Valószínűségszámítás előadás, 5. hét, 2021. október 8.

Nevezetes diszkrét eloszlások, függetlenség, a várható érték és szórás tulajdonságai

1. Nevezetes diszkrét eloszlások

A binomiális eloszláson kívül más eloszláscsaládok is gyakran előfordulnak valós helyzetek matematikai modellezésénél.

1.1. Poisson-eloszlás

Emlékeztetőül:

1.1. Definíció (Binomiális eloszlás). *Az X valószínűségi változó* **binomiális eloszlású** *n renddel és p paraméterrel, ha lehetséges értékei:*

$$0, 1, 2, \dots, n,$$

és minden $0 \le k \le n$ egészre

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

($n \ge 1$ egész, $0 < p < 1$.) Jelölés: $Bin(n, p)$.

Ez jött elő például a visszatevéses mintavételnél is, ha N golyó van, M fekete, n-szer húzunk, akkor a húzott fekete golyók száma binomiális eloszlású n renddel és $p = M/N$ paraméterrel. Általában: n független kísérletet végzünk, mindegyik p valószínűséggel sikerül, X a sikeres kísérletek száma lehet.

Nézzünk egy olyan esetet, amikor a kísérletek száma jóval nagyobb, mint a sikeres kísérletek számának várható értéke, azaz ritkának mondhatók a sikeres kísérletek.

Tegyük fel, hogy egy biztosító $n = 100000$ ügyfelének mindegyike egy év alatt egymástól függetlenül $p = 0,0001$ valószínűséggel okoz balesetet. A balesetet okozó ügyfelek számának (ezt jelöljük X-szel) **várható értéke**:

$$\mathbb{E}(X) = np = 100000 \cdot 0,0001 = \mathbf{10}.$$

Ilyenkor annak valószínűségét, hogy **pontosan k ügyfél okoz balesetet**, felírhatjuk pontosan, de ez alapján egy közelítő számítást is végezhetünk, ha k értéke nem túlságosan nagy, mondjuk $k = 15$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = k) &= \binom{100000}{k} \cdot 0,0001^k \cdot 0,9999^{100000-k} = \\
&= \frac{100000 \cdot 99999 \cdot \ldots (100001 - k)}{k!} \cdot 0,0001^k \cdot 0,9999^{100000-k} \approx \\
&\approx \frac{100000^k \cdot 0,0001^k}{k!} \left(1 - \frac{10}{100000}\right)^{100000} \approx \frac{10^k}{k!} e^{-10},
\end{aligned}$$

felhasználva, hogy $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = e^{-x}$ tetszőleges $x > 0$-ra.

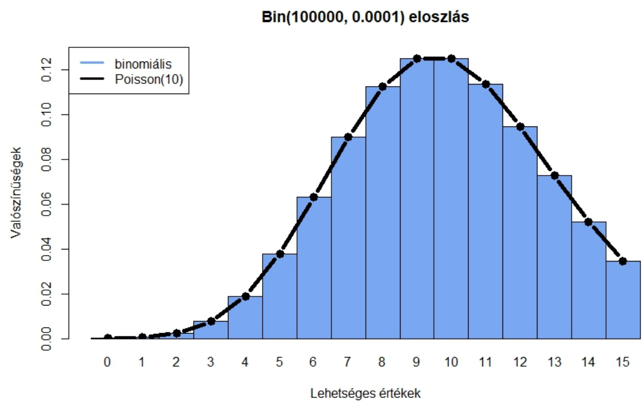
Az 1. ábrán láthatjuk, hogy valóban jó a közelítés: az oszlopok az $n = 100000$ rendű és $p = 0,0001$ paraméterű binomiális eloszlást ábrázolják (vízszintes tengely: k, oszlopok magassága: $\mathbb{P}(X = k)$).
Feketével a $\frac{10^k}{k!} e^{-10}$ függvény látható. Ez utóbbi is egy eloszlás, a gyakran használt Poisson-eloszlás.

1.2. Definíció. *Legyen $\lambda > 0$. Az X valószínűségi változó* **λ paraméterű Poisson-eloszlású**, *ha lehetséges értékei:*

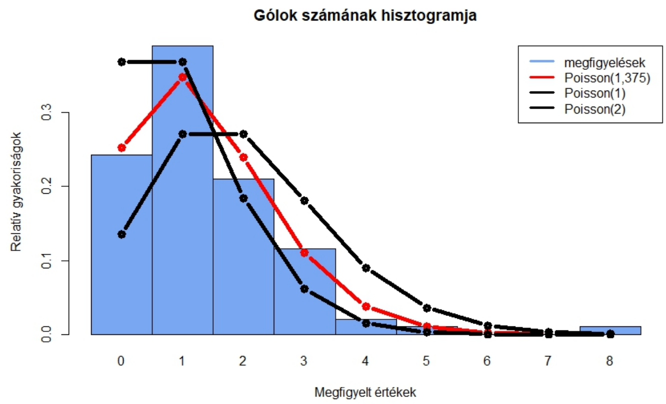
$$k = 0, 1, 2, \dots, \text{ és ekkor } \mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

1.1. Állítás. *A λ paraméterű Poisson-eloszlás* **várható értéke** *és* **szórása***:*

$$\mathbb{E}(X) = \lambda; \qquad D(X) = \sqrt{\lambda}.$$



1. ábra. A binomiális eloszlás közelítése Poisson-eloszlással



2. ábra. A gólok számának hisztogramja $n = 95$ mérkőzésen, és különböző paraméterű Poisson-eloszlások

A 2. ábrán pedig az látható, hogy valós adatokra is jól illeszthető a Poisson-eloszlás, ha a megfelelő paramétert választjuk. Itt az adatok átlaga

- **ritkán bekövetkező események száma adott időszak alatt**:
  - lórúgás halálos áldozatainak száma a porosz hadseregben (ez volt az egyik első statisztikai példa a XIX. század második felében)
  - a balesetek száma egy városban egy hét vagy egy hónap alatt;
  - a földrengések száma egy év alatt
- egy rendszerbe beérkező igények száma egy adott időszakban:
  - egy üzletbe beérkező vásárlók száma egy óra alatt
  - egy weboldal letöltéseinek száma egy óra alatt
- **általában:** véletlen időközönként bekövetkező események száma adott időszak alatt

Poisson-folyamat: a t idő alatt bekövetkező események száma Poisson-eloszlású ct paraméterrel.

Ekkor a t idő alatt bekövetkező események számának várható értéke: ct, azaz az intervallum hosszával arányos.

1.2. Hipergeometriai eloszlás

A visszatevés nélküli mintavételben a húzott fekete golyók számát hipergeometriai eloszlással írhatjuk le. Nézzünk először egy példát.

Egy sportcsapat $N = 20$ **tagja** közül $M = 9$ **balkezes**.
A pályán egyszerre $n = 7$ **különböző** játszik.
Tegyük fel, hogy minden hétfős összeállítás egyformán valószínű.

Milyen eloszlású a pályán a **balkezes játékosok száma,** X**?**

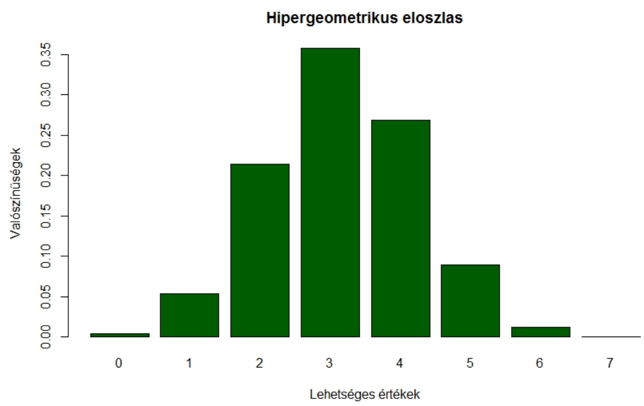
A hétfős összeállítások száma:	$\binom{20}{7}$
k balkezes játékos kiválasztása:	$\binom{9}{k}$
$7 - k$ jobbkezes játékos kiválasztása:	$\binom{11}{7-k}$
A jó lehetőségek száma összesen:	$\binom{9}{k} \cdot \binom{11}{7-k} \leftarrow$

szorzás: bármely balkezes választás bármely jobbkezessel jó

osztás: minden lehetőség egyformán valószínű

$$\boxed{\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{9}{k} \cdot \binom{11}{7-k}}{\binom{20}{7}}}$$

visszatevés nélküli mintavétel



3. ábra. A kiválasztott balkezes játékosok számának eloszlása hipergeometriai eloszlás, $N = 20$, $M = 9, n = 7$ vízszintes: k, oszlopok magassága: $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{9}{k} \cdot \binom{11}{7-k}}{\binom{20}{7}}$.

1.3. Definíció (Hipergeometriai eloszlás). *Legyenek N, M, n pozitív egészek úgy, hogy $1 \le n \le M \le N$. Az X valószínűségi változó* **hipergeometriai eloszlású**, *ha*

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

- **visszatevés nélküli mintavételnél** a húzott fekete golyók száma: N golyó, ebből M fekete, n-szer húzunk visszatevés nélkül
- lottósorsolásnál a találatok száma, X, hipergeometrikus eloszlású $N = 90$, $M = 5$, $n = 5$ paraméterekkel:
$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(k \text{ találat}) = \frac{\binom{5}{k}\binom{85}{5-k}}{\binom{90}{5}} \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

1.2. Állítás. *Ha az X valószínűségi változó hipergeometriai eloszlású M, N, n paraméterekkel, azaz*

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n),$$

akkor

$$\mathbb{E}(X) = \frac{M}{N} n; \qquad D(X) = \sqrt{n \frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}}.$$

Korábbi példa folytatása. Ha $N = 20$ játékos közül $M = 9$ balkezes, és $n = 7$-et választunk visszatevés nélkül, akkor a balkezes játékosok számának, X-nek **várható értéke** és **szórása**:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{9}{20} \cdot 7 = \mathbf{3,15}; \quad D(X) = \sqrt{7 \cdot \frac{9}{20} \cdot \left(1 - \frac{9}{20}\right) \cdot \frac{13}{19}} = \mathbf{1,09}.$$

1.3. Geometriai eloszlás

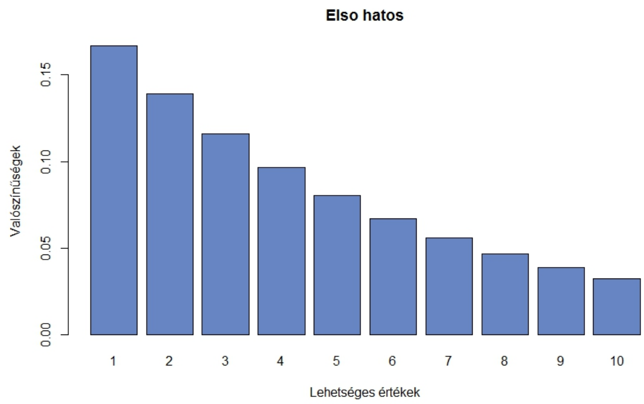
Egy közvéleménykutatásban mindenki a többiektől függetlenül $0,2$ valószínűséggel válaszol egy adott kérdésre. Jelölje Y, hogy hány embert kell megkérdezni, míg találunk egy válaszadót.

$\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(\text{az első ember válaszol}) = 0,2;$

$\mathbb{P}(Y = 2) = \mathbb{P}(\text{az első nem válaszol, a második igen}) = 0,8 \cdot 0,2;$

$\mathbb{P}(Y = 3) = \mathbb{P}(\text{az első kettő nem válaszol, a harmadik igen}) = 0,8^2 \cdot 0,2;$

$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(\text{az első } k-1 \text{ nem válaszol, a } k. \text{ igen}) = 0,8^{k-1} \cdot 0,2.$



4. ábra. Az első hatos eloszlása: geometriai eloszlás, $p = 1/6$, $k = 10$-ig

A geometriai eloszlást tehát az alábbi helyzetben használhatjuk:

- független kísérleteket végzünk;
- mindegyik p valószínűséggel sikerül;
- Y: hányadik kísérlet az első sikeres.

1.4. Definíció. *Az Y valószínűségi változó* **geometriai eloszlású** *p paraméterrel, ha lehetséges értékei:*

$$1, 2, 3 \ldots$$

és minden $1 \leq k$ egészre

$$\mathbb{P}(Y = k) = (1 - p)^{k-1} p.$$

$(0 < p < 1.)$ Jelölés: Geo(p). Másik elnevezés: Pascal-eloszlás.

Mivel $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - p)^{k-1} p = 1$, ez valóban valószínűségeloszlás. Ebből az is következik, hogy annak valószínűsége, hogy sosem sikerül a kísérlet, 0 (de ez nem a lehetetlen esemény).

1.3. Állítás. *Ha az X valószínűségi változó geometriai eloszlású p paraméterrel, azaz*

$$\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1} p \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

akkor

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}; \qquad D(X) = \sqrt{\frac{1 - p}{p^2}}.$$

Példa. Tegyük fel, hogy egy adott pártot mindenki a többiektől függetlenül $p = 0,06$ valószínűséggel támogat. Jelölje X, hogy hány embert kell megkérdezni, míg az első olyan embert megtaláljuk, aki ezt a pártot támogatná. Ekkor

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{0,06} = 16,67; \qquad D(X) = \sqrt{\frac{0,94}{0,06^2}} = 16,16.$$

1.4. Nevezetes diszkrét eloszlások: összefoglalás

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ diszkrét valószínűségi változó eloszlása: a lehetséges értékei és a hozzájuk tartozó valószínűségek.

- binomiális eloszlás: n független kísérlet, mindegyik p valószínűséggel sikerül, X: hány sikerült. $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$, ahol $k = 0, 1, 2 \ldots, n$. Ekkor

  $$\mathbb{E}(X) = np; \qquad D(X) = \sqrt{np(1-p)}.$$

  Például: visszatevéses mintavételnél a húzott fekete golyók száma, ahol n a húzások száma, p a fekete golyók aránya.

- Poisson-eloszlás: az X valószínűségi változó Poisson-eloszlású λ paraméterrel, ha

  $$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \qquad (k = 0, 1, 2 \ldots).$$

  Ekkor

  $$\mathbb{E}(X) = \lambda; \qquad D(X) = \sqrt{\lambda};$$

- hipergeometriai eloszlás: visszatevés nélküli mintavételnél a húzott fekete golyók száma; $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$. Ekkor

  $$\mathbb{E}(X) = \frac{M}{N}n; \qquad D(X) = \sqrt{n\frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}}.$$

- geometriai eloszlás: minden kísérlet p valószínűséggel sikerül; Y: hányadik az első sikeres. $\mathbb{P}(Y = k) = (1-p)^{k-1}p$, ahol $k = 1, 2, \ldots$. Ekkor

  $$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}; \qquad D(X) = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}}.$$

2. Valószínűségi változók függetlensége

Két valószínűségi változó között sokféle kapcsolat képzelhető el. Ezt valamilyen értelemben mérni is tudjuk majd, de először azt fogalmazzuk meg, hogy mit értünk azon, amikor „nincs kapcsolat” a kettő között, azaz független a két valószínűségi változó. Ehhez az eseményekre megfogalmazott függetlenség fogalmát tudjuk majd kiindulásként használni.

Emlékeztetőül: az A és B események **függetlenek**, ha

$$\mathbb{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = \mathbb{P}(\mathbf{A}) \cdot \mathbb{P}(\mathbf{B}).$$

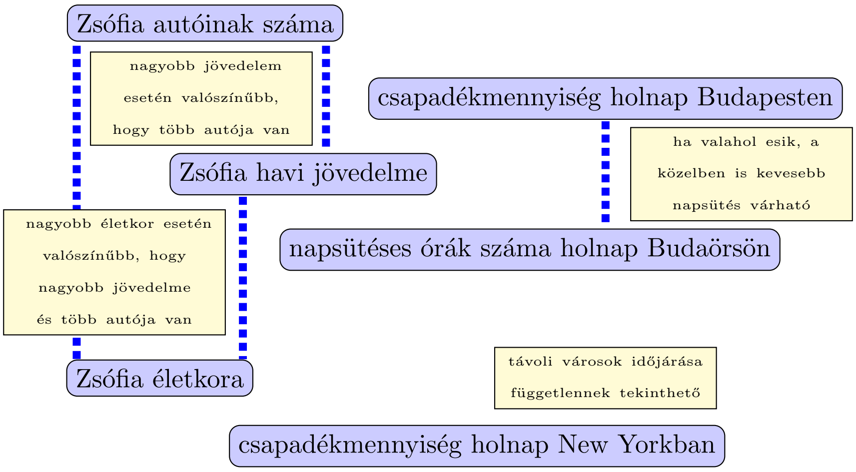
Ha például X a csapadékmennyiség holnap Budapesten (mm-ben), és Y New Yorkban, akkor például

$$\mathbf{A} : X \leq 5; \qquad \mathbf{B} : Y \leq 3$$

esetén ez a feltétel így írható:

$$\mathbb{P}(X \leq 5, Y \leq 3) = \mathbb{P}(X \leq 5) \cdot \mathbb{P}(Y \leq 3).$$

Azaz, feltételezve, hogy a két város időjárása egymástól független: annak valószínűsége, hogy **mindkét helyen legfeljebb 5 mm csapadék lesz**, a két esemény **valószínűségének szorzata**.



5. ábra. Példák függetlennek tekinthető (nem összekötött) és nem független (összekötött) valószínűségi változókra

2.1. Definíció (Valószínűségi változók függetlensége). *Valószínűségi változók függetlenségét az alábbi módon definiálhatjuk.*

- **két valószínűségi változóra**: *az $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változók* **függetlenek**, *ha*
$$\mathbb{P}(X \le t_1, Y \le t_2) = \mathbb{P}(X \le t_1) \cdot \mathbb{P}(Y \le t_2)$$
teljesül tetszőleges $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ valós számokra.
- **véges sok valószínűségi változóra**: *$X_1, \dots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változók* **függetlenek**, *ha*
$$\mathbb{P}(X_1 \le t_1, X_2 \le t_2, \dots, X_n \le t_n) = \mathbb{P}(X_1 \le t_1) \cdot \mathbb{P}(X_2 \le t_2) \dots \mathbb{P}(X_n \le t_n)$$
teljesül tetszőleges $t_1, t_2, \dots, t_n$ valós számokra.
- **megszámlálható sok valószínűségi változóra**: *az $X_1, X_2, X_3 \dots$ valószínűségi változók* **függetlenek**, *ha közülük bármely véges sokat kiválasztva független valószínűségi változókat kapunk.*

2.1. Függetlenség diszkrét esetben

Ha a valószínűségi változók **diszkrétek**, azaz lehetséges értékeik halmaza véges vagy megszámlálhatóan végtelen, akkor a függetlenséget az alábbi módon is ellenőrizhetjük.

Az X és Y **diszkrét** valószínűségi változók pontosan akkor **függetlenek**, ha

az X **minden lehetséges** x_k **értékére** és

az Y **minden lehetséges** y_l **értékére** teljesül, hogy

$$\mathbb{P}(X = x_k, Y = y_l) = \mathbb{P}(X = x_k) \cdot \mathbb{P}(Y = y_l) \qquad (k, l = 1, 2, \dots).$$

Vagyis: annak valószínűsége, hogy X **értéke** x_k **és** Y **értéke** y_l, ennek a két eseménynek **a valószínűségének a szorzata**.

Példa. Kétszer dobunk egy szabályos dobókockával. Igaz-e, hogy az **első dobott szám** és a **második dobott szám** értéke egymástól független?

Tipp. a második dobásnál az első dobás értéke „elfelejtődik”, nincs kapcsolat a két dobás között $\Rightarrow$ a két dobott szám **független.**

Indoklás. Legyen X az első dobás, Y a második. Legyen például $x_k = 3, y_l = 5$. Ekkor a feltétel teljesül:
$$\frac{1}{36} = \mathbb{P}(X = 3, Y = 5) = \mathbb{P}(X = 3) \cdot \mathbb{P}(Y = 5) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}.$$

Hasonlóképpen tetszőleges (x_k, y_l) lehetséges értékekre (azaz 1 és 6 közötti egészekre) igaz, hogy

$$\frac{1}{36} = \mathbb{P}(X = x_k, Y = y_l) = \mathbb{P}(X = x_k) \cdot \mathbb{P}(Y = y_l) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}.$$

Ezért valóban **a két dobás egymástól független**.

Példa. Kétszer dobunk egy szabályos dobókockával. Igaz-e, hogy a dobott számok **összege** és **szorzata** független egymástól?

Tipp: minél nagyobb az összeg, annál valószínűbb, hogy a szorzat értéke is inkább nagy lesz $\Rightarrow$ **nem függetlenek**.

Indoklás: legyen X az összeg, Y a szorzat. Ha például $X = 2$: ez csak úgy lehet, hogy mindkét dobás 1-es, vagyis ekkor Y értéke biztosan 1. Ezért ha például $x_1 = 2$ és $y_2 = 2$-t választunk, $X = 2$ és $Y = 2$ egyszerre nem következhetnek be, és így:

$$\begin{aligned} 0 = \mathbb{P}(X = 2, Y = 2) \neq \mathbb{P}(X = 2) \cdot \mathbb{P}(Y = 2) = \\ = \mathbb{P}(11) \cdot \mathbb{P}(12 \text{ vagy } 21) = \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{18} > 0. \end{aligned}$$

Vagyis az $x_1 = 2$ és $y_2 = 2$ párra nem teljesül az előírt feltétel, az **összeg és szorzat nem függetlenek**.

2.2. A várható érték és a szórás tulajdonságai

2.3. A várható érték tulajdonságai

A várható érték az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik.

- (összeg várható értéke) Ha X, Y valószínűségi változók, és $X, Y, X+Y$ várható értéke létezik, akkor
$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).$$
- (konstans kiemelése) Ha az X valószínűségi változó várható értéke létezik, és c tetszőleges valós szám, akkor
$$\mathbb{E}(c \cdot X) = c \cdot \mathbb{E}(X).$$
- (szorzat várható értéke független esetben) Ha az X és Y valószínűségi változók függetlenek, és $X, Y, X \cdot Y$ várható értéke létezik, akkor
$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y).$$
- (függvény várható értéke) Ha $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy $\mathbb{E}(X)$ létezik, akkor
$$\mathbb{E}\big(g(X)\big) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)\mathbb{P}(X = x_i),$$
ahol az X lehetséges értékei $x_1, x_2, \ldots$.

Ebből két állításnak a bizonyítását is megnézzük.

2.1. Állítás. *Ha X, Y valószínűségi változók, és $X, Y, X + Y$ várható értéke létezik, akkor*
$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).$$

Bizonyítás. Legyenek X lehetséges értékei $x_1, x_2, \ldots$, az Y lehetséges értékei $y_1, y_2, \ldots$. Ekkor az $X + Y$ lehetséges értékei $x_k + y_m$ alakúak, és

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X + Y) &= \sum_{k,m} (x_k + y_m)\mathbb{P}(X = x_k, Y = y_m) = \\ &= \sum_{k,m} x_k \mathbb{P}(X = x_k, Y = y_m) + \sum_{k,m} y_m \mathbb{P}(X = x_k, Y = y_m) = \\ &= \sum_{k} x_k \mathbb{P}(X = x_k) + \sum_{m} y_m \mathbb{P}(Y = y_m) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y), \end{aligned}$$

ahol azt használtuk, hogy az $\{X = x_k, Y = y_m\}$ események kizáróak, uniójuk $\{X = x_k\}$, és hasonlóképpen a másik tagban az Y esetén. □

Következmény: $\mathbb{E}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \ldots + \mathbb{E}(X_n)$.

2.2. Állítás. *Ha X, Y* **független** *valószínűségi változók, és X, Y várható értéke létezik, akkor*

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Bizonyítás. Legyenek X lehetséges értékei $x_1, x_2, \ldots$, az Y lehetséges értékei $y_1, y_2, \ldots$. Ekkor az $X + Y$ lehetséges értékei $x_k + y_m$ alakúak, és

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= \sum_{k,m} x_k \cdot y_m \mathbb{P}(X = x_k, Y = y_m) = \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{k,m} x_k y_m \mathbb{P}(X = x_k) \cdot \mathbb{P}(Y = y_m) \\ &= \left(\sum_k x_k \mathbb{P}(X = x_k)\right) \cdot \left(\sum_m y_m \mathbb{P}(Y = y_m)\right) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y),\end{aligned}$$

ahol a $(*)$ lépésben használtuk a függetlenségnek a diszkrét valószínűségi változókra vonatkozó alakját.

□

2.4. A szórásnégyzet tulajdonságai

A szórásnégyzet az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik.

- (nemnegativitás) $D^2(X) \geq 0$ és $D(X) \geq 0$ mindig teljesül
- (szorzás és eltolás) ha a, b valós számok, X véges szórású valószínűségi változó, akkor
$$D^2(aX + b) = a^2 D^2(X) \quad \Rightarrow \quad D(aX + b) = |a| D(X).$$
- (összeg szórása független esetben) ha az X, Y valószínűségi változók **függetlenek** és szórásuk létezik, akkor
$$D^2(X + Y) = D^2(X) + D^2(Y) \quad \Rightarrow \quad D(X + Y) = \sqrt{D^2(X) + D^2(Y)}.$$
- van olyan valószínűségi változó, melynek várható értéke véges, de a szórása nem létezik (például: $\mathbb{P}(X = k) = c/k^3$ megfelelő c-vel)

Példa. Legyen X olyan valószínűségi változó, melynek várható értéke 4, szórása 1, az Y valószínűségi változó várható értéke 6, szórása pedig 2. Tegyük fel továbbá, hogy X és Y **függetlenek**. Ekkor

- $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 10$;
- $\mathbb{E}(X - Y) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y) = -2$;
- $\mathbb{E}(2X + 3Y) = 2\mathbb{E}(X) + 3\mathbb{E}(Y) = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 = 26$;
- $\mathbb{E}(2X - 3Y) = 2\mathbb{E}(X) - 3\mathbb{E}(Y) = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 6 = -10$;
- $D(X + Y) = \sqrt{D^2(X) + D^2(Y)} = \sqrt{1 + 2^2} = \sqrt{5}$;
- $D(X - Y) = \sqrt{D^2(X) + (-1)^2 D^2(Y)} = \sqrt{1 + 2^2} = \sqrt{5}$;
- $D(2X + 3Y) = \sqrt{2^2 D^2(X) + 3^2 D^2(Y)} = \sqrt{4 \cdot 1 + 9 \cdot 4} = \sqrt{40}$;
- $D(2X - 3Y) = \sqrt{2^2 D^2(X) + (-3)^2 D^2(Y)} = \sqrt{4 \cdot 1 + 9 \cdot 4} = \sqrt{40}$.

2.5. A binomiális eloszlás várható értéke és szórása

2.3. Állítás. *Ha az X valószínűségi változó binomiális eloszlású n renddel és p paraméterrel, azaz*

$$\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \qquad (k=0,1,\ldots,n),$$

akkor

$$\mathbb{E}(X)=np; \qquad D(X)=\sqrt{np(1-p)}.$$

Példa. Egy kérdőív egy kérdésére $n=1000$ megkérdezett közül mindenki a többiektől függetlenül $p=0,65$ valószínűséggel válaszol. Ekkor a válaszadók számának (melyet jelöljünk X-szel) a várható értéke:

$$\mathbb{E}(X)=np=1000\cdot 0,65=650,$$

míg a szórása:

$$D(X)=\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{1000\cdot 0,65\cdot 0,35}=15,08.$$

Bizonyítás. Legyen X binomiális eloszlású n renddel és p paraméterrel. Azaz: n független kísérletet végzünk, mindegyik p valószínűséggel sikerül, X a sikeresek száma. Vezessük be az alábbi indikátorokat $j=1,2,\ldots,n$ esetén:

$$X_j=\begin{cases}1 & \text{ha a } j.\text{ kísérlet sikeres;}\\ 0 & \text{ha a } j.\text{ kísérlet nem sikeres.}\end{cases}$$

Ekkor X éppen az indikátorok összege (az egyesek száma):

$$X=X_1+X_2+\ldots+X_n=\sum_{j=1}^{n}X_j.$$

Mivel bármely j-re

$$\mathbb{E}(X_j)=1\cdot\mathbb{P}(X=1)+0\cdot\mathbb{P}(X=0)=p,$$

ezért

$$\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(X_1+X_2+\ldots+X_n)=\mathbb{E}(X_1)+\mathbb{E}(X_2)+\ldots+\mathbb{E}(X_n)=p+p+\ldots+p=np.$$

A szórás kiszámításához: $X_j=X_j^2$, hiszen $0^2=0$ és $1^2=1$, és már láttuk, hogy $\mathbb{E}(X_j)=p$. Ezért

$$D^2(X_j)=\mathbb{E}(X_j^2)-\mathbb{E}(X_j)^2=\mathbb{E}(X_j)-\mathbb{E}(X_j)^2=p-p^2=p(1-p),$$

Mivel az X_j indikátorok **függetlenek**, és az összegük X:

$$D(X)=\sqrt{D^2(X_1+X_2+\ldots+X_n)}=\sqrt{D^2(X_1)+D^2(X_2)+\ldots+D^2(X_n)}=$$
$$=\sqrt{p(1-p)+p(1-p)+\ldots+p(1-p)}=\sqrt{np(1-p)}.$$

□

A hipergeometrikus eloszlás várható értékére vonatkozó összefüggés szintén indikátorokkal igazolható.

Házi feladat október 15., péntek, 12:15-ig Tegyük fel, hogy egy biztosító ügyfelei által okozott balesetek száma tavasszal Poisson-eloszlású 250 várható értékkel, nyáron Poisson-eloszlású 300 várható értékkel, és a kettő egymástól független. Legyen X a nyáron, illetve tavasszal okozott balesetek számának különbsége (negatív is lehet). Határozzuk meg X szórását.