

Valószínűségszámítás előadás, 13. hét, 2021. december 10.  
Feltételes eloszlás, sűrűségfüggvény, várható érték

## 1. Feltételes eloszlás

**1.1. Definíció.** Legyen  $X$  diszkrét valószínűségi változó, lehetséges értékei  $x_1, x_2, \dots$ , a hozzájuk tartozó valószínűségek:  $\mathbb{P}(X = x_k) = p_k$ . Legyen  $A$  pozitív valószínűségű esemény. Ekkor az  $X$ -nek az  $A$  eseményre vonatkozó feltételes eloszlása:

$$q_k = \mathbb{P}(X = x_k | A) = \frac{\mathbb{P}(\{X = x_k\} \cap A)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Ekkor

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbb{P}(\{X = x_k\} \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = 1,$$

azaz a  $(q_k)$  sorozat is valószínűségeloszlás.

Másrészt az  $\{X = x_k\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  események teljes eseményrendszert alkotnak.

Ez alapján az  $X$ -nek az  $A$  eseményre vonatkozó feltételes várható értékét is kiszámíthatjuk:

$$\mathbb{E}(X|A) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q_k = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}(X = x_k | A).$$

**Példa.** Kétszer dobunk szabályos kockával. Legyen  $X$  az első dobás,  $Y$  pedig a dobott számok közül a nagyobb. Ekkor az  $(X, Y)$  valószínűségi vektorváltozó együttes eloszlása:

$X/Y$	1	2	<b>3</b>	4	5	6	összesen
1	1/36	1/36	<b>1/36</b>	1/36	1/36	1/36	1/6
2	0	1/18	<b>1/36</b>	1/36	1/36	1/36	1/6
3	0	0	<b>1/12</b>	1/36	1/36	1/36	1/6
4	0	0	0	1/9	1/36	1/36	1/6
5	0	0	0	0	5/36	1/36	1/6
6	0	0	0	0	0	1/6	1/6
összesen	1/36	1/12	5/36	7/36	1/4	11/36	1

Legyen  $A = \{Y = 3\}$  a feltétel.

Ekkor  $X$  feltételes eloszlása:

$$q_1 = \mathbb{P}(X = 1 | Y = 3) = \frac{1/36}{5/36} = \frac{1}{5} = q_2; \quad q_3 = \frac{1/12}{5/36} = \frac{3}{5}.$$

Ez tehát az első dobás feltételes eloszlása arra az eseményre nézve, hogy a két dobás maximuma 3.

Továbbá  $X$  feltételes várható értéke:

$$\mathbb{E}(X | Y = 3) = \sum_{k=1}^3 \mathbb{P}(X = k | Y = 3) \cdot k = \frac{1}{5} \cdot 1 + \frac{1}{5} \cdot 2 + \frac{3}{5} \cdot 3 = \frac{12}{5} = 2,4.$$

Ez tehát az első dobás feltételes eloszlása arra az eseményre nézve, hogy a két dobás maximuma 3.

Ez azt is jelenti, hogy ha a tévedésünk négyzetes hibájának várható értékét szeretnénk minimalizálni, akkor az  $\{Y = 3\}$  feltétel esetén 2,4 a legjobb „előrejelzés”. Ugyanis az alábbi állítás érvényes.

**1.1. Állítás.** (i) Az a  $c$  szám, melyre  $\mathbb{E}((X - c)^2)$  a lehető legkisebb, éppen  $c = \mathbb{E}(X)$ .

(ii) Az a  $c$  szám, melyre  $\mathbb{E}((X - c)^2 | A)$  a lehető legkisebb, éppen  $c = \mathbb{E}(X | A)$ .

A fenti példában a 3-nak nincs kitüntetett szerepe, írhatnánk más számot is. Például:

$$\mathbb{E}(X|Y = 2) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{5}{3} = 1,67.$$

Általában pedig így fogalmazhatjuk meg a kérdést: az  $Y$  valószínűségi változó ismeretében mi az az érték, mely a legjobb előrejelzést adja a négyzetes várható érték értelemben? Pontosabban fogalmazva: ha az  $Y$  valószínűségi változót ismerjük, akkor ez alapján olyan előrejelzést készíthetünk, mely  $Y$ -nak függvénye, valamilyen  $h(Y)$  függvény. Az ilyen alakú függvények közül pedig azt választjuk, melyre a négyzetes hiba várható értéke a lehető legkisebb.

**1.2. Definíció.** Az  $X$  valószínűségi változó feltételes várható értéke  $Y$ -ra nézve az a  $h(Y)$  függvény, melyre

$$\mathbb{E}((X - h(Y))^2)$$

a lehető legkisebb (az összes „megfelelő”  $h$  függvény között). Jelölése:  $\mathbb{E}(X|Y)$ .

Az így definiált fogalom szoros kapcsolatban van a fenti feltételes várható értékekkel. Nevezetesen, diszkrét valószínűségi változók esetén  $\mathbb{E}(X|Y)$  egy  $h(Y)$  alakú függvény. Ekkor, ha  $k$  rögzített, akkor

$$\mathbb{E}(X|Y = k) = h(k)$$

teljesül.

## 2. Feltételes sűrűségfüggvény és várható érték

Az 1.2. definícióban nem használtuk, hogy  $X$  és  $Y$  diszkrét valószínűségi változók lennének (bár a példában azok voltak). Kérdés, hogy az így értelmezett feltételes várható értéket hogyan tudjuk kiszámítani, ha ismerjük  $X$  és  $Y$  együttes sűrűségfüggvényét.

Emlékeztetőül: legyen az  $(X, Y)$  abszolút folytonos valószínűségi vektorváltozó együttes sűrűségfüggvénye a  $f$ . Ekkor az igaz megfelelő  $H \subseteq \mathbb{R}^2$  halmazokra, hogy

$$\mathbb{P}((X, Y) \in H) = \int_H f(x, y) dx dy.$$

Az  $X$ , illetve  $Y$  sűrűségfüggvénye:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy; \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx.$$

**2.1. Definíció.** Az  $X$  valószínűségi változónak az  $Y = y$  feltételre vonatkozó **feltételes sűrűségfüggvénye** adott  $y$  valós számra:

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}.$$

**2.2. Definíció.** Legyen  $(X, Y)$  abszolút folytonos valószínűségi vektorváltozó, melynek együttes sűrűségfüggvénye  $f$ . Ekkor a  $g(X)$  valószínűségi változó **feltételes várható értéke** az  $Y = y$  feltétel mellett:

$$\mathbb{E}(g(X)|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X|Y=y}(x) dx.$$

Speciálisan: Az  $X$  valószínűségi változó feltételes várható értéke az  $Y = y$  feltétel mellett:

$$\mathbb{E}(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|Y=y}(x) dx.$$

Az így definiált feltételes várható érték kapcsolata az 1.2. definícióval az alábbi:  $\mathbb{E}(X|Y = y)$  valójában egy  $h(y)$  alakú függvény. Ekkor

$$\mathbb{E}(X|Y) = h(Y),$$

vagyis a feltételes sűrűségfüggvény segítségével kiszámíthatjuk a tévedés négyzetes várható értéke szempontjából legjobb előrejelzést.

**Példa.** Legyenek  $X$  és  $Z$  független standard normális eloszlású valószínűségi változók. Ekkor az  $(X, X + Z)$  együttes sűrűségfüggvénye (ezt nem bizonyítjuk):

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{2x^2 - 2xy + y^2}{2}\right).$$

Az  $X + Z$  valószínűségi változó normális eloszlású  $m = 0$  várható értékkel és  $\sigma = 2$  szórásnégyzettel, így

$$f_{X+Z}(y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{4}\right).$$

Mennyi lehet az  $\mathbb{E}(X|X + Z = y)$  feltételes várható érték?

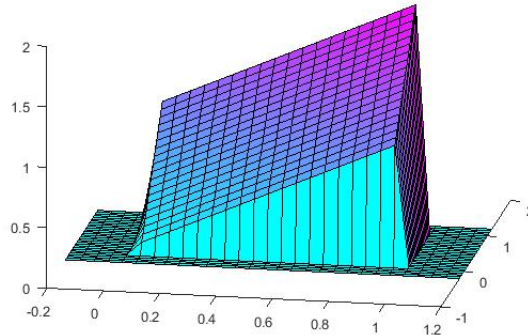
$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X|X + Z = y) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{f(x, y)}{f_{X+Z}(y)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} x \exp\left(-\frac{2x^2 - 2xy + y^2/2}{2}\right) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{(x - y/2)^2}{2 \cdot 1/2}\right) dx = \frac{y}{2}, \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy éppen az  $y/2$  várható értékű,  $1/\sqrt{2}$  szórásu normális eloszlás sűrűségfüggvénye jelent meg  $x$ -szel szorozva és integrálva. Ez éppen ennek a normális eloszlásnak a várható értéke, azaz  $y/2$ .

Ebből következik, hogy

$$\mathbb{E}(X|X + Z) = \frac{X + Z}{2}.$$

Ez tehát azt jelenti, hogy  $h(y) = y/2$  lesz az a függvény (a „megfelelő” függvények között), melyre a  $\mathbb{E}((X - h(X + Z))^2)$  várható érték a legkisebb.



1. ábra. A  $[0, 1] \times [0, 1]$  négyzeten  $x + y$  alakú együttes sűrűségfüggvény

**Példa.** Tegyük fel, hogy  $(X, Y)$  együttes sűrűségfüggvénye az alábbi függvény:

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1 \text{ és } 0 \leq y \leq 1; \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Számítsuk ki  $X$ -nek  $Y$ -ra vonatkozó feltételes várható értékét.

Ehhez először számítsuk ki a feltételes sűrűségfüggvényt.

Az  $Y$  sűrűségfüggvénye:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \int_0^1 x + y dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^1 + y = y + \frac{1}{2},$$

ha  $0 \leq y \leq 1$ . Különben azonosan nullát integrálunk, a sűrűségfüggvény is 0.

Ezért

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X|Y = y) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} dx = \int_0^1 x \cdot \frac{x + y}{\frac{1}{2} + y} dx = \frac{1}{\frac{1}{2} + y} \int_0^1 x^2 + xy dx = \frac{1}{\frac{1}{2} + y} \left[ \frac{x^3}{3} + \frac{x^2 y}{2} \right]_{x=0}^1 = \\ &= \frac{1/3 + y/2}{1/2 + y} = \frac{2 + 3y}{3(1 + 2y)} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}(X|Y) = \frac{2 + 3Y}{3(1 + 2Y)}.\end{aligned}$$

Ez tehát azt jelenti, hogy  $h(y) = \frac{2+3y}{3(1+2y)}$  az a függvény, melyre  $\mathbb{E}((X - h(Y))^2)$  a lehető legkisebb, ez lesz  $X$  legjobb előrejelzése ebben az értelemben.

Megjegyzés. Általában igaz, hogy a  $\mathbb{E}(X|Y)$  valószínűségi változó várható értéke  $\mathbb{E}(X)$ .

---