Valószínűségszámítás előadás, 2. hét, 2021. szeptember 17.

Kombinatorikai összefüggések, klasszikus valószínűségi mező, mintavételezés

1. Klasszikus valószínűségi mező

Ebben a részben a Kolmogorov-féle valószínűségi mező speciális eseteit vizsgáljuk, amikor az összes lehetőség száma véges, és esetleg további feltevéseink is vannak.

1.1. Emlékeztető

1.1. Definíció. *Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ hármas* **Kolmogorov-féle valószínűségi mező***, ha*

- *az Ω* **eseménytér** *egy nem üres halmaz;*
- *$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ (ahol $\mathcal{P}(\Omega)$ az Ω összes részhalmazának a halmaza), az* **az események halmaza***, azaz minden $A \in \mathcal{A}$-ra $A \subseteq \Omega$ úgy, hogy*
  - *(i) $\Omega \in \mathcal{A}$;*
  - *(ii) ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, akkor $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ (azaz megszámlálható sok $\mathcal{A}$-beli elem uniója is $\mathcal{A}$-beli);*
  - *(iii) ha $A \in \mathcal{A}$, akkor $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ (azaz $\mathcal{A}$-beli halmazok komplementere is $\mathcal{A}$-beli.*
- *a* **valószínűség** *egy $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$ függvény, melyre*
  - *(i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, azaz a biztos esemény valószínűsége 1;*
  - *(ii) ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ és minden $1 \leq i < j$-re $A_i \cap A_j = \emptyset$, akkor*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n),$$

azaz megszámlálható sok kizáró esemény uniójának valószínűsége a valószínűségek összege.

Elnevezések:

- *Ω:* **eseménytér** *vagy elemi események halmaza.*
- *Ω elemei ($\omega \in \Omega$):* **elemi események***.*
- *$\mathcal{A}$:* **események halmaza** *(vagy események σ-algebrája).*
- *$\mathcal{A}$ elemei ($A \in \mathcal{A}$):* **események***.*
- *$\mathbb{P}$:* **valószínűség** *(probability).*
- *Ω esemény neve: biztos esemény.*
- *$\emptyset$ (üres halmaz) esemény neve: lehetetlen esemény.*

1.2. Véges valószínűségi mező

A Kolmogorov-féle valószínűségi mezőben az összes lehetőség halmaza, vagyis az Ω eseménytér bármilyen nem üres halmaz lehetett, akár véges (például a kockadobásnál), akár végtelen számosságú (például Ω lehet egy intervallum). Amikor az első eset áll fent, a valószínűségi mező axiómáin (definiáló tulajdonságain) kívül további megállapításokat is tehetünk.

Tegyük fel tehát, hogy **véges sok lehetséges kimenetel van**, vagyis az Ω eseménytér egy véges halmaz. Ilyenkor az elemeit fel is sorolhatjuk: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, ahol n az Ω elemszáma, $\omega_1, \ldots, \omega_n$ pedig az elemi eseményeket jelölik.

Például: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, vagy Ω lehet a budapesti lakosok halmaza (ha egy véletlenszerűen választott budapesti lakossal kapcsolatban szeretnénk kérdéseket feltenni).

Tegyük fel továbbá, hogy **$\mathcal{A}$ az Ω összes részhalmazából áll**. Vagyis: általában a Kolmogorov-féle valószínűségi mezőnél csak azt tettük fel, hogy minden $A \in \mathcal{A}$ esemény az Ω-nak egy részhalmaza, de az nem volt feltétel, hogy minden részhalmaz esemény is legyen. A véges valószínűségi mező ennek speciális esete, ilyenkor tehát $\mathcal{A}$ az összes részhalmazból áll (ebből következik, hogy $\mathcal{A}$ elemszáma 2^n, hiszen ez az összes részhalmaz száma).

Legyen $p_j = \mathbb{P}(\omega_j)$ a j. kimenetel valószínűsége. Ekkor az additivitás, vagyis a valószínűség (ii) tulajdonsága miatt

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} \{\omega_j\}\right) = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = \sum_{j=1}^{n} p_j,$$

vagyis az elemi események valószínűségének összege 1. Továbbá ha $A \subseteq \Omega$ tetszőleges esemény (hiszen most minden részhalmaz esemény), akkor hasonlóképpen a (ii) tulajdonság szerint

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{j:\, \omega_j \in A} p_j\right) = \sum_{j:\, \omega_j \in A} p_j, \tag{1}$$

ami azt jelenti, hogy

véges valószínűségi mezőben minden esemény valószínűsége a benne lévő elemi események valószínűségének összege.

1.3. Klasszikus valószínűségi mező

A klasszikus valószínűségi mezőben a véges valószínűségi mezőhöz képest még további feltételezésekkel élünk. Ahogy látni fogjuk, ez fog megfelelni a kedvező esetek száma/összes esetek száma számítási módnak, ennek alkalmazásaihoz azonban fontos megfogalmazni, hogy mik is azok a feltételek, amik teljesülése esetén így számolhatunk.

1.2. Definíció. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *olyan valószínűségi mező, melyre*

- Ω *véges halmaz;*
- $\mathcal{A}$ *az* Ω *összes részhalmazából áll;*
- *továbbá* **minden elemi esemény egyformán valószínű**, *azaz*

$$\mathbb{P}(\omega_j) = p_j = \frac{1}{n} \qquad \textit{minden } j = 1, 2, \ldots, n\textit{-re.}$$

Ekkor $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$*-t* **klasszikus valószínűségi mezőnek** *nevezzük.*

1.1. Állítás. *Klasszikus valószínűségi mezőben tetszőleges* $A \in \mathcal{A}$ *eseményre*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{k}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n},$$

ahol k *az* A *elemeinek száma,* n *pedig az összes elemi esemény (lehetőség) száma, azaz* Ω *elemszáma.*

Bizonyítás. Mivel a klasszikus valószínűségi mező egyben véges valószínűségi mező is, teljesül az (1) egyenlet az A esemény valószínűségére. Mivel pedig most feltettük, hogy minden p_j értéke azonos, $1/n$, az állítás ebből rögtön következik.

Példa: két szabályos kockadobás

Két szabályos dobókockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7?

A dobókockák, emberek, tárgyak stb. mindig különbözőek.

- **eseménytér**: lehetséges dobássorozatok. Ezek száma:

$$6 \cdot 6 = 36; \text{mindkét dobás hatféle lehet.}$$

Klasszikus valószínűségi mezőt kapunk, hiszen Ω véges, minden részhalmazt tekinthetünk eseménynek, és minden dobássorozat egyformán valószínű a dobókocka szabályossága (a szimmetria) miatt.

- A dobássorozatok egyformán valószínűek: mindegyiknek $1/36$ a valószínűsége.

- A kedvező dobássorozatok száma: 6.

11	12	13	14	15	**16**
21	22	23	24	**25**	26
31	32	33	**34**	35	36
41	42	**43**	44	45	46
51	**52**	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

Tehát $\mathbb{P}(\text{az összeg } 7) = 6/36 = 1/6$.

2. Kombinatorikai összefüggések

Ahogy láttuk, klasszikus valószínűségi mezőben a valószínűség kiszámítása halmazok elemszámának számításával történhet. Ebben néhány kombinatorikai fogalom lehet a segítségünkre, ezeket foglaljuk most össze.

2.1. Leszámlálások és jelölések

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots 2 \cdot 1; \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k(k-1)\ldots 2 \cdot 1}.$$

- n tárgyat $n!$-féleképpen lehet sorrendbe tenni.

- n tárgy közül k darabot visszatevés nélkül $n(n-1)\ldots(n-k+1)$-féleképpen lehet húzni, ha figyelembe vesszük a sorrendet: az első n-féle, a második $n-1$-féle lehet (akármi volt az első), a harmadik $n-2$-féle lehet (akármi volt az első kettő), és így tovább

- n tárgy közül egy k darabból álló csoportot $\binom{n}{k}$-féleképpen lehet kiválasztani (itt a kiválasztás sorrendje nem számít)

- ha k egymás utáni kísérlet mindegyikénél n lehetőség van, akkor az összes lehetőség száma a sorrendet is figyelembe véve
$$n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^k.$$
Például egy kockadobás hatféle lehet, kettő 36-féle, három $6 \cdot 6 \cdot 6$-féle, n kockadobás 6^n-féle.

Az $\binom{n}{k}$ binomiális együtthatóknak akkor is szerepük van, ha összegek hatványait szeretnénk kiszámítani. Nézzük először, hogy hogyan számítható ki egy kéttagú összeg n. hatványa.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}; \quad \binom{n}{0} = 1; \binom{n}{1} = n; \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$
$$\binom{n}{N} = 0, \text{ ha } N > n.$$

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ általánosítása a **binomiális tétel**:

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{k}x^k y^{n-k} + \ldots + nxy^{n-1} + y^n.$$

Következmény $x = y = 1$-re:

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{k} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}.$$

Ezt úgy is láthatjuk, hogy a 2^n nem más, mint egy n elemű összes részhalmazainak száma, a jobb oldalon pedig összeadjuk a 0 elemű, 1 elemű, 2 elemű, stb. részhalmazok számát.

2.2. Multinomiális/polinomiális tétel

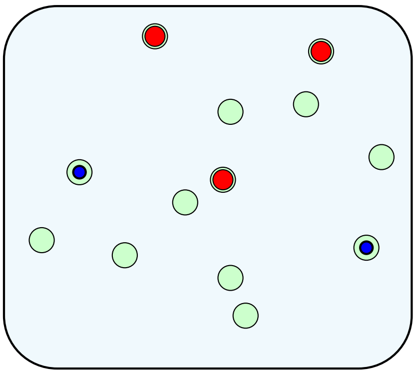
A binomiális tételnek arra az általánosítására is szükségünk lehet, amikor nem kéttagú, hanem k tagú összeget tekintünk:

- $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$
- $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
- általánosan:
$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n = \sum \frac{n!}{i_1! \cdot i_2! \cdot \ldots \cdot i_k!} \cdot x_1^{i_1} \cdot x_2^{i_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{i_k},$$
ahol összegzünk az összes olyan $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ pozitív egészekből álló sorozatra, melyre $i_1 + i_2 + \ldots + i_k = n$.

3. Visszatevés nélküli mintavétel

A visszatevés nélküli mintavétel tekinthető a klasszikus valószínűségi mező egy speciális esetének. Ahogy az elnevezés is mutatja, hasonló jellegű kérdések előfordulhatnak, ha egy nagyobb populációnak egy véletlenszerűen kiválasztott kisebb részét vizsgáljuk meg egy adott tulajdonság teljesülése szempontjából. A statisztikai kérdés majd az lesz, hogy hogyan tudunk visszakövetkeztetni a teljes populációban az adott tulajdonsággal rendelkezők számára a minta eredményéből, ehhez azonban először, példákon keresztül azt nézzük meg, hogy ha ismertek a populációt jellemző számok, akkor az egyes lehetőségek milyen valószínűséggel fordulnak elő a mintavételezés eredményeként.

Példa. Egy vízilabdacsapat **13 tagja** közül **három játékos** doppingol.
A doppingtesztre kiválasztanak **két különböző** játékost,
minden lehetséges párt azonos valószínűséggel választva.
Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott játékosok közül
egy sem doppingol?



Nézzük először az összes eset számát, ami nem más, mint az eseménytér mérete.

Hányféleképpen lehet **13 játékos** közül **két különbözőt** választani?

első második

$$\frac{13\cdot 12}{2} = \binom{13}{2} = 78$$

a sorrend nem számít

Hányféleképpen lehet **13-3=10 nem doppingoló játékos**
közül **két különbözőt** választani?

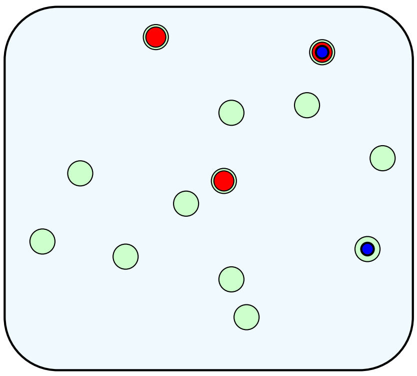
$$\frac{10\cdot 9}{2} = \binom{10}{2} = 45$$

Annak valószínűsége, hogy a **két játékos** **egyike sem** doppingol:

$$\begin{array}{r} \textbf{egyik sem doppingol} \longrightarrow \\ \text{összes eset} \qquad \longrightarrow \end{array} \frac{\binom{10}{2}}{\binom{13}{2}} = \frac{45}{78} = \mathbf{57,7}\%.$$

A következő kérdés pedig az lesz, hogy mekkora az az esemény, amikor egyik kiválasztott játékos sem doppingol. Hiszen feltételezve, hogy minden játékos-párt azonos valószínűséggel választunk, minden elemi esemény egyformán valószínű, és így az 1.1. állítás szerint a kérdéses esemény méretének és az eseménytér méretének hányadosa adja meg a valószínűséget.

Nézzük most annak valószínűségét, hogy **pontosan egy kiválasztott játékos doppingol**.



Hányféleképpen lehet **egy doppingoló** és **egy nem doppingoló** játékost választani?

$$3 \cdot 10 = 30,$$

Hiszen a doppingoló **háromféle**, a másik **tízféle** lehet, és ezek mind különböző esetek, bármelyik doppingoló bármelyik nem doppingolóval együtt választható.

Mivel most is a klasszikus valószínűségi mező szabályai szerint számolhatunk, annak valószínűsége, hogy a **két játékos** közül **pontosan egy** doppingol:

$$\frac{3\cdot 10}{\binom{13}{2}} = \frac{30}{78} = \mathbf{38,5}\%.$$

Ebből már következik, hogy annak valószínűsége, hogy **mindkét kiválasztott játékos doppingol**:

$$100 - 57,7 - 38,5 = 3,8\%.$$

Ugyanezt a számítást általánosabban is elvégezhetjük.

Egy vízilabdacsapat N **tagja** közül M **játékos** doppingol. A doppingtesztre kiválasztanak n **különböző** játékost, minden lehetséges csoportot azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott játékosok közül **pontosan** k doppingol?

Az előzőhöz hasonló számolással:

- Hányféleképpen lehet N **játékos** közül n **különbözőt** választani?

$$\frac{N\cdot(N-1)\cdot\ldots\cdot(N-n+1)}{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1}=\frac{N!}{n!(N-n)!}=\binom{N}{n}.$$

- Hányféleképpen lehet k **doppingoló** és $n-k$ **nem doppingoló** játékost választani, ha összesen M **doppingoló** és $N-M$ **nem doppingoló** játékos van?

$$\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k},$$

hiszen bármelyik csoport bármelyikkel párosítható és különböző esetet ad, ezért lehet szorozni.

- Mivel minden k nagyságú csoportot azonos valószínűséggel választottunk, a klasszikus valószínűségi mező modelljét használhatjuk, így az 1.1. állítás alapján

$$\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ játékos doppingol az } n \text{ közül})=\frac{\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Ugyanezt általánánosan is megfogalmazhatjuk.

3.1. Állítás. *Visszatevés nélküli mintavétel.*

Egy dobozban N golyó van, közülük M **fekete**, *a többi* **fehér**.

- **Visszatevés nélkül** *kihúznak n darabot (minden húzásnál minden, még a dobozban lévő golyót azonos valószínűséggel választva).*
- *Tegyük fel, hogy $n\le M$ és $n\le N-M$. Annak valószínűsége, hogy pontosan k darab fekete golyót húznak ki:*

$$\mathbb{P}(\textit{pontosan } k \textit{ fekete})=\frac{\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}\qquad(k=0,1,2,\ldots,n).$$

Bizonyítás. A bizonyítás ugyanaz, mint az előző példában. □

Megjegyzés: a kihúzott fekete golyók száma **hipergeometrikus eloszlású** N,M,n paraméterekkel, ez a lehetséges értékek halmazát és a hozzájuk tartozó valószínűségeket adja meg, éppen a fenti képlet szerint.

Mivel az $\binom{N}{n}$ lehetséges eset mindegyike egyformán valószínű, a **klasszikus valószínűségi mező** modelljét használtuk.

Példa. Egy osztályba **8 lány** és **25 fiú** jár. Egy felméréshez véletlenszerűen kiválasztanak egy **hatfős csapatot** úgy, hogy minden hatfős csoportot azonos valószínűséggel választanak. Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott csapatban **pontosan két lány** van?

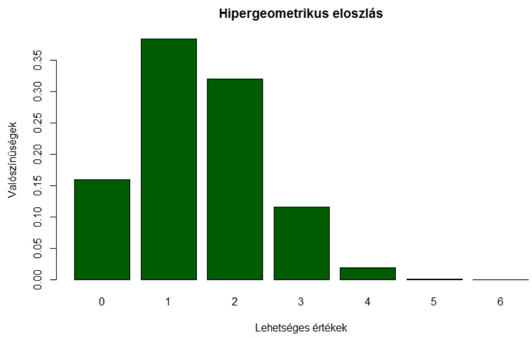
Az előző állítás alapján, $N=33, M=8, n=6$ és $k=2$ választással:

$$\mathbb{P}(\text{pontosan két lány})=\frac{\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}=\frac{\binom{8}{2}\cdot\binom{25}{4}}{\binom{33}{6}}=\mathbf{31,9}\%.$$

Általánosabban minden lehetséges értékre megadhatjuk, hogy mennyi valószínűséggel kerül pontosan annyi lány a kiválasztott csoportba:

$$\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ lány})=\frac{\binom{8}{k}\cdot\binom{25}{6-k}}{\binom{33}{6}},\qquad k=0,1,2,\ldots,6.$$

Az 1. ábrán a fent kiszámított valószínűségeket láthatjuk a lehetséges érték, vagyis k függvényében, így például azt is láthatjuk, hogy az 1 és a 2 a legvalószínűbb értékek.



1. ábra. A lány csapattagok számának eloszlása: lehetséges értékek és valószínűségek

4. Visszatevéses mintavétel

A visszatevés nélküli mintavételnél biztosak lehetünk abban, hogy csak különböző egyedeket választottunk ki a vizsgált populációból. Azonban az is előfordulhat, hogy erre nem figyelünk, minden választásnál elfelejtjük az előzőeket, és a teljes populációból választunk valakit azonos valószínűséggel. Ilyenkor a valószínűségeket is másképp számolhatjuk, ehhez vezet el a következő példa.

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van. Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik, minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét azonos valószínűséggel választva. Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt** **pontosan négyszer iszik kék bögréből?**

Az előző esethez hasonlóan először az összes eset számát vizsgáljuk meg. Az elemi események most azok, hogy melyik nap melyik bögréből iszik, például az egy elemi esemény, hogy az első három napon a második kék bögréből, a többi napon az első zöld bögréből iszik Péter (a bögrék különbözőek, még ha ránézésre egyformának is látszanak, mint tárgyak, különböznek egymástól). Kérdés, hogy hány ilyen elemi esemény van, azaz mennyi lesz Ω mérete.

- az első napon ötféle lehetőség van;
- a másodikon is, és bármelyik bögre bármelyikkel választható, lehet szorozni: az első két napon $5 \cdot 5 = 25$-féle lehetőség van
- a harmadik napon is öt lehetősége van, és bármelyik bögre bármelyikkel korábbi kettővel választható, lehet szorozni: az első három napon $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$-féle lehetőség van

5^7 egyformán valószínű lehetőség

az **összes lehetőség** száma:

$$5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \longrightarrow \boxed{5^7}$$

összesen 5^7 egyformán valószínű lehetőség van egy hét alatt

Ezután kérdés, hogy hogyan számoljuk meg azokat az elemi eseményeket, amikor pontosan négyszer fordul elő kék bögre.

jó lehetőség például, amikor első négy nap iszik kék bögréből:

$$3 \quad 3 \quad 3 \quad 3 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \longrightarrow \boxed{3^4 \cdot 2^3}$$

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 3^4 \cdot 2^3$ ilyen lehetőség van

bármelyik bögre bármelyikkel választható, lehet szorozni

Azonban ez nem az egyetlen jó sorrend. Egy másik jó sorrend, ha az $1., 3., 4., 6.$ napon iszik kék bögréből:

$$3 \quad 2 \quad 3 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \quad 2 \longrightarrow \boxed{3^4 \cdot 2^3}$$

$3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 3^4 \cdot 2^3$ ilyen lehetőség van

bármelyik bögre bármelyikkel választható, lehet szorozni

jó lehetőségek száma:

$$\boxed{\text{színezések száma}} \times \boxed{\text{lehetőségek száma adott színezésnél}}$$

$$\boxed{\binom{7}{4}} \times \boxed{3^4 \cdot 2^3} = 35 \cdot 3^4 \cdot 2^3$$

ennyiféleképpen választhatjuk ki a négy kék napot a hétből

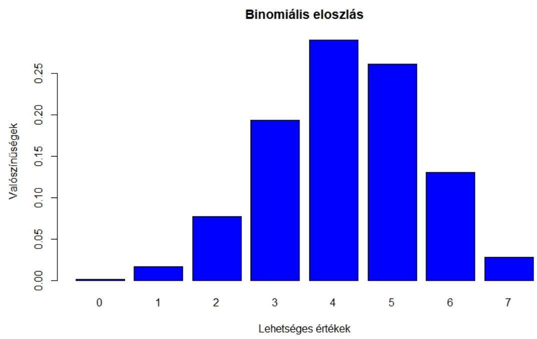
minden színezéshez ugyanannyi lehetőség tartozik

$$\boxed{\mathbb{P}(\text{pontosan négyszer iszik kék bögréből}) = \frac{\binom{7}{4} \cdot 3^4 \cdot 2^3}{5^7},}$$

azaz $\frac{35 \cdot 81 \cdot 8}{78125} = \mathbf{29,03}\%$.

Hasonló számolással juthatunk az alábbi összefüggéshez, a 2. ábrán pedig a valószínűségeket láthatjuk a kék bögrék számának függvényében:

$$\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ kék}) = \frac{\binom{7}{k} \cdot 3^k \cdot 2^{7-k}}{5^7}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, 7.$$



2. ábra. A kék bögrés napok száma: lehetséges értékek és valószínűségek

További általánosítással pedig az alábbi állításhoz juthatunk.

4.1. Állítás (Visszatevéses mintavétel). *Egy dobozban N golyó van, közülük M fekete, a többi fehér.* **Visszatevéssel** *kihúznak n darabot, minden húzásnál a korábbiakat elfelejtve mind az N golyót azonos valószínűséggel választva. Annak valószínűsége, hogy az n húzás közül pontosan k-nál jön fekete:*

$$\mathbb{P}(\textit{pontosan } k \textit{ fekete}) = \binom{n}{k} \frac{M^k \cdot (N-M)^{n-k}}{N^n} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Bizonyítás. $\binom{n}{k}$-féleképpen választhatjuk ki azt, hogy melyik k húzás legyen fekete. Bárhogyan is választottuk ki ezeket a helyeket, azt, hogy a k húzás során melyiknél melyik fekete golyót húztuk, M^k-féleképpen mondhatjuk meg, hasonlóképpen, azt, hogy a többi $n-k$ húzás során melyiknél melyik fehér golyót húztuk, $(N-M)^{n-k}$-féleképpen, és ezek a választások bárhogyan összeilleszthetők, ezért az összes jó eset száma ezek szorzata lesz. A valószínűségi mezőben egy elemi esemény az egész sorozat, vagyis hogy melyik húzásnál melyik golyót húztuk, ennek elemszáma N^n. A feltételünk (vagyis a szimmetria) szerint ezek az elemi események egyformán valószínűek, így az 1.1. állítás alapján kapjuk a végeredményt. ☐

Megjegyzés: a kihúzott fekete golyók száma **binomiális eloszlású**. Továbbá, ha a populáció mérete, N nagy a húzások számához, vagyis n-hez képest, akkor, bár a képletek különbözők, a valószínűségek értékei közel vannak egymáshoz, nincs nagy jelentősége, hogy visszatevéses vagy visszatevés nélküli mintavételt használunk.

Ha arra vagyunk kíváncsiak, hogy mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb K fekete golyót húzunk, akkor a fenti értékeket összeadhatjuk $k = 1, 2, \ldots, K$-ra.

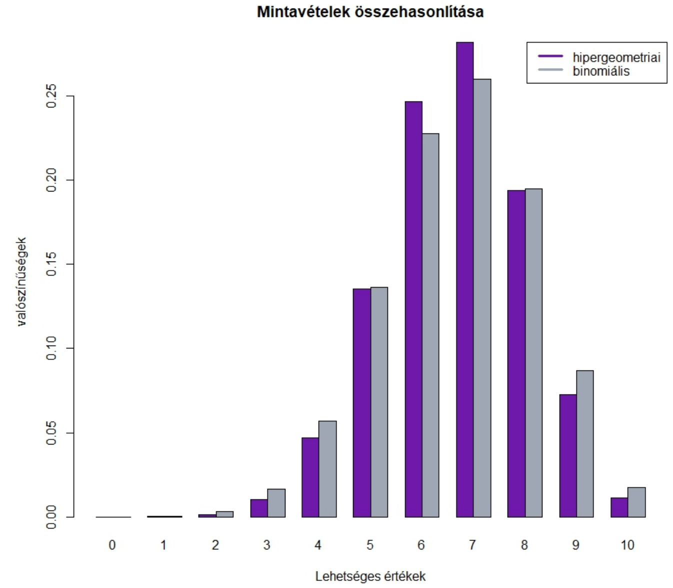
Példa. Egy osztályba **14 lány** és **22 fiú** jár. A tanár minden fizikaórán kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal a korábbiakat elfelejtve, és mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet).

Mennyi a valószínűsége, hogy **hat egymást követő órán** **pontosan két lány** felel?

Ez beleillik a visszatevés nélküli mintavétel keretébe, és $N = 36$ a diákok száma, $M = 14$ a lányok száma, $n = 6$ a minta nagysága, $k = 2$ a kérdés, így az előző állítás alapján

$$\mathbb{P}(\text{pontosan két lány}) = \binom{n}{k} \frac{M^k \cdot (N-M)^{n-k}}{N^n} = \binom{6}{2} \frac{14^2 \cdot 22^4}{36^6} = \mathbf{31{,}6}\%.$$

A 3. ábrán $N = 60$ összes golyó, $M = 40$ fekete golyó és $n = 10$ kihúzott golyó esetén látjuk annak valószínűségét, hogy pontosan k feketét húzunk, k függvényében. Mindkét esetben a 7 legnagyobb érték,



3. ábra. Visszatevés nélküli mintavétel (hipergeometriai eloszlás) és visszatevéses mintavétel (binomiális eloszlás) összehasonlítása $N = 60, M = 40, n = 10$ esetén

de nem pontosan egyeznek meg a valószínűségek. Ha N-t növelnénk úgy, hogy n nem növekszik, akkor még jobban hasonlítanának a valószínűségek.

Házi feladat szeptember 24., 12:15-ig Egy telefonos ügyfélszolgálatnál 10 alkalmazott dolgozik. Minden befutó hívás (a korábbi hívásoktól függetlenül) véletlenszerűen kerül az egyik alkalmazott valamelyikéhez, mindegyikükhöz azonos valószínűséggel. Az alkalmazottak (leegyszerűsítve) udvariasak vagy udvariatlanok. Legalább hány udvarias alkalmazottnak kell lennie a tíz között, ha az üzemeltető azt szeretné, hogy egy háromszor telefonáló ügyfél legalább $0,8$ valószínűséggel legalább kétszer udvarias alkalmazottal beszéljen?

Házi feladat szeptember 17., 12:00-ig Egy országban a felnőttek 20%-ának van saját lakása, 50%-ának saját autója, 15%-ának mind a kettő. Megkérdezünk

a) egy felnőttet (mindenkit azonos valószínűséggel választva);

b) két felnőttet úgy, hogy az első választást elfelejtjük, tehát akár ugyanazt az embert is kérdezhetjük kétszer (azaz visszatevéses mintavételt alkalmazunk).

Mindkét esetben adjuk meg az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ hármasból Ω-t, $\mathcal{A}$-t, azaz az események halmazát, és a b) esetben számítsuk ki annak valószínűségét, hogy a két megkérdezett közül legalább az egyiknek van saját lakása, és mindkettőjüknek van saját autója.