Valószínűségszámítás előadás, 9. hét, 2021. november 12.

Sűrűségfüggvény, egyenletes eloszlás

1. A sűrűségfüggvény

Azt már láttuk (például az egyenletes eloszlás, exponenciális eloszlás, Pareto-eloszlás esetében), hogy véletlen mennyiségek modellezésénél nem csak diszkrét (véges vagy megszámlálhatóan sok értéket felvevő) valószínűségi változókat érdemes használni, hanem olyanokat is, melyek értékkészlete egy intervallum vagy például a pozitív számok halmaza. Emlékeztetőül, az X valószínűségi változó eloszlásfüggvényét így definiáltuk:

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t),$$

ha $t \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós szám. Ebből következik, hogy

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

is teljesül tetszőleges $a < b$ valós számokra.

Az eloszlásfüggvény azonban nem mindig a „legkényelmesebb” leírása a valószínűségi változó viselkedésének. Ezért gyakran használjuk inkább a sűrűségfüggvényt (olyankor, amikor van egyáltalán sűrűségfüggvény), melynek fő jellemzője, hogy annak valószínűségét, hogy X egy adott $[a, b]$ intervallumba esik, a sűrűségfüggvény alatti területnek az a és b közé eső része, azaz a sűrűségfüggvény a-tól b-ig vett integrálja adja meg.

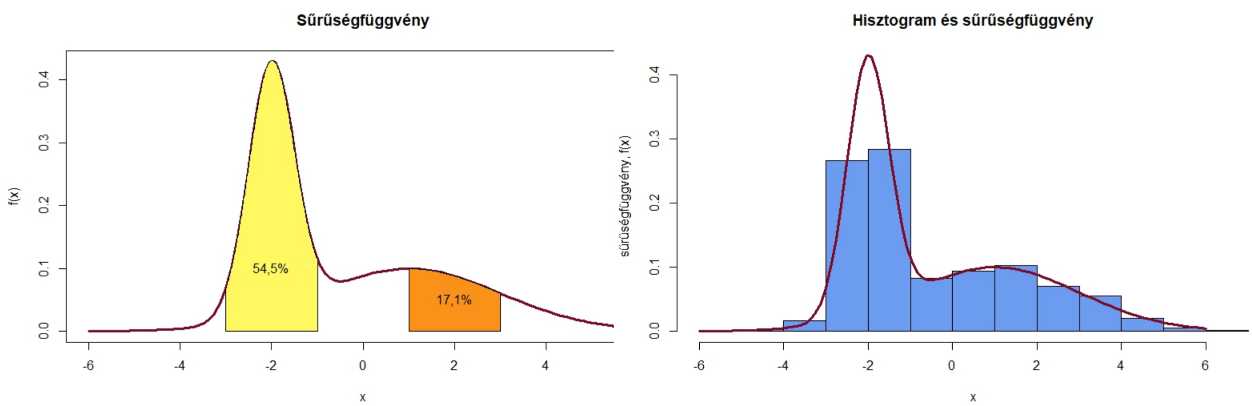
Ezt láthatjuk az 1. ábrán. Ha X sűrűségfüggvénye f (ami most az ábrán látható függvény), akkor például annak valószínűsége, hogy X értéke -3 és -1 közé esik:

$$\mathbb{P}(-3 \leq X \leq -1) = \int_{-3}^{-1} f(x)dx = \mathbf{54,5}\%.$$

Hasonlóképpen, annak valószínűsége, hogy X értéke 1 és 3 közé esik:

$$\mathbb{P}(1 \leq X \leq 3) = \int_{1}^{3} f(x)dx = 17,1\%.$$

Láthatjuk, hogy bár a két intervallum egyformán hosszú, az első esetben a sűrűségfüggvény nagyobb értékei miatt a sűrűségfüggvény alatti terület és így a valószínűség is nagyobb lesz. Vagyis minél nagyobbak egy intervallumban a sűrűségfüggvény értékei, annál nagyobb valószínűséggel esik oda a megfigyelés.



1. ábra. Példa sűrűségfüggvényre és hozzá tartozó ezer elemű minta hisztogramja

Az 1. ábrán ugyanezt a sűrűségfüggvényt használva sorsoltunk 1000 elemű mintát, vagyis tekintettünk ezer, egymástól független valószínűségi változót úgy, hogy mindegyiknek ugyanaz az ábrán szereplő függvény a sűrűségfüggvénye. Azt látjuk, hogy a hisztogram nagyrészt követi a sűrűségfüggvény alakját: ahol nagyobb a sűrűségfüggvény értéke, oda nagyobb valószínűséggel esnek a megfigyelések, így a hisztogramon magasabb oszlopokat látunk.

1.1. Definíció. *Az $X : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változó* **sűrűségfüggvénye** *az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, ha*

$$\mathbb{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$$

teljesül minden $t \in \mathbb{R}$ számra.

Az integrálra úgy gondolhatunk, mint az f függvény alatt t-től balra lévő területre.

Nem minden valószínűségi változónak van sűrűségfüggvénye, például a diszkréteknek nincs.

A sűrűségfüggvény nem egyértelmű, néhány pontban meg lehet változtatni, sőt megszámlálható sok pontban is meg lehet változtatni, sőt vannak olyan halmazok, amik nagyobbak, mint megszámlálhatóan végtelen, de még ott is meg lehet változtatni.

1.2. Definíció. *Ha az X valószínűségi változónak* **van sűrűségfüggvénye**, *akkor* **abszolút folytonos** *valószínűségi változónak nevezzük.*

1.1. Állítás. *Ha egy valószínűségi változó abszolút folytonos, akkor az eloszlásfüggvénye folytonos.*

Ez fordítva nem igaz.

1.1. A sűrűségfüggvény tulajdonságai

1.2. Állítás. *Ha az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye f, akkor tetszőleges $a < b$ számokra*

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

1.3. Állítás. *Legyen X abszolút folytonos valószínűségi változó, melynek F az eloszlásfüggvénye.*

(a) Ha f az X sűrűségfüggvénye, akkor minden $t \in \mathbb{R}$ számra

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx.$$

(b) Az $f(t) = F'(t)$ függvény (azokra a t-kre, ahol F differenciálható) az X sűrűségfüggvénye.

Ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény sűrűségfüggvény, akkor

(i) $f(x) \geq 0$ teljesül „majdnem minden” $x \in \mathbb{R}$-re (például véges vagy megszámlálható sok kivétel lehetséges).

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$, azaz $\lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} f(x)\,dx = 1$.

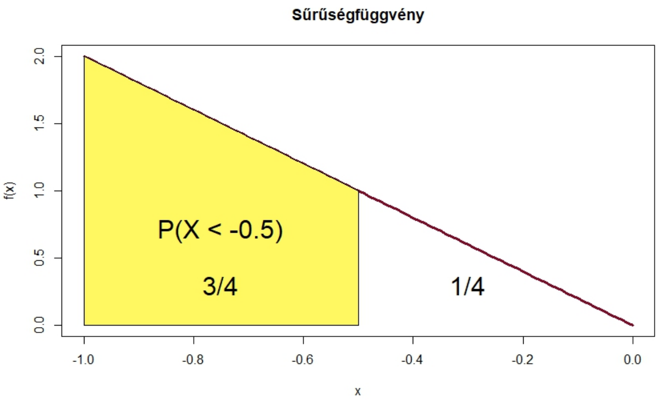
Fordítva: ha f teljesíti ezt a két tulajdonságot, akkor van olyan valószínűségi változó, aminek f a sűrűségfüggvénye.

1.2. Példa

Legyen az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x) = 2|x|$, ha $-1 < x < 0$, és 0 különben. Mennyi X eloszlásfüggvényének értéke a $-1/2$ helyen?

Felhasználva az **eloszlásfüggvény** és a **sűrűségfüggvény** definícióját (az 1.3. állítás (a) részét), illetve hogy $x \leq -1$ esetén $f(x) = 0$, azt kapjuk, hogy

$$F(-1/2) = \mathbb{P}(X \leq -1/2) = \int_{-\infty}^{-1/2} f(x)dx = \int_{-1}^{-1/2} f(x)dx = \int_{-1}^{-1/2} 2|x|\,dx =$$
$$= -\int_{-1}^{-1/2} 2x\,dx = -\left[x^2\right]_{x=-1}^{x=-1/2} = -\left(\frac{1}{4} - 1\right) = \mathbf{\frac{3}{4}}.$$



diszkrét	abszolút folytonos
X lehetséges értékei: $x_1, x_2, \dots$	X sűrűségfüggvénye: f.
$\mathbb{E}(X) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \cdot \mathbb{P}(X = x_j)$	$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx$
$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 \cdot \mathbb{P}(X = x_j)$	$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\, dx$

$$D(X) = \sqrt{\mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))^2\big)} = \sqrt{\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2}$$

$\mathbb{E}(X^k) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^k \cdot \mathbb{P}(X = x_j)$	$\mathbb{E}(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\, dx$
$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{j=1}^{\infty} g(x_j) \cdot \mathbb{P}(X = x_j)$	$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\, dx$

2. Várható érték és szórás abszolút folytonos esetben

Mennyi lehet az 1. ábrán látható eloszlás várható értéke és szórása?

A **várható értéket** olyan formában nem tudjuk definiálni abszolút folytonos eloszlásokra, mint diszkrét esetben, hiszen $\mathbb{P}(X = x) = 0$ minden x-re. Helyette:

2.1. Definíció. *Legyen X abszolút folytonos valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye f. Ekkor X* **várható értéke***:*

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx,$$

ha ez az integrál létezik és véges.

2.2. Definíció. *Tegyük fel, hogy az X valószínűségi változó abszolút folytonos, sűrűségfüggvénye f, és $\mathbb{E}(X^2)$ létezik, azaz az $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx$ integrál véges. Ekkor X* **szórásnégyzete***:*

$$D^2(X) = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))^2\big) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2,$$

szórása *pedig*

$$D(X) = \sqrt{\mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))^2\big)} = \sqrt{\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2}.$$

Láthatjuk, hogy a szórás definíciója megegyezik a diszkrét esetben használttal.

2.1. Momentumok

Az X valószínűségi változók **k. momentuma** a k. hatványának várható értéke, ha ez létezik:

$$\mathbb{E}(X^k).$$

Ennek a többek között a statisztikában van jelentősége, az eloszlások ismeretlen paramétereinek becslésekor.

2.1. Állítás. *Ha X abszolút folytonos valószínűségi változó, f a sűrűségfüggvénye, és $\mathbb{E}(g(X))$ létezik, akkor*

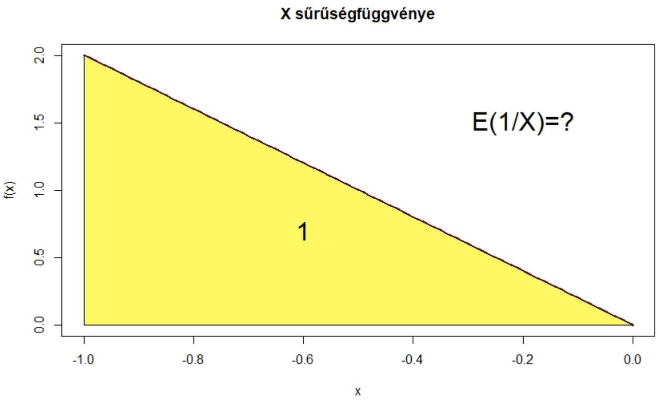
$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx.$$

Ezért a k. momentum kiszámítása:

$$\mathbb{E}(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\,dx.$$

2.2. Következmény. *A* **szórásnégyzetet** *a következőképpen számíthatjuk ki abszolút folytonos X valószínűségi változó esetén:*

$$D^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \left[\mathbb{E}(X)\right]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \left[\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx\right]^2.$$



Példa. Legyen az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x) = 2|x|$, ha $-1 < x < 0$, és 0 különben. Mennyi az $1/X$ valószínűségi változó várható értéke?

Mivel X sűrűségfüggvénye azonosan 0, ha $x > 0$, ezért $X < 0$ és $1/X < 0$ biztosan teljesül. Így $\mathbb{E}(\mathbf{1/X}) < \mathbf{0}$ teljesülni fog.

Pontosabban, mivel

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx,$$

a $g(x) = 1/x$ függvénnyel:

$$\mathbb{E}(1/X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} \cdot f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{2|x|}{x}\,dx = \int_{-1}^{0} (-2)\;dx = \mathbf{-2}.$$

Példa. Tegyük fel, hogy a holnap hulló csapadék mennyiségének sűrűségfüggvénye az alábbi:

$$f(x) = \begin{cases} 0,2, & \text{ha } 0 \le x \le 1; \\ 0,4, & \text{ha } 1 < x \le 3; \\ 0 & \text{ha } x < 0 \text{ vagy } x > 2. \end{cases}$$

Jelölje a csapadékmennyiséget X. A csapadékmennyiség **várható értéke**:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_{0}^{1} x \cdot 0,2dx + \int_{1}^{3} x \cdot 0,4dx =$$
$$= 0,2 \cdot \left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) + 0,4 \cdot \left(\frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) = \mathbf{1,7}.$$

A csapadékmennyiség négyzetének várható értéke:

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\, dx = \int_0^1 x^2 \cdot 0,2\, dx + \int_1^3 x^2 \cdot 0,4\, dx =$$
$$= 0,2 \cdot \left(\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) + 0,4 \cdot \left(\frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right) = \mathbf{3,53}.$$

Ez alapján a csapadékmennyiség szórása:

$$D(X) = \sqrt{\mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2} = \sqrt{3,53 - 1,7^2} = \mathbf{0,8}.$$

3. Egyenletes eloszlás

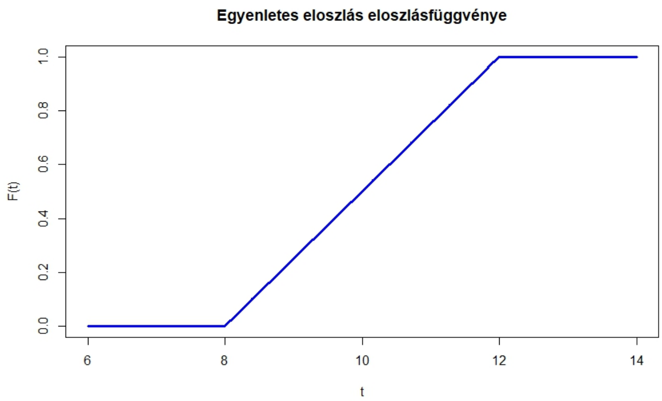
A korábban látott három eloszlás, az egyenletes, exponenciális– és Pareto-eloszlás valójában abszolút folytonos eloszlások. Eddig az eloszlásfüggvény segítségével definiáltuk őket, de a sűrűségfüggvényüket is meghatározhatjuk, abból pedig a várható értéküket, szórásukat is. Egyelőre az egyenletes eloszlást nézzük meg részletesebben.

3.1. Egyenletes eloszlás

- Csomagot várunk, amit a futár véletlen Y időpontban hoz ki.
- Feltételezzük, hogy Y egyenletes eloszlású a $[8, 12]$ intervallumon (órában mérve).
- **Feltéve, hogy a futár** 10 **óráig még nem érkezett meg**, **mennyi a valószínűsége, hogy** 11 **óra előtt megérkezik**?

Legyen X a futár érkezésének időpontja. Így fogunk tudni számolni:

$$\mathbb{P}(X \le 11 | X > 10) = \frac{\mathbb{P}(\{X \le 11\} \cap \{X > 10\})}{\mathbb{P}(X > 10)} = \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{2}.$$

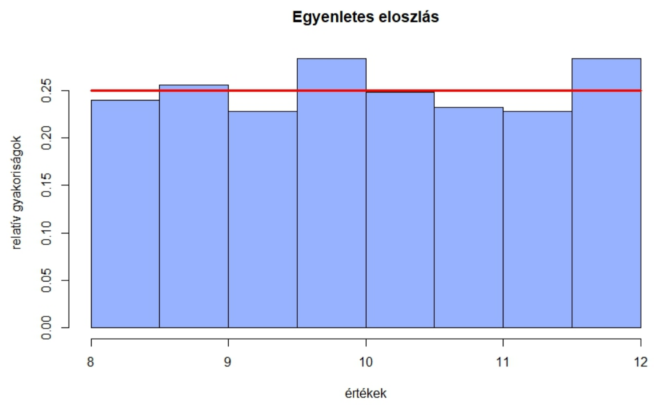


2. ábra. A $[8, 12]$ intervallumon egyenletes eloszlás eloszlásfüggvénye

Ahogy az 1.3. állításban láttuk, a sűrűségfüggvény, ha létezik, az eloszlásfüggvény deriváltjaként áll elő. Így kaphatjuk meg a már ismert eloszlásfüggvényből a sűrűségfüggvényt.

3.1. Definíció. *Az X valószínűségi változó* **egyenletes eloszlású** *az $[a, b]$ intervallumon, ha eloszlásfüggvénye:*

$$F(t) = \mathbb{P}(X \le t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \le a; \\ \frac{t-a}{b-a}, & \text{ha } a < t < b; \\ 1, & \text{ha } t \ge b. \end{cases}$$



3. ábra. A $[8, 12]$ intervallumon egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénye és 500 darab független, $[8, 12]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változóból álló minta hisztogramja

3.1. Állítás. *Legyen X egyenletes eloszlású az $[a, b]$ intervallumon. Ekkor X sűrűségfüggvénye:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } a \leq x \leq b; \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Továbbá

(i) Ha $a \leq c \leq d \leq b$, akkor

$$\mathbb{P}(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(x)\, dx = \int_c^d \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{d-c}{b-a}.$$

(ii) Az X valószínűségi változó **várható értéke** *és* **szórása***:*

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}; \qquad D(X) = \frac{b-a}{\sqrt{12}}.$$

A bizonyítás előtt érdemes megnézni, hogy mi a kapcsolat ebben az esetben a diszkrét várható érték és a sűrűségfüggvényes definíció között.

Legyen X továbbra is egyenletes eloszlású az $[a, b]$ intervallumon, X^* pedig X-nek egy kerekített változata, kerekítsük például századokra.

Ekkor, ha $a \leq x \leq b$ a századnak egy többszöröse (vagyis két tizedesjegye van), akkor

$$\mathbb{P}(X^* = x) = \mathbb{P}(x - 0,005 \leq X \leq x + 0,005) = \frac{x + 0,005 - (x - 0,005)}{b-a} = \frac{0,01}{b-a}.$$

Ezért X^* várható értéke a diszkrét eset definíciója szerint:

$$\mathbb{E}(X^*) = \sum_{a \leq x \leq b} x \cdot \frac{0,01}{b-a} = \frac{1}{100} \sum_{a \leq x \leq b} x \cdot \frac{1}{b-a}.$$

Ha 100 helyett n-t írunk (vagyis $1/n$ többszöröseire kerekítünk), majd n-nel végtelenhez tartunk, akkor éppen az integrál jelenik meg, az integrálközelítő összegek határértékeként:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{a \leq x \leq b} x \cdot \frac{1}{b-a} = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\, dx.$$

Éppen ez az integrál lesz majd a várható érték.

Általánosan azt mondhatjuk (akkor is, ha az intervallum végpontjai nem rögzítettek, vagyis a lehetséges értékek halmaza nem korlátos), hogy a kerekített valószínűségi változó nagyjából $f(x)/n$ valószínűséggel veszi fel az x értéket, és így a

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{-n\le x\le n} x\cdot\frac{f(x)}{n}$$

integrálközelítő összeg jelenik meg, aminek a limesze $\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\,dx$, vagyis a várható érték. Itt úgy gondolkodhatunk, hogy a $-n$-nél kisebb értékeket $-n$-re, az n-nél nagyobbakat n-re kerekítjük, ezen belül használjuk az $1/n$-es lépésközt, és így tartunk n-nel végtelenhez.

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy a megadott $f(x)$ függvényt $-\infty$-től t-ig integrálva éppen $F(t) = \mathbb{P}(X\le t)$-t kapjuk, ez lesz tehát a sűrűségfüggvény.

(i) Itt az állítás a bizonyítást is tartalmazza, a sűrűségfüggvény egyik tulajdonságát (az 1.3. állítás) használjuk, majd a konstans integrálját (amihez valójában csak a téglalap alatti területre van szükség).

(ii) A várható értéket a definíció alapján számíthatjuk ki:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} s\cdot f(s)ds = \int_a^b s\cdot\frac{1}{b-a}ds = \frac{1}{b-a}\left[\frac{s^2}{2}\right]_{s=a}^b = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{b^2-a^2}{2} = \frac{a+b}{2},$$

hiszen az x függvény primitív függvénye $\frac{x^2}{2}$, és $b^2-a^2=(b-a)(b+a)$.

(iii) A szórást szintén definíció alapján számoljuk, először a négyzet várható értékét kiszámítva:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} s^2\cdot f(s)ds = \int_a^b s^2\cdot\frac{1}{b-a}ds = \frac{1}{b-a}\left[\frac{s^3}{3}\right]_{s=a}^b \\ &= \frac{1}{b-a}\cdot\frac{b^3-a^3}{3} = \frac{a^2+ab+b^2}{3},\end{aligned}$$

hiszen az x^2 függvény primitív függvénye $\frac{x^3}{3}$, és $b^3-a^3=(b-a)(a^2+ab+b^2)$.

Ebből a szórásnégyzet:

$$\begin{aligned}D^2(X) &= \mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &= \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{a^2-2ab+b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12} \quad\Rightarrow\quad D(X) = \frac{b-a}{\sqrt{12}}.\end{aligned}$$

□

Vagyis a várható érték az intervallum közepe, a szórás pedig egyenesen arányos az intervallum hosszával.

Példa. Csomagot várunk, a futár 8 és 12 óra között érkezik. Feltesszük, hogy érkezésének időpontja egyenletes eloszlású a $[8,12]$ intervallumon. Ekkor az előző állítás alapján az alábbiak igazak ($a=8, b=12$).

- Annak valószínűsége, hogy 10 és 11 óra között érkezik: $(11-10)/(12-8)=1/4$.
- Annak valószínűsége, hogy 10:15 és 10:30 között érkezik: $1/16 = 0,0625$.
- Érkezési időpontjának várható értéke: $(8+12)/2 = 10$ óra.
- Érkezési időpontjának szórása: $(12-8)/\sqrt{12} = 2/\sqrt{3} = 1,154$.

Házi feladat november 19., péntek, 12:15-ig Az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye az alábbi módon adható meg, ahol c megfelelő valós szám:

$$f(x) = \begin{cases} 0; & \text{ha} x\le 0; \\ 1; & \text{ha } 0\le x\le 1; \\ c; & \text{ha } 1\le x\le 2; \\ 0; & \text{különben.}\end{cases}$$

a) Mennyi c értéke?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy $0,5\le X\le 1,5$?