Valószínűségszámítás előadás, 1. hét, 2021. szeptember 10.

Bevezetés, valószínűségi mező

1. Bevezetés

1.1. A valószínűségszámítás kurzus céljai

- **a statisztika megalapozása**: a véletlen mintavételből származó adatok elemzésére alkalmazott módszerekhez szükséges alapfogalmak megismerése (például: z-próbához szükséges a normális eloszlás, diszkrét eloszlások modellezéshez, illesztéshez a Poisson-eloszlás)
- a valószínűségszámítás alapjainak, szemléletének bemutatása: **események, véletlen mennyiségek (valószínűségi változók), várható érték, szórás, korreláció és a kapcsolódó fogalmak**
- feladatmegoldási készség fejlesztése (gyakorlaton)

1.2. Ajánlott irodalom

- Denkinger: Valószínűségszámítás
- Prékopa: Valószínűségelmélet
- Ross: A first course in probability
- Solt: Valószínűségszámítás
- Arató Miklós, Prokaj Vilmos és Zempléni András: Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba: példákkal, szimulációkkal `http://elte.prompt.hu/sites/default/files/tananyagok/\valszam/zempleni.pdf`
- Bognárné, Mogyoródi, Prékopa, Rényi, Szász: Valószínűségszámítási feladatgyűjtemény
- Fazekas: Valószínűségszámítás és statisztika jegyzet `https://gyires.inf.unideb.hu/KMITT/b21/valseg.pdf`

1.3. A valószínűségszámítás és statisztika céljai

- felmérésekből, kísérletekből származó adatok elemzése
- ismeretlen mennyiségek becslése a mérések alapján
- hipotézisek ellenőrzése vagy cáfolata
- véletlen folyamatok modellezése
- múltbeli adatok alapján a jövőbeli folyamatok előrejelzése
- részben: nagyméretű adathalmazok feldolgozása, elemzése

Alkalmazási területek:

- statisztika a társadalomtudományokban: felmérések értékelése, elemzése
- statisztika a természettudományokban: mérések, kísérleti eredmények értelmezése
- előrejelzés: társadalmi, gazdasági, pénzügyi, természeti folyamatok (például: hogyan alakul a népesség, a gdp, a tőzsdeindex, milyen lesz az időjárás)
- biztosításmatematika (hogyan határozzuk meg a díjat, mennyit tartalékoljunk stb.)
- mesterséges intelligencia, gépi tanulás bizonyos módszerei

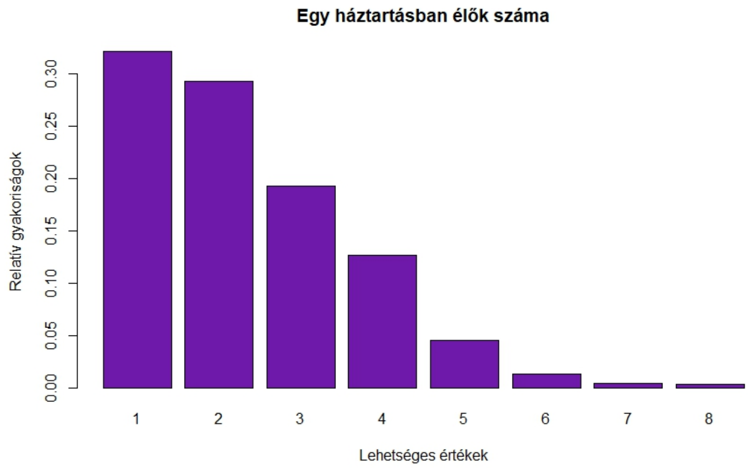
1.4. A valószínűségszámítási modellek szerepe

A valószínűségszámítás a matematika egy területe, így „szigorú" logikai, matematikai (axiomatikus) megalapozása van. Ez viszonylag késői, az első pontosan megfogalmazott leírás 1933-ból, Kolmogorovtól származik.

A matematikai felépítés azonban nem azt jelenti, hogy minden „hétköznapi" kérdésre egyértelmű választ kaphatunk. Ugyanis **ugyanazt a kérdést többféle matematikai modellel is megfogalmazhatjuk, és az események valószínűsége a modelltől függ**. Nézzünk erre két példát.

Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott magyar háztartásban négyen élnek?

Ehhez az alábbi adatokat hívhatjuk segítségül.



1. ábra. Egy háztartásban élők számának hisztogramja (forrás: KSH népszámlálás, 2011, $n = 4105698$)

Az ábra szerint a négyfős háztartások relatív gyakorisága 12%, így ez alapján azt mondhatjuk, hogy a kérdésre a válasz 12% – akkor, ha a „véletlenszerűen" azt jelenti, hogy minden háztartást azonos valószínűséggel választunk ki. Azonban a „véletlenszerűen" sok mást is jelenthet. Ha például közvéleménykutatást végzünk, és vezetékes telefonon keresünk embereket, akkor sok háztartást nem is találunk meg, másokat könnyebben, vagyis nem igaz, hogy minden háztartás azonos valószínűséggel kerül a felmérésünkbe. Ha interneten próbálkozunk, akkor megint csak sok háztartást nem találunk meg. Ha az, hogy négyen élnek egy háztartásban, nem független attól, hogy van-e vezetékes telefon vagy internet, akkor pedig a négyfős háztartások általunk kapott aránya különbözhet is az igazitól (ezt nevezhetjük mintavételi torzításnak). Persze a módszerek kombinációjával és súlyozással jó eredményt is elérhetünk, ami viszont a valószínűségszámítási modellek szempontjából fontos: a fenti kérdésre lehet, hogy egész más a válasz, ha a „véletlenszerűen" egyenletest választást jelent, vagy ha mondjuk egy telefonos közvéleménykutatás szerinti véletlen választást. Ezért más matematikai modell tartozik ehhez a két különböző esethez, különböző modellekben pedig az események valószínűsége is eltérő lesz.

Egy másik hasonló példa: **mennyi a valószínűsége, hogy holnap Budapesten lesz csapadék?** Itt már a kérdésnek is nehezebb értelmet adni, de ha a mérési eredmények, meteorológiai modellek, korábbi tapasztalatok segítségével felépítünk egy matematikai modellt a jelenlegi időjárási helyzetről, abban a modellben már lesz értelme a kérdésnek is. Csakhogy a válasz különböző modellekben különböző, és nem biztos, hogy van egyértelmű legjobb modell.

Mindezek alapján a valós alkalmazásunknál a célunk az lehet, hogy minél jobb valószínűségi modellt illesszünk megfigyelt adatokra statisztikai módszerek segítségével segítségével (a „jobb" több szempontból állhat össze: jól illeszkedik a megfigyelt adatokra, egyszerű, interpretálható, de más szempontok is lehetségesek), és ebben a modellben számítsuk ki a kérdéses valószínűséget. Mind a modell illesztéséhez, mind az azon belüli számításokhoz tehát először azt kell megértenünk, hogy egy-egy adott valószínűségi modell hogyan viselkedik – ebbe a keretbe illeszkedik majd a nevezetes valószínűségi változókkal, várható értékkel, szórással kapcsolatos számítások közül majdnem mindegyik.

1.5. A valószínűségszámítás történetéről röviden

- **osztozkodási probléma**, 1494: egy félbehagyott játékban az aktuális állás alapján hogyan osszák el a tétet (megoldás: Pascal, 1656)
- Cardano könyve a kockajátékokról, 1564 (amit 1663-ban adtak ki)
- életjáradék-számítás, de Witt, Haley, 1671
- nagy számok törvénye, Jacob Bernoulli, 1713
- XIX. század első fele: de Moivre, Bayes, Gauss, Poisson, Buffon
- XIX. század vége: Csebisev, Markov, Ljapunov
- **axiomatikus felépítés**: Kolmogorov, 1933

XX. századi alkalmazások és kezdetük

- sztochasztikus folyamatok (Wiener, 1923)
- matematikai statisztika (Fisher, 1925)
- játékelmélet (Neumann, 1928)
- információelmélet (Shannon, 1948)
- idősorok
- pénzügyi folyamatok (Black–Scholes, 1973)
- hierarchikus tanulási algoritmusok $\rightarrow$ mesterséges intelligencia
- nagyméretű adathalmazok elemzése

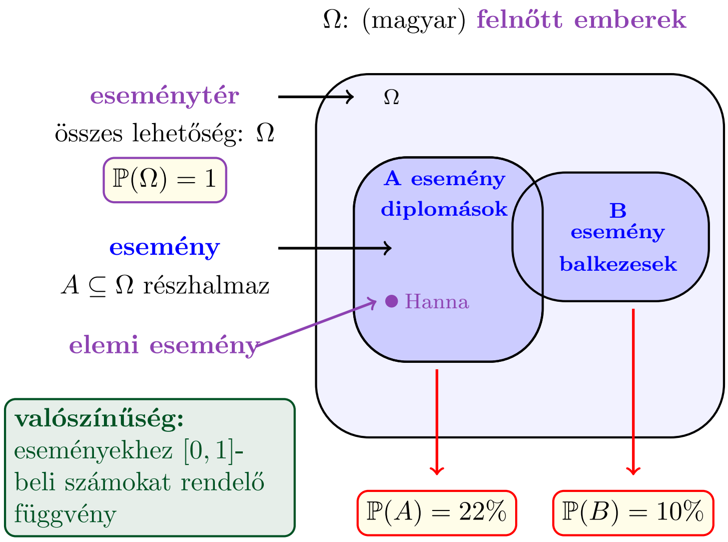
2. A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Első célunk a valószínűségszámítás általános matematikai modelljének felépítése – ennek segítségével tudunk tehát majd adott modelleken belül valószínűségeket számolni, illetve valós helyzetekben a legjobb modellt kiválasztani. Az első kérdés az, hogy egyáltalán mit jelentsen a valószínűség. Néhány példa olyan eseményre, aminek a valószínűségét szeretnénk értelmezni (ha sikerült megfelelő modellt választani):

holnap Budapesten esik az eső	$\longrightarrow$	15%
egy véletlenül választott ember balkezes	$\longrightarrow$	10%
egy véletlenül választott felnőtt diplomás	$\longrightarrow$	22%
júliusban csökken az infláció	$\longrightarrow$	44%
A esemény	$\longrightarrow$	$\boxed{\mathbb{P}(A)}$

2. ábra. Néhány esemény és a valószínűségük (megfelelő feltételek mellett)

Ez alapján arra gondolhatunk, hogy a valószínűség egy függvény lesz, ami eseményekhez 0 és 1 közötti számokat rendel (a határokat is beleértve, 0 és 1 is lehetséges). De mi lehet esemény? A második és a harmadik példában láthatjuk, hogy az esemény könnyen megfeleltethető egy halmaznak: az, hogy egy véletlenszerűen választott ember balkezes, megfeleltethető a balkezes emberek halmazának, az, hogy egy véletlenül választott felnőtt diplomás, valamilyen módon megfelel a diplomás emberek halmazának. Ezt mutatja a 3. ábra is, ami már a Kolmogorov-féle valószínűségi modellnek felel meg.



3. ábra. Kolmogorov-féle valószínűségi mező, ami azt reprezentálja, hogy egy véletlenszerűen választott felnőtt ember mennyi valószínűséggel diplomás, illetve balkezes

2.1. Eseménytér

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező az alábbi módon épül fel, megadva az összes lehetőség halmazát, az eseményeket, amiknek a valószínűségét ki szeretnénk számolni, és magukat a valószínűségeket:

- **eseménytér**: az összes lehetőség halmaza, Ω (például a magyar felnőttek)
- **elemi esemény:** a kísérlet egy lehetséges kimenetele, Ω egy eleme (például Hanna vagy Gábor)
- **esemény**: az eseménytér egy részhalmaza, $A \subseteq \Omega$
  például: diplomások (A) vagy a balkezesek (B)
- **valószínűség**: eseményekhez $[0, 1]$-beli számokat rendelő függvény (például: $\mathbb{P}(A) = 22\%$)

További példák:

- eseménytér: magyar férfiak; esemény: 50 évesnél idősebbek
- két érmedobásnál az eseménytér $\{FF, FI, IF, II\}$, esemény: különbözőt dobtunk, azaz $\{FI, IF\}$
- véletlen pont a $[10, 12]$ intervallumból, esemény: a pont 11 és $11,5$ közé esik
- egy érmével addig dobunk, amíg fejet nem kapunk, ekkor az eseménytér:
  $\{F, IF, IIF, IIIF, \ldots,\ \text{minden dobás írás}\}$

2.2. A valószínűség alaptulajdonságai

Az eseményekhez tehát hozzárendelhetjük a valószínűségeket, de nem tetszőlegesen, ennek a függvénynek bizonyos szabályoknak meg kell felelnie. Mielőtt ezeket pontosan megfogalmaznánk, nézzünk néhány példát arra, hogy milyen tulajdonságokat „várunk el” a valószínűségtől.

Ennek megfogalmazásához néhány elnevezésre is szükségünk lesz.

- $A \in \mathcal{A}$ és $B \in \mathcal{A}$ események **uniója**, azaz $A \cup B$, az az esemény, hogy legalább az egyik bekövetkezik. Vagyis $A \cup B$ azokból az elemi eseményekből áll, melyek A és B közül legalább az egyiknek elemei.
- $A \in \mathcal{A}$ és $B \in \mathcal{A}$ események **metszete**, azaz $A \cap B$, az az esemény, hogy mindkét esemény bekövetkezik. Vagyis $A \cap B$ azokból az elemi eseményekből áll, melyek A és B közül mindkettőnek az egyiknek elemei.

- $A \in \mathcal{A}$ és $B \in \mathcal{A}$ **kizáró események**, ha $A \cap B = \emptyset$, azaz **egyszerre nem következhetnek be**, nincs olyan elemi esemény, ami mindkettőnek eleme.
- Ω-t, mint eseményt, biztos eseménynek nevezzük. Az üres halmaz, $\emptyset$, a lehetetlen esemény.
- Egy $A \in \mathcal{A}$ esemény **komplementere**, azaz $\overline{A} = \Omega \setminus A$ az az esemény, hogy A nem következik be. Elemei azok az elemi események, amelyeket A nem tartalmaz.

1) Egy esemény valószínűsége mindig 0 és 1 közé esik:

$$\boxed{0 \le \mathbb{P}(A) \le 1}$$

A lehetetlen esemény valószínűsége 0, a biztos esemény valószínűsége 1, ezek tehát elő is fordulhatnak.

2) Egy találkozóra öt embert hívtak. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább négyen eljönnek? Ez sok mindentől függhet, de az alábbi minden esetben érvényes, hiszen a megfelelő eseteket két olyan részre bontottuk, hogy minden lehetőség pontosan egy helyre került:

mindenki eljön + egy ember hiányzik

$\mathbb{P}(\text{legalább négyen vannak}) =$

$= \mathbb{P}(\text{mindenki eljön}) + \mathbb{P}(\text{egy ember hiányzik})$

Általában:

Ha az A és B események kizáróak, azaz metszetük üres,
akkor annak valószínűsége, hogy legalább az egyik bekövetkezik,
a valószínűségük összege:

$$\boxed{A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)}$$

kizáróak: egyszerre nem következhetnek be

unió: legalább az egyik bekövetkezik

A második tulajdonságot nem csak akkor várjuk el, ha két, egymást kizáró eseményről van szó, hanem akkor is, ha többről, akár végtelen sokról – amíg a végtelen sok eseményt fel tudjuk sorolni, vagyis megszámlálható sok eseményről van szó.

Összefoglalva a valószínűség az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

1. **Egy esemény valószínűsége mindig 0 és 1 közé esik:**

   $$0 \le \mathbb{P}(A) \le 1$$

   bármely A eseményre, **és a biztos esemény valószínűsége 1.**

2. **Additivitás:** ha $A_1, A_2, \ldots$ események, és semelyik kettő nem következhet be egyszerre, azaz

   $$A_i \cap A_j = \emptyset \qquad \text{minden } i, j \ge 1\text{-re,}$$

akkor annak valószínűsége, hogy legalább az egyik bekövetkezik, a valószínűségük összege:

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) + \ldots.$$

Ugyanez más jelöléssel:

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j).$$

2.3. A valószínűségi mező definíciója

Mindezek alapján a valószínűségi modellt, a Kolmogorov-féle valószínűségi mezőt az Ω eseménytérből (a lehetséges kimenetelek összességének halmazából), az események $\mathcal{A}$ halmazából és a $\mathbb{P}$ eseményekhez valószínűségeket rendelő függvényből építhetjük fel, axiómaként pedig a fent megfogalmazott tulajdonságokat használhatjuk. Így jutunk a Kolmogorov-féle valószínűségi mező formális definíciójához.

2.1. Definíció. *Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ hármas* **Kolmogorov-féle valószínűségi mező***, ha*

- *az Ω* **eseménytér** *egy nem üres halmaz;*
- *$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ (ahol $\mathcal{P}(\Omega)$ az Ω összes részhalmazának a halmaza), az* **az események halmaza***, azaz minden $A \in \mathcal{A}$-ra $A \subseteq \Omega$ úgy, hogy*
  - *(i) $\Omega \in \mathcal{A}$;*
  - *(ii) ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, akkor $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ (azaz megszámlálható sok $\mathcal{A}$-beli elem uniója is $\mathcal{A}$-beli);*
  - *(iii) ha $A \in \mathcal{A}$, akkor $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ (azaz $\mathcal{A}$-beli halmazok komplementere is $\mathcal{A}$-beli).*
- *a* **valószínűség** *egy $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$ függvény, melyre*
  - *(i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, azaz a biztos esemény valószínűsége 1;*
  - *(ii) ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ és minden $1 \leq i < j$-re $A_i \cap A_j = \emptyset$, akkor*

    $$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n),$$

    azaz megszámlálható sok kizáró esemény uniójának valószínűsége a valószínűségek összege.

Elnevezések:

- *Ω:* **eseménytér** *vagy elemi események halmaza.*
- *Ω elemei ($\omega \in \Omega$):* **elemi események***.*
- *$\mathcal{A}$:* **események halmaza** *(vagy események σ-algebrája).*
- *$\mathcal{A}$ elemei ($A \in \mathcal{A}$):* **események***.*
- *$\mathbb{P}$:* **valószínűség** *(probability).*
- *Ω esemény neve: biztos esemény.*
- *$\emptyset$ (üres halmaz) esemény neve: lehetetlen esemény.*

Itt fontos, hogy az események halmaza Ω részhalmazaiból áll, de **az nem kell, hogy Ω minden részhalmaza esemény legyen**. A valószínűségét csak azoknak a részhalmazoknak tudjuk kiszámítani, amik események, $\mathcal{A}$-ban benne vannak. Például lehet $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, és az események halmaza:

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}.$$

Továbbá

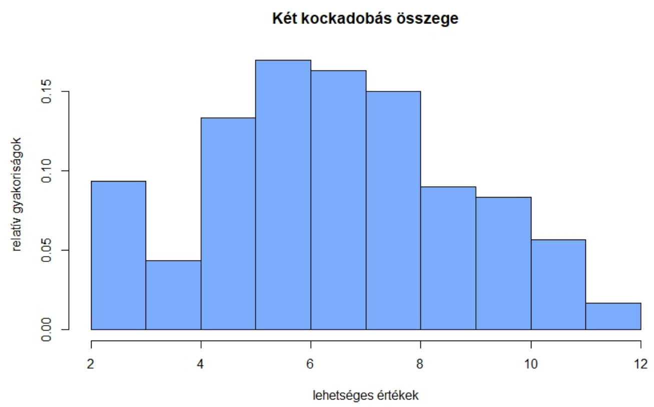
$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0; \qquad \mathbb{P}(\{1, 3, 5\}) = \mathbb{P}(\{2, 4, 6\}) = 1/2; \qquad \mathbb{P}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) = 1.$$

Ez Kolmogorov-féle valószínűségi mező, minden követelményt teljesít. Annak felel meg, mintha egy kockadobás után valaki csak azt árulná el nekünk, hogy páros vagy páratlan számot dobott-e.

Példa: két szabályos kockadobás összege

Tekintsük az alábbi kérdést, amihez majd elkészítjük az ezt leíró Kolmogorov-féle valószínűségi mezőt. Két szabályos dobókockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7?

Ennek a kísérletnek 300 ismétlésénél láthatók az egyes lehetséges értékek **relatív gyakorisága** (előfordulásuk aránya) látható a 4. ábrán.



4. ábra. Két szabályos kockadobás összegének hisztogramja 300 ismétlésből

A dobókockák, emberek, tárgyak stb. mindig különbözőek.

A feladatot a következőképpen oldhatjuk meg.

- **eseménytér**: lehetséges dobássorozatok. Ezek száma:

$$6 \cdot 6 = 36; \text{mindkét dobás hatféle lehet.}$$

- A dobássorozatok egyformán valószínűek: mindegyiknek 1/36 a valószínűsége.
- A kedvező dobássorozatok száma: 6.

11	12	13	14	15	**16**
21	22	23	24	**25**	26
31	32	33	**34**	35	36
41	42	**43**	44	45	46
51	**52**	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

Tehát $\mathbb{P}(\text{az összeg } 7) = 6/36 = 1/6$.

Ez alapján a két kockadobáshoz tartozó Kolmogorov-féle valószínűségi mező az alábbi lesz.

- **elemi esemény:** a kísérlet egy lehetséges kimenetele, egy dobássorozat, például: **15** vagy **22**
- **eseménytér**: az elemi események összessége, az Ω halmaz most az alábbi 36 elemű halmaz, amit az ábrán is láthattunk: $\Omega = \{11, 12, 13, \ldots, 16, 21, \ldots, 26, \ldots, 61, \ldots, 66\}$.
- **esemény**: az eseménytér, azaz Ω részhalmazai
  például: a dobott számok összege 7, azaz $A = \{16, 25, 34, 43, 52, 61\}$
  vagy: a dobott számok összege legfeljebb 3, azaz $B = \{11, 12, 21\}$

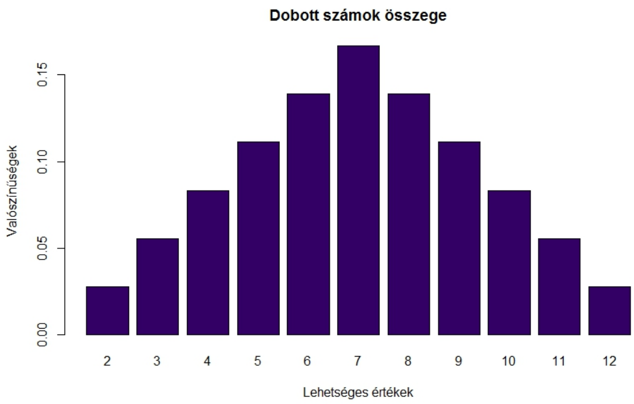
  $\mathcal{A}$: az események halmaza, ez most Ω összes részhalmaza

  Az összes esesmény száma: $|\mathcal{A}| = 2^{36}$, hiszen mind a 36 dobássorozatról egymástól függetlenül eldönthetjük, hogy bevesszük-e a részhalmazba. Pontosabban: először eldönthetjük, hogy 11 bekerül-e, ez két lehetőség. Utána eldönthetjük, hogy 12 bekerül-e, ez már 4, bármelyik lehetőség bármelyikkel folytatható. Hasonlóképpen, eldöntve, hogy 13 bekerül-e, már 8 lehetőségünk van. Így végigmehetünk a halmaz elemein, minden újabb elemnél megduplázódik a lehetőségek száma, így jutunk el 2^{36}-hoz az összes elemen végigmenve.

- **valószínűség**: $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$ az eseményekhez $[0,1]$-beli számokat rendelő függvény. Például

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}; \qquad \mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

A két dobás összegével kapcsolatos valószínűségeket az 5. ábráról is leolvashatjuk.



5. ábra. Az összeg lehetséges értékei és a valószínűségek

Példa: gyerekek nemének eloszlása

Valakinek három gyermeke születik.

- A gyerekek neme a következőképpen alakulhat (születési sorrendben), ez lesz tehát az eseménytér, az elemi események halmaza:

$$\Omega = \{LLL, LLF, LFL, LFF, FLL, FLF, FFL, FFF\}.$$

  Ennek 8 eleme van, feltételezzük, hogy mind a nyolc lehetőség egyformán valószínű. Azaz 8 egyformán valószínű elemi esemény van.

- $\mathcal{A}$, az események halmaza: az Ω összes részhalmaza. Ennek elemszáma: $|\mathcal{A}| = 2^8$.

- Például legyen $A \subset \Omega$ az az esemény, hogy a gyerekek között pontosan egy lány van: $A = \{LFF, FLF, FFL.\}$ Ennek valószínűsége: $\mathbb{P}(A) = 3/8$.

- Legyen B az az esemény, hogy a középső gyerek fiú:

$$B = \{LFL, LFF, FFL, FFF\}.$$

  Ennek valószínűsége: $\mathbb{P}(B) = 1/2$.

2.4. Kapcsolat a relatív gyakorisággal

Legyen Ω az eseménytér, a lehetséges kimenetelek halmaza, és $A \subseteq \Omega$ egy esemény, vagyis ennek egy részhalmaza.

Az A esemény **relatív gyakorisága** n kísérletből:

$$r(A) = \frac{A \text{ bekövetkezéseinek száma}}{\text{az összes kísérlet száma}} = \frac{A \text{ bekövetkezéseinek száma}}{n}.$$

A relatív gyakoriságra az alábbiak igazak:

- **eseményekhez rendel nemnegatív számokat**, azaz $A \in \mathcal{A}$ esetén $r(A) \geq 0$
- **additív**: ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ események, és bármely kettő metszete üres, akkor

$$r(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = r(A_1) + r(A_2) + r(A_3) + \ldots$$

- $r(\Omega) = 1$, azaz a biztos esemény relatív gyakorisága 1

Vagyis a relatív gyakoriság is teljesíti azokat a tulajdonságokat, amiket a valószínűségre megfogalmaztunk. Később látni fogjuk, hogy más kapcsolat is van a két mennyiség között, például, ha n nagy, és a kísérletek egymást nem befolyásolják (függetlenek), akkor a relatív gyakoriság nagy valószínűséggel közel van az A esemény valószínűségéhez (ennek egy pontos megfogalmazásaként kapható a nagy számok gyenge törvénye).

Házi feladat szeptember 17., 12:00-ig Egy országban a felnőttek 20%-ának van saját lakása, 50%-ának saját autója, 15%-ának mind a kettő. Megkérdezünk

a) egy felnőttet (mindenkit azonos valószínűséggel választva);

b) két felnőttet úgy, hogy az első választást elfelejtjük, tehát akár ugyanazt az embert is kérdezhetjük kétszer (azaz visszatevéses mintavételt alkalmazunk).

Mindkét esetben adjuk meg az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ hármasból Ω-t, $\mathcal{A}$-t, azaz az események halmazát, és a b) esetben számítsuk ki annak valószínűségét, hogy a két megkérdezett közül legalább az egyiknek van saját lakása, és mindkettőjüknek van saját autója.