \quad \text{második} \quad \quad \quad n. \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ N \cdot (N-1) \cdot \dots \cdot (N-n+1) \\ \hline n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1 \\ \uparrow \\ \text{a sorrend nem számít} \end{array} = \frac{N!}{n!(N-n)!} = \binom{N}{n}$$

Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Hányféleképpen lehet N játékos közül n különbözőt választani?

$$\begin{array}{c} \text{első} \quad \text{második} \quad \quad \quad n. \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ N \cdot (N-1) \cdot \dots \cdot (N-n+1) \\ \hline n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1 \end{array} = \frac{N!}{n!(N-n)!} = \binom{N}{n}$$

a sorrend nem számít

Hányféleképpen lehet k doppingoló és $n - k$ nem doppingoló játékost választani, ha összesen M doppingoló és $N - M$ nem doppingoló játékos van?

Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Hányféleképpen lehet N játékos közül n különbözőt választani?

$$\begin{array}{c} \text{első} \quad \text{második} \quad \quad n. \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ N \cdot (N-1) \cdot \dots \cdot (N-n+1) \\ \hline n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1 \\ \uparrow \\ \text{a sorrend nem számít} \end{array} = \frac{N!}{n!(N-n)!} = \binom{N}{n}$$

Hányféleképpen lehet k doppingoló és $n - k$ nem doppingoló játékost választani, ha összesen M doppingoló és $N - M$ nem doppingoló játékos van?

$$\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}$$

doppingolók nem doppingolók

Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Hányféleképpen lehet N játékos közül n különbözőt választani?

$$\begin{array}{c} \text{első} \quad \text{második} \quad \quad n. \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ N \cdot (N-1) \cdot \dots \cdot (N-n+1) \\ \hline n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1 \\ \uparrow \\ \text{a sorrend nem számít} \end{array} = \frac{N!}{n!(N-n)!} = \binom{N}{n}$$

Hányféleképpen lehet k doppingoló és $n - k$ nem doppingoló játékost választani, ha összesen M doppingoló és $N - M$ nem doppingoló játékos van?

$$\begin{array}{c} \binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k} \\ \swarrow \quad \uparrow \quad \nwarrow \\ \text{doppingolók} \quad \quad \text{nem doppingolók} \end{array}$$

bármelyik csoport bármelyikkel párosítható és különböző esetet ad, ezért lehet szorozni

Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Hányféleképpen lehet N játékos közül n különbözőt választani?

$$\begin{array}{c} \text{első} \quad \text{második} \quad \quad n. \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ N \cdot (N-1) \cdot \dots \cdot (N-n+1) \\ \quad \quad \quad \uparrow \\ n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1 \end{array} = \frac{N!}{n!(N-n)!} = \binom{N}{n}$$

a sorrend nem számít

Hányféleképpen lehet k doppingoló és $n - k$ nem doppingoló játékosot választani, ha összesen M doppingoló és $N - M$ nem doppingoló játékos van?

$$\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}$$

doppingolók nem doppingolók

bármelyik csoport bármelyikkel párosítható és különböző esetet ad, ezért lehet szorozni

$$\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ játékos doppingol az } n \text{ közül}) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Visszatevés nélküli mintavétel

- Egy dobozban N golyó van, közülük M **fekete**, a többi **fehér**.

Visszatevés nélküli mintavétel

- Egy dobozban N golyó van, közülük M **fekete**, a többi **fehér**.
- **Visszatevés nélkül** kihúznak n darabot (minden húzásnál minden, még a dobozban lévő golyót azonos valószínűséggel választva).

Visszatevés nélküli mintavétel

- Egy dobozban N golyó van, közülük M **fekete**, a többi **fehér**.
- **Visszatevés nélkül** kihúznak n darabot (minden húzásnál minden, még a dobozban lévő golyót azonos valószínűséggel választva).
- Tegyük fel, hogy $n \leq M$ és $n \leq N - M$. Annak valószínűsége, hogy pontosan k darab fekete golyót húznak ki:

Visszatevés nélküli mintavétel

- Egy dobozban N golyó van, közülük M **fekete**, a többi **fehér**.
- **Visszatevés nélkül** kihúznak n darabot (minden húzásnál minden, még a dobozban lévő golyót azonos valószínűséggel választva).
- Tegyük fel, hogy $n \leq M$ és $n \leq N - M$. Annak valószínűsége, hogy pontosan k darab fekete golyót húznak ki:

$$\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ fekete}) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Megjegyzés: a kihúzott fekete golyók száma **hipergeometrikus eloszlású**.

Mivel az $\binom{N}{n}$ lehetséges eset mindegyike egyformán valószínű, a **klasszikus valószínűségi mező** modelljét használtuk.

Példa: visszatevés nélküli mintavétel

Egy osztályba **8 lány** és **25 fiú** jár.

Példa: visszatevés nélküli mintavétel

Egy osztályba **8 lány** és **25 fiú** jár.

Egy felméréshez véletlenszerűen kiválasztanak egy **hatfős csapatot**

Példa: visszatevés nélküli mintavétel

Egy osztályba **8 lány** és **25 fiú** jár.

Egy felméréshez véletlenszerűen kiválasztanak egy **hatfős csapatot** úgy, hogy minden hatfős csoportot azonos valószínűséggel választanak.

Példa: visszatevés nélküli mintavétel

Egy osztályba **8 lány** és **25 fiú** jár.

Egy felméréshez véletlenszerűen kiválasztanak egy **hatfős csapatot** úgy, hogy minden hatfős csoportot azonos valószínűséggel választanak.

Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott csapatban **pontosan két lány** van?

Példa: visszatevés nélküli mintavétel

$N = 33$ a diákok száma

Egy osztályba **8 lány** és **25 fiú** jár.

Egy felméréshez véletlenszerűen kiválasztanak egy **hatfős csapatot** úgy, hogy minden hatfős csoportot azonos valószínűséggel választanak.

Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott csapatban **pontosan két lány** van?

Példa: visszatevés nélküli mintavétel

$M = 8$ a lányok száma

$N = 33$ a diákok száma

Egy osztályba **8 lány** és **25 fiú** jár. 

Egy felméréshez véletlenszerűen kiválasztanak egy **hatfős csapatot** úgy, hogy minden hatfős csoportot azonos valószínűséggel választanak.

Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott csapatban **pontosan két lány** van?

Példa: visszatevés nélküli mintavétel

$M = 8$ a lányok száma

$N = 33$ a diákok száma

$n = 6$ a minta nagysága

Egy osztályba **8 lány** és **25 fiú** jár.

Egy felméréshez véletlenszerűen kiválasztanak egy **hatfős csapatot** úgy, hogy minden hatfős csoportot azonos valószínűséggel választanak.

Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott csapatban **pontosan két lány** van?

Példa: visszatevés nélküli mintavétel

$M = 8$ a lányok száma

$N = 33$ a diákok száma

Egy osztályba **8 lány** és **25 fiú** jár.

$n = 6$ a minta nagysága

Egy felméréshez véletlenszerűen kiválasztanak egy **hatfős csapatot** úgy, hogy minden hatfős csoportot azonos valószínűséggel választanak.

Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott csapatban

$k = 2$ a kérdés ← **pontosan két lány** van?

Példa: visszatevés nélküli mintavétel

$M = 8$ a lányok száma

$N = 33$ a diákok száma

Egy osztályba **8 lány** és **25 fiú** jár.

$n = 6$ a minta nagysága

Egy felméréshez véletlenszerűen kiválasztanak egy **hatfős csapatot** úgy, hogy minden hatfős csoportot azonos valószínűséggel választanak.

Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott csapatban

$k = 2$ a kérdés ← **pontosan két lány** van?

$$\mathbb{P}(\text{pontosan két lány}) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{25}{4}}{\binom{33}{6}} = 31,9\%.$$

Példa: visszatevés nélküli mintavétel

$M = 8$ a lányok száma

$N = 33$ a diákok száma

Egy osztályba **8 lány** és **25 fiú** jár.

$n = 6$ a minta nagysága

Egy felméréshez véletlenszerűen kiválasztanak egy **hatfős csapatot** úgy, hogy minden hatfős csoportot azonos valószínűséggel választanak.

Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott csapatban

$k = 2$ a kérdés ← **pontosan két lány** van?

lányok kiválasztása

fiúk kiválasztása

$$\mathbb{P}(\text{pontosan két lány}) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{25}{4}}{\binom{33}{6}} = 31,9\%.$$

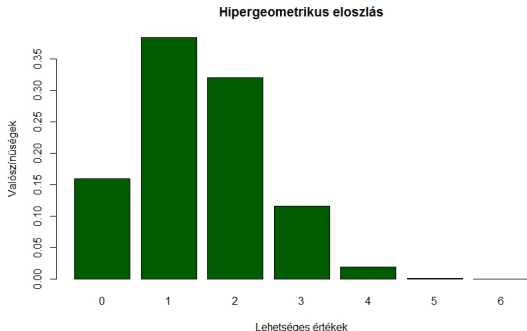
szorzás: bármely két lány bármely négy fiúval választható

↑
összes eset

Példa: visszatevés nélküli mintavétel

8 lány, 25 fiú, hatfős csapatot választanak.

$$\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ lány}) = \frac{\binom{8}{k} \cdot \binom{25}{6-k}}{\binom{33}{6}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 6.$$



A lány csapattagok számának eloszlása: lehetséges értékek és valószínűségek

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van.

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van. Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik, minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét azonos valószínűséggel választva.

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van. Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik, minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt pontosan négyszer iszik kék bögréből?**

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van. Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik, minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt pontosan négyszer iszik kék bögréből?**

az **összes lehetőség** száma:

5

az első napon ötféle lehetőség van

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van.
Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik,
minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét
azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt**
pontosan négyszer iszik kék bögréből?

az **összes lehetőség** száma:



az első két napon $5 \cdot 5 = 25$ -féle lehetőség van
bármelyik bögre bármelyikkel választható, lehet szorozni

a bögrék különbözők

ezek az esetek egyformán valószínűk

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van. Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik, minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt pontosan négyszer iszik kék bögréből?**

az **összes lehetőség** száma:



az első három napon $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ -féle lehetőség van bármelyik bögre bármelyikkel választható, lehet szorozni

a bögrék különbözők

ezek az esetek egyformán valószínűk

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van.
Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik,
minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét
azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt**
pontosan négyszer iszik kék bögréből?

az összes lehetőség száma:



összesen 5^7 egyformán valószínű lehetőség van egy hét alatt
bármelyik bögre bármelyikkel választható, lehet szorozni

a bögrék különbözők

ezek az esetek egyformán valószínűek

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van. Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik, minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt pontosan négyszer iszik kék bögréből?**

5^7 egyformán valószínű lehetőség

jó lehetőség például, amikor első négy nap iszik kék bögréből:

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van. Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik, minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt pontosan négyszer iszik kék bögréből?**

5^7 egyformán valószínű lehetőség

jó lehetőség például, amikor első négy nap iszik kék bögréből:



Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van. Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik, minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt pontosan négyszer iszik kék bögréből?**

5^7 egyformán valószínű lehetőség

jó lehetőség például, amikor első négy nap iszik kék bögréből:



$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 3^4 \cdot 2^3$ ilyen lehetőség van bármelyik bögre bármelyikkel választható, lehet szorozni **a bögrék különbözők**

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van. Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik, minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt pontosan négyszer iszik kék bögréből?**

5^7 egyformán valószínű lehetőség

egy másik jó sorrend, ha az 1., 3., 4., 6. napon iszik kék bögréből:

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van. Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik, minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt pontosan négyszer iszik kék bögréből?**

5^7 egyformán valószínű lehetőség

egy másik jó sorrend, ha az 1., 3., 4., 6. napon iszik kék bögréből:



Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van. Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik, minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt pontosan négyszer iszik kék bögréből?**

5^7 egyformán valószínű lehetőség

egy másik jó sorrend, ha az 1., 3., 4., 6. napon iszik kék bögréből:



$3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 3^4 \cdot 2^3$ ilyen lehetőség van
bármelyik bögre bármelyikkel választható, lehet szorozni
a bögrék különbözők

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van. Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik, minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt pontosan négyszer iszik kék bögréből?**

5^7 egyformán valószínű lehetőség

jó lehetőségek száma:

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van. Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik, minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt pontosan négyszer iszik kék bögréből?**

5^7 egyformán valószínű lehetőség

jó lehetőségek száma:

színezések száma

lehetőségek száma adott színezésnél

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van. Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik, minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt pontosan négyszer iszik kék bögréből?**

5^7 egyformán valószínű lehetőség

jó lehetőségek száma:

$$\text{színezések száma} \times \text{lehetőségek száma adott színezésnél}$$
$$\binom{7}{4} \times 3^4 \cdot 2^3 = 35 \cdot 3^4 \cdot 2^3$$

ennyiféleképpen választhatjuk ki a négy kék napot a hétből minden színezéshez ugyanannyi lehetőség tartozik

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van. Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik, minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt pontosan négyszer iszik kék bögréből?**

5^7 egyformán valószínű le-
hetőség

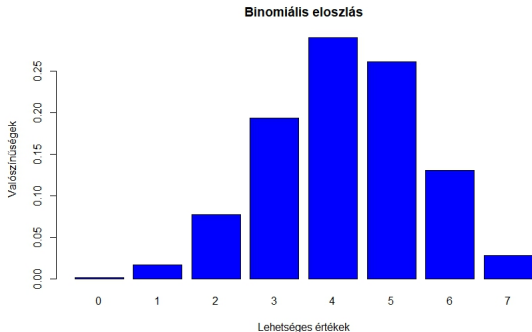
$$\mathbb{P}(\text{pontosan négyszer iszik kék bögréből}) = \frac{\binom{7}{4} \cdot 3^4 \cdot 2^3}{5^7},$$

$$\text{azaz } \frac{35 \cdot 81 \cdot 8}{78125} = 29,03\%.$$

Példa: visszatevéses mintavétel

3 kék, 2 zöld bögre, Péter hét napon át találomra választ.

$$\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ kék}) = \frac{\binom{7}{k} \cdot 3^k \cdot 2^{7-k}}{5^7}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 7.$$



A kék bögrés napok száma: lehetséges értékek és valószínűségek

Visszatevéses mintavétel

- Egy dobozban N golyó van, közülük M fekete, a többi fehér.
- **Visszatevéssel** kihúznak n darabot, minden húzásnál a korábbiakat elfelejtve mind az N golyót azonos valószínűséggel választva.
- Annak valószínűsége, hogy az n húzás közül pontosan k -nál jön fekete:

Visszatevéses mintavétel

- Egy dobozban N golyó van, közülük M fekete, a többi fehér.
- **Visszatevéssel** kihúznak n darabot, minden húzásnál a korábbiakat elfelejtve mind az N golyót azonos valószínűséggel választva.
- Annak valószínűsége, hogy az n húzás közül pontosan k -nál jön fekete:

$$\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ fekete}) = \binom{n}{k} \frac{M^k \cdot (N-M)^{n-k}}{N^n} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Visszatevéses mintavétel

- Egy dobozban N golyó van, közülük M fekete, a többi fehér.
- **Visszatevéssel** kihúznak n darabot, minden húzásnál a korábbiakat elfelejtve mind az N golyót azonos valószínűséggel választva.
- Annak valószínűsége, hogy az n húzás közül pontosan k -nál jön fekete:

melyik feketét húztunk (k húzás)

melyik k húzás fekete ↓ melyik fehérét húztuk ($n - k$ húzás)

$$\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ fekete}) = \binom{n}{k} \frac{M^k \cdot (N-M)^{n-k}}{N^n} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

↑
összes lehetőség

Visszatevéses mintavétel

- Egy dobozban N golyó van, közülük M fekete, a többi fehér.
- **Visszatevéssel** kihúznak n darabot, minden húzásnál a korábbiakat elfelejtve mind az N golyót azonos valószínűséggel választva.
- Annak valószínűsége, hogy az n húzás közül pontosan k -nál jön fekete:

melyik feketét húztunk (k húzás)

melyik k húzás fekete ↓ melyik fehérét húztuk ($n - k$ húzás)

$$\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ fekete}) = \binom{n}{k} \frac{M^k \cdot (N-M)^{n-k}}{N^n} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

↑
összes lehetőség

Megjegyzés: a kihúzott fekete golyók száma **binomiális eloszlású**.
Mivel az N^n eset egyformán valószínű volt, ez is **klasszikus valószínűségi m**

Visszatevéses mintavétel: példa

Egy osztályba **14 lány** és **22 fiú** jár.

Visszatevéses mintavétel: példa

Egy osztályba **14 lány** és **22 fiú** jár.

A tanár minden fizikaórán kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal a korábbiakat elfelejtve, és mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet).

Visszatevéses mintavétel: példa

Egy osztályba **14 lány** és **22 fiú** jár.

A tanár minden fizikaórán kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal a korábbiakat elfelejtve, és mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet).

Visszatevéses mintavétel: példa

Egy osztályba **14 lány** és **22 fiú** jár.

A tanár minden fizikaórán kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal a korábbiakat elfelejtve, és mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet).

Mennyi a valószínűsége, hogy **hat egymást követő órán pontosan két lány** felel?

Visszatevéses mintavétel: példa

Egy osztályba **14 lány** és **22 fiú** jár.

$N = 36$ a diákok száma

A tanár minden fizikaórán kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal a korábbiakat elfelejtve, és mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet).

Mennyi a valószínűsége, hogy **hat egymást követő órán pontosan két lány** felel?

Visszatevéses mintavétel: példa

$M = 14$ a lányok száma

Egy osztályba **14 lány** és **22 fiú** jár.  $N = 36$ a diákok száma

A tanár minden fizikaórán kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal a korábbiakat elfelejtve, és mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet).

Mennyi a valószínűsége, hogy **hat egymást követő órán pontosan két lány** felel?

Visszatevéses mintavétel: példa

$M = 14$ a lányok száma

Egy osztályba **14 lány** és **22 fiú** jár.  $N = 36$ a diákok száma

A tanár minden fizikaórán kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal a korábbiakat elfelejtve, és mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet).

$n = 6$ a minta nagysága

Mennyi a valószínűsége, hogy **hat egymást követő órán pontosan két lány** felel?

Visszatevéses mintavétel: példa

$M = 14$ a lányok száma

Egy osztályba **14 lány** és **22 fiú** jár. $N = 36$ a diákok száma

A tanár minden fizikaórán kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal a korábbiakat elfelejtve, és mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet).

$n = 6$ a minta nagysága

Mennyi a valószínűsége, hogy **hat egymást követő órán**

$k = 2$ a kérdés **pontosan két lány** felel?

Visszatevéses mintavétel: példa

$M = 14$ a lányok száma

Egy osztályba **14 lány** és **22 fiú** jár.

$N = 36$ a diákok száma

A tanár minden fizikaórán kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal a korábbiakat elfelejtve, és mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet).

$n = 6$ a minta nagysága

Mennyi a valószínűsége, hogy **hat egymást követő órán**

$k = 2$ a kérdés **← pontosan két lány** felel?

$$\mathbb{P}(\text{pontosan két lány}) = \binom{n}{k} \frac{M^k \cdot (N-M)^{n-k}}{N^n} = \binom{6}{2} \frac{14^2 \cdot 22^4}{36^6} = 31,6\%.$$

Visszatevéses mintavétel: példa

$M = 14$ a lányok száma

Egy osztályba **14 lány** és **22 fiú** jár. $N = 36$ a diákok száma

A tanár minden fizikaórán kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal a korábbiakat elfelejtve, és mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet).

$n = 6$ a minta nagysága

Mennyi a valószínűsége, hogy **hat egymást követő órán**

$k = 2$ a kérdés **pontosan két lány** felel?

lányok kiválasztása fiúk kiválasztása

$$\mathbb{P}(\text{pontosan két lány}) = \binom{n}{k} \frac{M^k \cdot (N-M)^{n-k}}{N^n} = \binom{6}{2} \frac{14^2 \cdot 22^4}{36^6} = 31,6\%.$$

szorzás: bármely felelő bármely másikkal választható

↑ összes eset
↑ melyik két órán felel lány

Házi feladat szeptember 26., hétfő, 8:30-ig

A 6.a osztályba nyolc balkezes és tizenhárom jobbkezes, a 6.b osztályba hat balkezes és tizennyolc jobbkezes gyerek jár. Tornaórán együtt tornáznak, és a tanár kiválaszt véletlenszerűen két diákot (az összes 44 gyerek közül minden párt azonos valószínűséggel választva). Feltéve, hogy mindkét kiválasztott diák balkezes, mennyi a valószínűsége, hogy mindketten a 6.a osztályba járnak?