Valószínűségszámítás

Survey statisztika és adattudomány mesterszak

Backhausz Ágnes
agnes.backhausz@ttk.elte.hu
fogadóóra: kedd 11-12, szerda 13-14, D 3-415

2022/2023. őszi félév

A valószínűségszámítás kurzus céljai

- **a matematikai statisztika megalapozása**: a véletlen mintavételből származó adatok elemzésére alkalmazott módszerekhez szükséges alapfogalmak megismerése
- a valószínűségszámítás alapjai, szemlélete: **események, véletlen mennyiségek (valószínűségi változók), várható érték, szórás, korreláció és a kapcsolódó fogalmak**
- feladatmegoldási készség fejlesztése (gyakorlaton)

A valószínűségszámítás kurzus céljai

- **a matematikai statisztika megalapozása**: a véletlen mintavételből származó adatok elemzésére alkalmazott módszerekhez szükséges alapfogalmak megismerése
- a valószínűségszámítás alapjai, szemlélete: **események, véletlen mennyiségek (valószínűségi változók), várható érték, szórás, korreláció és a kapcsolódó fogalmak**
- feladatmegoldási készség fejlesztése (gyakorlaton)

Számonkérés: írásbeli vizsga (ponthatárok: 40, 55, 70, 85); a vizsgán legalább 40 pontot el kell érni; ha ez megvan, a jegyen a félév során beadható házi feladatokkal lehet javítani, **legfeljebb egy jegyet.**

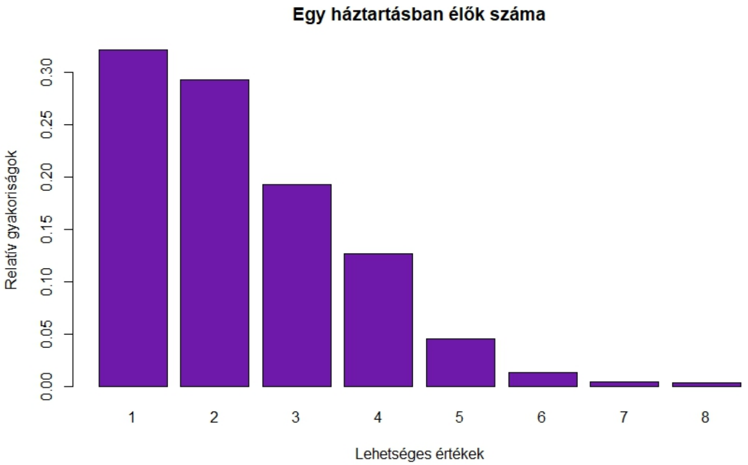
A házi feladatot páronként együtt dolgozva lehet beadni, de a párok munkája önálló munka. Minden házi feladat 3 pontot ér.

tematika, mintafeladatsor, elméleti összefoglaló, házi feladat, gyakorló feladatok: **moodle.elte.hu**

Ajánlott irodalom

- Denkinger: Valószínűségszámítás
- Prékopa: Valószínűségelmélet
- Ross: A first course in probability
- Solt: Valószínűségszámítás
- Arató Miklós, Prokaj Vilmos és Zempléni András: Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba: példákkal, szimulációkkal
  http://elte.prompt.hu/sites/default/files/tananyagok/valszam/zempleni.pdf
- Bognárné, Mogyoródi, Prékopa, Rényi, Szász: Valószínűségszámítási feladatgyűjtemény
- Fazekas: Valószínűségszámítás és statisztika jegyzet
  https://gyires.inf.unideb.hu/KMITT/b21/valseg.pdf

Megfigyelések



Egy háztartásban élők számának hisztogramja (forrás: KSH, 2011)
($n = 4105698$ a háztartások száma)

A valószínűségszámításról és statisztikáról

Célok:

- felmérésekből, kísérletekből származó adatok elemzése
- ismeretlen mennyiségek becslése a mérések alapján
- hipotézisek ellenőrzése vagy cáfolata
- véletlen folyamatok modellezése
- múltbeli adatok alapján a jövőbeli folyamatok előrejelzése

A valószínűségszámításról és statisztikáról

Célok:

- felmérésekből, kísérletekből származó adatok elemzése
- ismeretlen mennyiségek becslése a mérések alapján
- hipotézisek ellenőrzése vagy cáfolata
- véletlen folyamatok modellezése
- múltbeli adatok alapján a jövőbeli folyamatok előrejelzése

Alkalmazási területek:

- statisztika a társadalomtudományokban: felmérések értékelése, elemzése
- statisztika a természettudományokban: mérések, kísérleti eredmények értelmezése
- előrejelzés: társadalmi, gazdasági, pénzügyi folyamatok
- biztosításmatematika

A valószínűségszámításról

- a matematika egy területe
- axiomatikus felépítés (Kolmogorov, 1933)
- alkalmazható gyakorlati feladatokban (például: ha egy érmével 1000 dobásból 550 fej lett, és azt állítjuk, hogy az érme nem szabályos, $99,9\%$ valószínűséggel helyes az állításunk
- az alkalmazásnál **a modell kiválasztása, felépítése** kulcsfontosságú, ettől függ a végeredmény
- **mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott magyar háztartásban négyen élnek?** – ez attól függ, hogy **melyik háztartást mennyi valószínűséggel** választjuk („találjuk meg”)

A valószínűségszámításról

- a matematika egy területe
- axiomatikus felépítés (Kolmogorov, 1933)
- alkalmazható gyakorlati feladatokban (például: ha egy érmével 1000 dobásból 550 fej lett, és azt állítjuk, hogy az érme nem szabályos, 99,9% valószínűséggel helyes az állításunk
- az alkalmazásnál **a modell kiválasztása, felépítése** kulcsfontosságú, ettől függ a végeredmény
- **mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott magyar háztartásban négyen élnek?** – ez attól függ, hogy **melyik háztartást mennyi valószínűséggel** választjuk („találjuk meg")
- **mennyi a valószínűsége, hogy holnap Budapesten lesz csapadék?**

A valószínűségszámításról

- a matematika egy területe
- axiomatikus felépítés (Kolmogorov, 1933)
- alkalmazható gyakorlati feladatokban (például: ha egy érmével 1000 dobásból 550 fej lett, és azt állítjuk, hogy az érme nem szabályos, $99,9\%$ valószínűséggel helyes az állításunk
- az alkalmazásnál **a modell kiválasztása, felépítése** kulcsfontosságú, ettől függ a végeredmény
- **mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott magyar háztartásban négyen élnek?** – ez attól függ, hogy **melyik háztartást mennyi valószínűséggel** választjuk („találjuk meg")
- **mennyi a valószínűsége, hogy holnap Budapesten lesz csapadék?**

  egy megfelelő matematikai modellben van értelme a kérdésnek, de a válasz **különböző modellekben különböző**

A valószínűségszámításról

- a matematika egy területe
- axiomatikus felépítés (Kolmogorov, 1933)
- alkalmazható gyakorlati feladatokban (például: ha egy érmével 1000 dobásból 550 fej lett, és azt állítjuk, hogy az érme nem szabályos, $99,9\%$ valószínűséggel helyes az állításunk
- az alkalmazásnál **a modell kiválasztása, felépítése** kulcsfontosságú, ettől függ a végeredmény
- **mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott magyar háztartásban négyen élnek?** – ez attól függ, hogy **melyik háztartást mennyi valószínűséggel** választjuk („találjuk meg")
- **mennyi a valószínűsége, hogy holnap Budapesten lesz csapadék?**

  egy megfelelő matematikai modellben van értelme a kérdésnek, de a válasz **különböző modellekben különböző**
- cél: **minél jobb modell illesztése** a statisztika segítségével (jól illeszkedik a megfigyelt adatokra, egyszerű, interpretálható, de más szempontok is lehetségesek)

A valószínűségszámítás történetéről

- **osztozkodási probléma**, 1494: egy félbehagyott játékban az aktuális állás alapján hogyan osszák el a tétet (megoldás: Pascal, 1656)
- Cardano könyve a kockajátékokról, 1564 (amit 1663-ban adtak ki)
- életjáradék-számítás, de Witt, Haley, 1671
- nagy számok törvénye, Jacob Bernoulli, 1713
- XIX. század első fele: de Moivre, Bayes, Gauss, Poisson, Buffon
- XIX. század vége: Csebisev, Markov, Ljapunov
- **axiomatikus felépítés**: Kolmogorov, 1933

A valószínűségszámítás történetéről

XX. századi alkalmazások és kezdetük

- sztochasztikus folyamatok (Wiener, 1923)
- matematikai statisztika (Fisher, 1925)
- játékelmélet (Neumann, 1928)
- információelmélet (Shannon, 1948)
- idősorok
- pénzügyi folyamatok (Black–Scholes, 1973)
- hierarchikus tanulási algoritmusok $\rightarrow$ mesterséges intelligencia

Események és valószínűségük

Cél: véletlen jelenségek matematikai modellezése

Mennyi lehet egy **esemény** **valószínűsége**?

Események és valószínűségük

Cél: véletlen jelenségek matematikai modellezése

Mennyi lehet egy **esemény valószínűsége**?

holnap Budapesten esik az eső $\longrightarrow$

egy véletlenül választott ember balkezes $\longrightarrow$

egy véletlenül választott felnőtt diplomás $\longrightarrow$

júliusban csökken az infláció $\longrightarrow$

A **esemény** $\longrightarrow$

Események és valószínűségük

Cél: véletlen jelenségek matematikai modellezése

Mennyi lehet egy **esemény** **valószínűsége**?

holnap Budapesten esik az eső $\longrightarrow$

egy véletlenül választott ember balkezes $\longrightarrow$

egy véletlenül választott felnőtt diplomás $\longrightarrow$

júliusban csökken az infláció $\longrightarrow$

A **esemény** $\longrightarrow$

az események valószínűsége attól függ, hogy

milyen modellt választunk

Események és valószínűségük

Cél: véletlen jelenségek matematikai modellezése

Mennyi lehet egy **esemény** **valószínűsége**?

holnap Budapesten esik az eső $\longrightarrow$

egy véletlenül választott ember balkezes $\longrightarrow$

egy véletlenül választott felnőtt diplomás $\longrightarrow$

júliusban csökken az infláció $\longrightarrow$

A **esemény** $\longrightarrow$

az események valószínűsége attól függ, hogy

milyen modellt választunk

attól, hogy hogyan vesszük figyelembe a méréseket, megfigyeléseket

Események és valószínűségük

Cél: véletlen jelenségek matematikai modellezése

Mennyi lehet egy **esemény valószínűsége**?

holnap Budapesten esik az eső	$\longrightarrow$	15%
egy véletlenül választott ember balkezes	$\longrightarrow$	10%
egy véletlenül választott felnőtt diplomás	$\longrightarrow$	22%
júliusban csökken az infláció	$\longrightarrow$	44%
A **esemény**	$\longrightarrow$	$\boxed{P(A)}$

az események valószínűsége attól függ, hogy

milyen modellt választunk

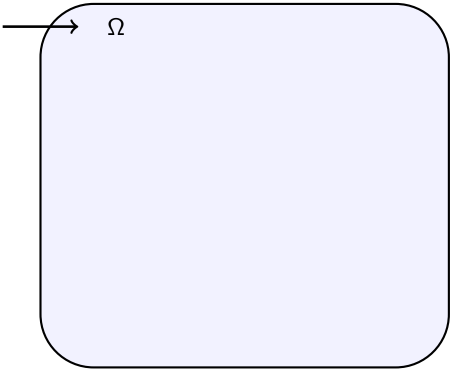
attól, hogy hogyan vesszük figyelembe a méréseket, megfigyeléseket

ha más modellt választunk, az értékek is másképp alakulnak

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

eseménytér

összes lehetőség: Ω



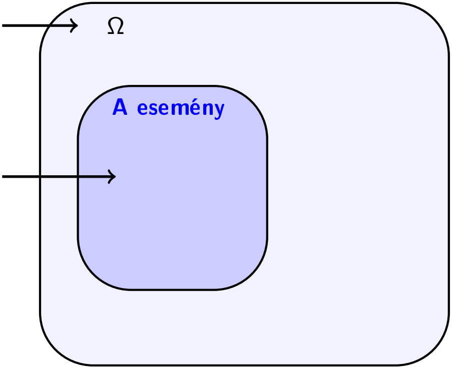
A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

eseménytér

összes lehetőség: Ω

esemény

$A \subseteq \Omega$ részhalmaz



A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

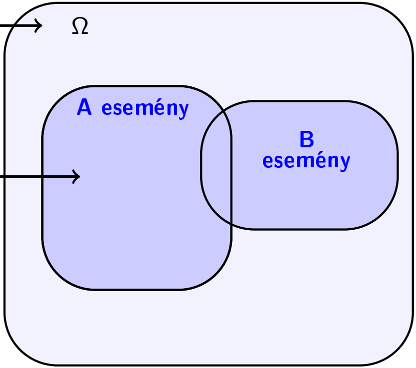
eseménytér

összes lehetőség: Ω

$\boxed{\mathbb{P}(\Omega) = 1}$

esemény

$A \subseteq \Omega$ részhalmaz



A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Ω: (magyar) **felnőtt emberek**

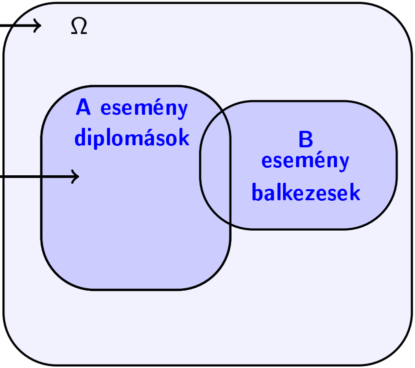
eseménytér

összes lehetőség: Ω

$\boxed{\mathbb{P}(\Omega) = 1}$

esemény

$A \subseteq \Omega$ részhalmaz



A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Ω: (magyar) **felnőtt emberek**

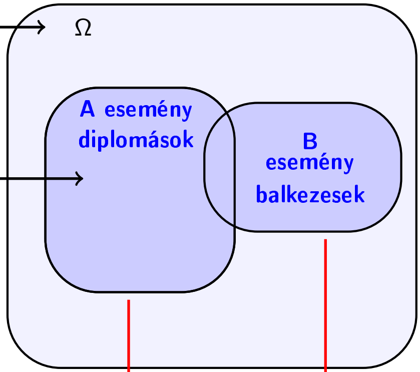
eseménytér

összes lehetőség: Ω

$\boxed{\mathbb{P}(\Omega) = 1}$

esemény

$A \subseteq \Omega$ részhalmaz



$\boxed{\mathbb{P}(A) = 22\%}$ $\boxed{\mathbb{P}(B) = 10\%}$

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Ω: (magyar) **felnőtt emberek**

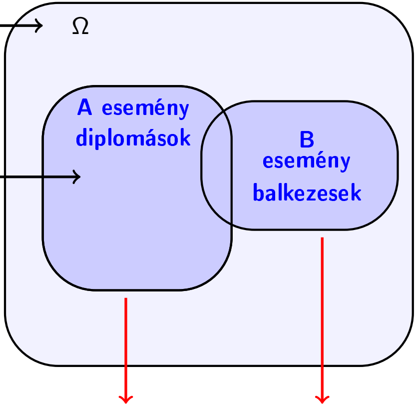
eseménytér

összes lehetőség: Ω

$\boxed{\mathbb{P}(\Omega) = 1}$

esemény

$A \subseteq \Omega$ részhalmaz



$\boxed{\mathbb{P}(A) = 22\%}$ $\boxed{\mathbb{P}(B) = 10\%}$

valószínűség: eseményekhez $[0, 1]$-beli számokat rendelő függvény

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Ω: (magyar) **felnőtt emberek**

eseménytér

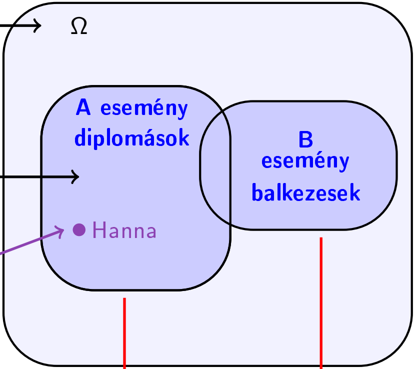
összes lehetőség: Ω

$\boxed{\mathbb{P}(\Omega) = 1}$

esemény

$A \subseteq \Omega$ részhalmaz

elemi esemény



$\boxed{\mathbb{P}(A) = 22\%}$ $\boxed{\mathbb{P}(B) = 10\%}$

valószínűség: eseményekhez $[0, 1]$-beli számokat rendelő függvény

Eseménytér

- **eseménytér**: az összes lehetőség halmaza, Ω (például a magyar felnőttek)

Eseménytér

- **eseménytér**: az összes lehetőség halmaza, Ω (például a magyar felnőttek)
- **elemi esemény:** a kísérlet egy lehetséges kimenetele, Ω egy eleme (például Hanna vagy Gábor)

Eseménytér

- **eseménytér**: az összes lehetőség halmaza, Ω (például a magyar felnőttek)
- **elemi esemény:** a kísérlet egy lehetséges kimenetele, Ω egy eleme (például Hanna vagy Gábor)
- **esemény**: az eseménytér egy részhalmaza, $A \subseteq \Omega$
  például: diplomások (A) vagy a balkezesek (B)

Eseménytér

- **eseménytér**: az összes lehetőség halmaza, Ω (például a magyar felnőttek)
- **elemi esemény:** a kísérlet egy lehetséges kimenetele, Ω egy eleme (például Hanna vagy Gábor)
- **esemény**: az eseménytér egy részhalmaza, $A \subseteq \Omega$
  például: diplomások (A) vagy a balkezesek (B)
- **valószínűség**: eseményekhez $[0, 1]$-beli számokat rendelő függvény (például: $\mathbb{P}(A) = 22\%$)

Eseménytér

- **eseménytér**: az összes lehetőség halmaza, Ω (például a magyar felnőttek)
- **elemi esemény:** a kísérlet egy lehetséges kimenetele, Ω egy eleme (például Hanna vagy Gábor)
- **esemény**: az eseménytér egy részhalmaza, $A \subseteq \Omega$
  például: diplomások (A) vagy a balkezesek (B)
- **valószínűség**: eseményekhez $[0,1]$-beli számokat rendelő függvény (például: $\mathbb{P}(A) = 22\%$)

További példák:

- eseménytér: magyar férfiak; esemény: 50 évesnél idősebbek
- két érmedobásnál az eseménytér $\{FF, FI, IF, II\}$, esemény: különbözőt dobtunk, azaz $\{FI, IF\}$
- egy érmével addig dobunk, amíg fejet nem kapunk, ekkor az eseménytér: $\{F, IF, IIF, IIIF, \ldots,$ minden dobás írás$\}$

Események valószínűsége

1) Egy esemény valószínűsége mindig 0 és 1 közé esik:

$$\boxed{0 \le \mathbb{P}(A) \le 1}$$

Események valószínűsége

1) Egy esemény valószínűsége mindig 0 és 1 közé esik:

$$\boxed{0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1}$$

2) Egy találkozóra öt embert hívtak.

Mennyi a valószínűsége, hogy legalább négyen eljönnek?

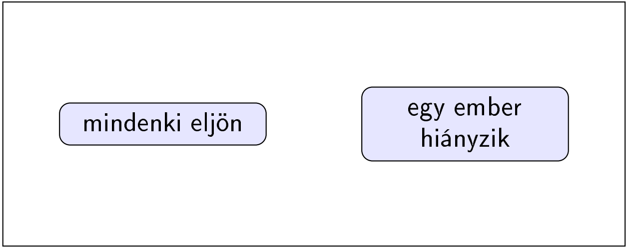
Események valószínűsége

1) Egy esemény valószínűsége mindig 0 és 1 közé esik:

$$\boxed{0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1}$$

2) Egy találkozóra öt embert hívtak.

Mennyi a valószínűsége, hogy legalább négyen eljönnek?



Események valószínűsége

1) Egy esemény valószínűsége mindig 0 és 1 közé esik:

$$\boxed{0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1}$$

2) Egy találkozóra öt embert hívtak.

Mennyi a valószínűsége, hogy legalább négyen eljönnek?

$\boxed{\text{mindenki eljön}} \quad + \quad \boxed{\text{egy ember hiányzik}}$

$\mathbb{P}(\text{legalább négyen vannak}) =$

$= \mathbb{P}(\text{mindenki eljön}) \qquad \mathbb{P}(\text{egy ember hiányzik})$

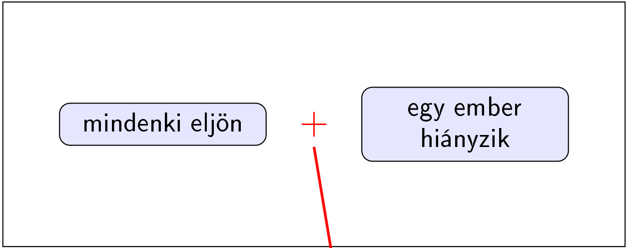
Események valószínűsége

1) Egy esemény valószínűsége mindig 0 és 1 közé esik:

$$\boxed{0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1}$$

2) Egy találkozóra öt embert hívtak.

Mennyi a valószínűsége, hogy legalább négyen eljönnek?



$\mathbb{P}(\text{legalább négyen vannak}) =$

$$= \mathbb{P}(\text{mindenki eljön}) + \mathbb{P}(\text{egy ember hiányzik})$$

Események valószínűsége

1) Egy esemény valószínűsége mindig 0 és 1 közé esik:

$$\boxed{0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1}$$

2) Általában:

Ha az A és B események kizáróak, azaz metszetük üres,
akkor annak valószínűsége, hogy legalább az egyik bekövetkezik,
a valószínűségük összege:

Események valószínűsége

1) Egy esemény valószínűsége mindig 0 és 1 közé esik:

$$\boxed{0 \le \mathbb{P}(A) \le 1}$$

2) Általában:

Ha az A és B események kizáróak, azaz metszetük üres,
akkor annak valószínűsége, hogy legalább az egyik bekövetkezik,
a valószínűségük összege:

$$\boxed{A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)}$$

Események valószínűsége

1) Egy esemény valószínűsége mindig 0 és 1 közé esik:

$$\boxed{0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1}$$

2) Általában:

Ha az A és B események kizáróak, azaz metszetük üres, akkor annak valószínűsége, hogy legalább az egyik bekövetkezik, a valószínűségük összege:

$$\boxed{A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)}$$

kizáróak: egyszerre nem következhetnek be

unió: legalább az egyik bekövetkezik

A valószínűség alaptulajdonságai

1. **Egy esemény valószínűsége mindig 0 és 1 közé esik:**

A valószínűség alaptulajdonságai

1. **Egy esemény valószínűsége mindig 0 és 1 közé esik:**

$$0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$$

bármely A eseményre,

A valószínűség alaptulajdonságai

1. **Egy esemény valószínűsége mindig 0 és 1 közé esik:**

$$0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$$

bármely A eseményre, **és a biztos esemény valószínűsége 1.**

A valószínűség alaptulajdonságai

1. **Egy esemény valószínűsége mindig 0 és 1 közé esik:**

$$0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$$

   bármely A eseményre, **és a biztos esemény valószínűsége 1.**

2. **Additivitás:** ha $A_1, A_2, \ldots$ események, és semelyik kettő nem következhet be egyszerre, azaz

A valószínűség alaptulajdonságai

1. **Egy esemény valószínűsége mindig 0 és 1 közé esik:**

$$0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$$

   bármely A eseményre, **és a biztos esemény valószínűsége 1.**

2. **Additivitás:** ha $A_1, A_2, \ldots$ események, és semelyik kettő nem következhet be egyszerre, azaz

$$A_i \cap A_j = \emptyset \qquad \text{minden } i, j \geq 1\text{-re},$$

   akkor annak valószínűsége, hogy legalább az egyik bekövetkezik, a valószínűségük összege:

A valószínűség alaptulajdonságai

1. **Egy esemény valószínűsége mindig 0 és 1 közé esik:**

$$0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$$

bármely A eseményre, **és a biztos esemény valószínűsége 1.**

2. **Additivitás:** ha $A_1, A_2, \ldots$ események, és semelyik kettő nem következhet be egyszerre, azaz

$$A_i \cap A_j = \emptyset \qquad \text{minden } i, j \geq 1\text{-re},$$

akkor annak valószínűsége, hogy legalább az egyik bekövetkezik, a valószínűségük összege:

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) + \ldots.$$

A valószínűség alaptulajdonságai

1. **Egy esemény valószínűsége mindig 0 és 1 közé esik:**

   $$0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$$

   bármely A eseményre, **és a biztos esemény valószínűsége 1.**

2. **Additivitás:** ha $A_1, A_2, \ldots$ események, és semelyik kettő nem következhet be egyszerre, azaz

   $$A_i \cap A_j = \emptyset \qquad \text{minden } i, j \geq 1\text{-re,}$$

   akkor annak valószínűsége, hogy legalább az egyik bekövetkezik, a valószínűségük összege:

   $$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) + \ldots.$$

   Ugyanez más jelöléssel:

   $$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j).$$

A valószínűség tulajdonságai

- Egy **eseményy valószínűsége** mindig 0 és 1 közé esik:

$$0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$$

.

- A **biztos esemény** (összes lehetőség, ezek halmaza Ω) valószínűsége 1:

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1; \qquad \mathbb{P}(\emptyset) = 0,$$

míg a **lehetetlen esemény** (üres halmaz) valószínűsége 0.

A valószínűség tulajdonságai

- Egy **esemény valószínűsége** mindig 0 és 1 közé esik:
$$0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$$
.
- A **biztos esemény** (összes lehetőség, ezek halmaza Ω) valószínűsége 1:
$$\mathbb{P}(\Omega) = 1; \qquad \mathbb{P}(\emptyset) = 0,$$
míg a **lehetetlen esemény** (üres halmaz) valószínűsége 0.
- **Komplementer** valószínűsége: ha $A \subseteq \Omega$ esemény, akkor annak valószínűsége, hogy A **nem következik be**:
$$\mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(\Omega \setminus A) = 1 - \mathbb{P}(A).$$
- **Különbség** valószínűsége:
$$\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Halmazok és részhalmazok

Legyen $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ egy véges halmaz.

Az Ω elemei: $a_1 \in \Omega$, $a_2 \in \Omega$, stb.

Az Ω részhalmazai: $A \subseteq \Omega$ részhalmaza Ω-nak, ha A egy olyan halmaz, melynek minden eleme Ω-nak is eleme. Például: $A = \{a_2, a_3, a_5\} \subseteq \Omega$.

Például: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, ekkor $A = \{2, 4\} \subseteq \Omega$ részhalmaza Ω-nak, de $B = \{2, 4, 6\}$ nem részhalmaza Ω-nak.

Az $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ részhalmazai: $\emptyset$ (üres halmaz, ez minden halmaznak a részhalmaza), $\{1\}, \{2\}, \ldots, \{5\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \ldots, \{1, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Összesen $2^5 = 32$ részhalmaza van: mind az öt elemről külön-külön eldönthetjük, hogy bekerüljön-e a részhalmazba.

Általában, egy n elemű halmaznak 2^n részhalmaza van. Például egy egyeleműnek 2 (az üres és saját maga), egy kételeműnek 4, egy háromeleműnek 8, és így tovább.

Jelölések és műveletek eseményekkel

- Ω az eseménytér, ez a biztos esemény
- $\emptyset$ (üres halmaz) esemény neve: lehetetlen esemény
- az események összessége, halmaza: $\mathcal{A}$ (minden eleme Ω egy részhalmaza)

Jelölések és műveletek eseményekkel

- Ω az eseménytér, ez a biztos esemény
- $\emptyset$ (üres halmaz) esemény neve: lehetetlen esemény
- az események összessége, halmaza: $\mathcal{A}$ (minden eleme Ω egy részhalmaza)
- $A, B \in \mathcal{A}$ események **uniója** (jelölés: $A \cup B$) azon elemi események halmaza, melyek A és B közül legalább az egyikben benne vannak
- $A, B \in \mathcal{A}$ események **metszete** (jelölés: $A \cap B$) azon elemi események halmaza, melyek A-ban és B-ben is benne vannak
- $A \in \mathcal{A}$ és $B \in \mathcal{A}$ **kizáró események**, ha $A \cap B = \emptyset$, azaz nincs olyan elemi esemény, mely A-ban és B-ben is benne van
- $A \in \mathcal{A}$ esemény **ellentettje/komplementere**: $\overline{A} = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$, azaz azokból az elemi eseményekből áll, melyek nincsenek A-ban

A valószínűség axiomatikus felépítése

Ω: eseménytér (a lehetséges kimenetelek összessége)

$\mathcal{A}$: az események halmaza

$\mathbb{P}$: **valószínűség**, amire az alábbiak teljesülnek:

- **eseményekhez rendel nemnegatív számokat**, azaz $A \in \mathcal{A}$ esetén $\mathbb{P}(A) \geq 0$
- **additív**: ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ események, és bármely kettő metszete üres, akkor

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) + \ldots$$

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, azaz a biztos esemény valószínűsége 1

Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ hármast **valószínűségi mezőnek** nevezzük.

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ hármas **Kolmogorov-féle valószínűségi mező**, ha

- az Ω **eseménytér** egy nem üres halmaz;

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ hármas **Kolmogorov-féle valószínűségi mező**, ha

- az Ω **eseménytér** egy nem üres halmaz;
- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ az **az események halmaza**, azaz minden $A \in \mathcal{A}$-ra $A \subseteq \Omega$ úgy, hogy
  1. $\Omega \in \mathcal{A}$;
  2. ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, akkor $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ (azaz megszámlálható sok $\mathcal{A}$-beli elem uniója is $\mathcal{A}$-beli);
  3. ha $A \in \mathcal{A}$, akkor $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ (azaz $\mathcal{A}$-beli halmazok komplementere is $\mathcal{A}$-beli.

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ hármas **Kolmogorov-féle valószínűségi mező**, ha

- az Ω **eseménytér** egy nem üres halmaz;
- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ az **az események halmaza**, azaz minden $A \in \mathcal{A}$-ra $A \subseteq \Omega$ úgy, hogy
  1. $\Omega \in \mathcal{A}$;
  2. ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, akkor $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ (azaz megszámlálható sok $\mathcal{A}$-beli elem uniója is $\mathcal{A}$-beli);
  3. ha $A \in \mathcal{A}$, akkor $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ (azaz $\mathcal{A}$-beli halmazok komplementere is $\mathcal{A}$-beli.
- a **valószínűség** egy $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$ függvény, melyre
  1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, azaz a biztos esemény valószínűsége 1;
  2. ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ és minden $1 \leq i < j$-re $A_i \cap A_j = \emptyset$, akkor

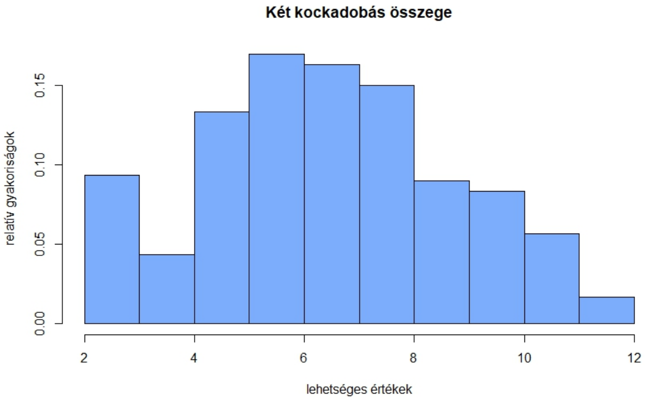
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n),$$

azaz a megszámlálható sok kizáró esemény uniójának valószínűsége a valószínűségek összege.

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

- Ω: **eseménytér** vagy elemi események halmaza.
- Ω elemei ($\omega \in \Omega$): **elemi események**.
- $\mathcal{A}$: **események halmaza** (vagy események σ-algebrája).
- $\mathcal{A}$ elemei ($A \in \mathcal{A}$): **események**.
- $\mathbb{P}$: **valószínűség** (probability).
- Ω esemény neve: biztos esemény.
- $\emptyset$ (üres halmaz) esemény neve: lehetetlen esemény.
- $A \in \mathcal{A}$ és $B \in \mathcal{A}$ **kizáró események**, ha $A \cap B = \emptyset$, azaz **egyszerre nem következhetnek be**.

Példa: két szabályos kockadobás összege



Kísérlet: két szabályos dobókockával dobva mennyi a dobott számok összege. Ezt 300-szor megismételve az egyes lehetséges értékek **relatív gyakorisága** (előfordulásuk aránya) látható az ábrán.

Példa: két szabályos kockadobás

Két szabályos dobókockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7?

Példa: két szabályos kockadobás

Két szabályos dobókockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7?

A dobókockák, emberek, tárgyak stb. mindig különbözőek.

- **eseménytér**: lehetséges dobássorozatok. Ezek száma:

Példa: két szabályos kockadobás

Két szabályos dobókockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7?

A dobókockák, emberek, tárgyak stb. mindig különbözőek.

- **eseménytér**: lehetséges dobássorozatok. Ezek száma:

$$6 \cdot 6 = 36; \text{mindkét dobás hatféle lehet.}$$

Példa: két szabályos kockadobás

Két szabályos dobókockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7?

A dobókockák, emberek, tárgyak stb. mindig különbözőek.

- **eseménytér**: lehetséges dobássorozatok. Ezek száma:

$$6 \cdot 6 = 36; \text{mindkét dobás hatféle lehet.}$$

- A dobássorozatok egyformán valószínűek: mindegyiknek $1/36$ a valószínűsége.
- A kedvező dobássorozatok száma:

Példa: két szabályos kockadobás

Két szabályos dobókockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7?

A dobókockák, emberek, tárgyak stb. mindig különbözőek.

- **eseménytér**: lehetséges dobássorozatok. Ezek száma:

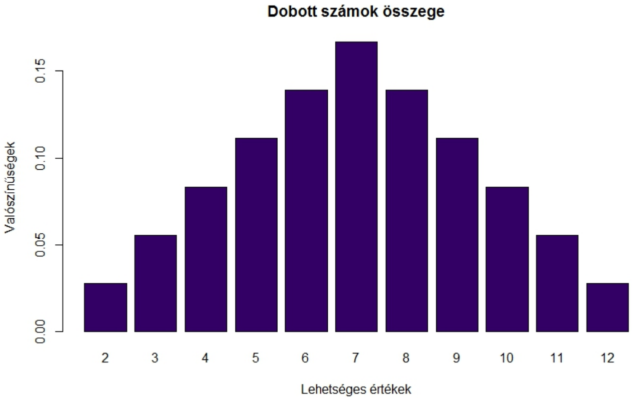
$$6 \cdot 6 = 36; \text{mindkét dobás hatféle lehet.}$$

- A dobássorozatok egyformán valószínűek: mindegyiknek $1/36$ a valószínűsége.
- A kedvező dobássorozatok száma: 6.

11	12	13	14	15	**16**
21	22	23	24	**25**	26
31	32	33	**34**	35	36
41	42	**43**	44	45	46
51	**52**	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

Tehát $\mathbb{P}(\text{az összeg } 7) = 6/36 = 1/6$.

Példa: két szabályos kockadobás



Az összeg lehetséges értékei és a valószínűségek

Példa: két szabályos kockadobás

- **elemi esemény:** a kísérlet egy lehetséges kimenetele, egy dobássorozat, például: **15** vagy **22**
- **eseménytér**: az elemi események összessége, az Ω halmaz most az alábbi 36 elemű halmaz: $\Omega = \{11, 12, 13, \ldots, 16, 21, \ldots, 26, \ldots, 61, \ldots, 66\}$.

Példa: két szabályos kockadobás

- **elemi esemény:** a kísérlet egy lehetséges kimenetele, egy dobássorozat, például: **15** vagy **22**
- **eseménytér**: az elemi események összessége, az Ω halmaz most az alábbi 36 elemű halmaz: $\Omega = \{11, 12, 13, \ldots, 16, 21, \ldots, 26, \ldots, 61, \ldots, 66\}$.
- **esemény**: az eseménytér, azaz Ω részhalmazai
  például: a dobott számok összege 7, azaz $A = \{16, 25, 34, 43, 52, 61\}$
  vagy: a dobott számok összege legfeljebb 3, azaz $B = \{11, 12, 21\}$

  $\mathcal{A}$: az események halmaza, ez most Ω összes részhalmaza

  az összes esesmény száma: $|\mathcal{A}| = 2^{36}$

Példa: két szabályos kockadobás

- **elemi esemény:** a kísérlet egy lehetséges kimenetele, egy dobássorozat, például: **15** vagy **22**
- **eseménytér**: az elemi események összessége, az Ω halmaz most az alábbi 36 elemű halmaz: $\Omega = \{11, 12, 13, \ldots, 16, 21, \ldots, 26, \ldots, 61, \ldots, 66\}$.
- **esemény**: az eseménytér, azaz Ω részhalmazai
  például: a dobott számok összege 7, azaz $A = \{16, 25, 34, 43, 52, 61\}$
  vagy: a dobott számok összege legfeljebb 3, azaz $B = \{11, 12, 21\}$

  $\mathcal{A}$: az események halmaza, ez most Ω összes részhalmaza

  az összes esesmény száma: $|\mathcal{A}| = 2^{36}$
- **valószínűség**: $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$ az eseményekhez $[0,1]$-beli számokat rendelő függvény. Például

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}; \qquad \mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

Kapcsolat a relatív gyakorisággal

Legyen Ω az eseménytér, a lehetséges kimenetelek halmaza, és $A \subseteq \Omega$ egy esemény, vagyis ennek egy részhalmaza.

Az A esemény **relatív gyakorisága** n kísérletből:

$$r(A) = \frac{A \text{ bekövetkezéseinek száma}}{\text{az összes kísérlet száma}} = \frac{A \text{ bekövetkezéseinek száma}}{n}.$$

A relatív gyakoriságra az alábbiak igazak:

- **eseményekhez rendel nemnegatív számokat**, azaz $A \in \mathcal{A}$ esetén $r(A) \geq 0$
- **additív**: ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ események, és bármely kettő metszete üres, akkor

$$r(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = r(A_1) + r(A_2) + r(A_3) + \ldots$$

- $r(\Omega) = 1$, azaz a biztos esemény relatív gyakorisága 1

Vagyis a valószínűség azon tulajdonságait, amikből kiindultunk, a relatív gyakoriság is teljesíti.

Házi feladat szeptember 19., hétfő, 10:15-ig

Egy buszon 40 ülés van, két egyforma oszlopban. Felszáll tíz utas, és véletlenszerűen leülnek, úgy, hogy minden lehetséges elhelyezkedés egyformán valószínű.

(a) Mik lesznek ebben az esetben az elemi események?

(b) Minek több a valószínűsége: hogy mindannyian egy oszlopba ülnek, vagy hogy pont egyenlően helyezkednek el az oszlopok között, azaz mindkét oszlopba öten ülnek?

Páronként együtt dolgozva lehet beadni, papíron az óra elején, emailen (`agnes.backha`
vagy a moodle-ben (ha létrejön addig a felület).