Valószínűségszámítás előadás, 13. hét, 2020. december 9.

Feltételes eloszlás, sűrűségfüggvény, várható érték

1. Feltételes eloszlás

1.1. Definíció. *Legyen X diszkrét valószínűségi változó, lehetséges értékei $x_1, x_2, \ldots$, a hozzájuk tartozó valószínűségek: $\mathbb{P}(X = x_k) = p_k$. Legyen A pozitív valószínűségű esemény. Ekkor az X-nek az A eseményre vonatkozó feltételes eloszlása:*

$$q_k = \mathbb{P}(X = x_k | A) = \frac{\mathbb{P}(\{X = x_k\} \cap A)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Ekkor

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbb{P}(\{X = x_k\} \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = 1,$$

azaz a (q_k) sorozat is valószínűségeloszlás.

Másrészt az $\{X = x_k\},\ k = 1, 2, \ldots$ események teljes eseményrendszert alkotnak.

Ez alapján az X-nek az A eseményre vonatkozó feltételes várható értékét is kiszámíthatjuk:

$$\mathbb{E}(X|A) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q_k = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}(X = x_k | A).$$

Példa. Kétszer dobunk szabályos kockával. Legyen X az első dobás, Y pedig a dobott számok közül a nagyobb. Ekkor az (X, Y) valószínűségi vektorváltozó együttes eloszlása:

X/Y	1	2	**3**	4	5	6	összesen
1	1/36	1/36	**1/36**	1/36	1/36	1/36	1/6
2	0	1/18	**1/36**	1/36	1/36	1/36	1/6
3	0	0	**1/12**	1/36	1/36	1/36	1/6
4	0	0	0	1/9	1/36	1/36	1/6
5	0	0	0	0	5/36	1/36	1/6
6	0	0	0	0	0	1/6	1/6
összesen	1/36	1/12	5/36	7/36	1/4	11/36	1

Legyen $A = \{Y = 3\}$ a feltétel.

Ekkor X feltételes eloszlása:

$$q_1 = \mathbb{P}(X = 1 | Y = 3) = \frac{1/36}{5/36} = \frac{1}{5} = q_2; \qquad q_3 = \frac{1/12}{5/36} = \frac{3}{5}.$$

Ez tehát az első dobás feltételes eloszlása arra az eseményre nézve, hogy a két dobás maximuma 3.

Továbbá X feltételes várható értéke:

$$\mathbb{E}(X | Y = 3) = \sum_{k=1}^{3} \mathbb{P}(X = k | Y = 3) \cdot k = \frac{1}{5} \cdot 1 + \frac{1}{5} \cdot 2 + \frac{3}{5} \cdot 3 = \frac{12}{5} = 2,4.$$

Ez tehát az első dobás feltételes eloszlása arra az eseményre nézve, hogy a két dobás maximuma 3.

Ez azt is jelenti, hogy ha a tévedésünk négyzetes hibájának várható értékét szeretnénk minimalizálni, akkor az $\{Y = 3\}$ feltétel esetén $2,4$ a legjobb „előrejelzés”. Ugyanis az alábbi állítás érvényes.

1.1. Állítás. *(i) Az a c szám, melyre $\mathbb{E}((X - c)^2)$ a lehető legkisebb, éppen $c = \mathbb{E}(X)$.*

(ii) Az a c szám, melyre $\mathbb{E}((X - c)^2 | A)$ a lehető legkisebb, éppen $c = \mathbb{E}(X|A)$.

A fenti példában a 3-nak nincs kitüntetett szerepe, írhatnánk más számot is. Például:

$$\mathbb{E}(X|Y=2) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{5}{3} = 1,67.$$

Általában pedig így fogalmazhatjuk meg a kérdést: az Y valószínűségi változó ismeretében mi az az érték, mely a legjobb előrejelzést adja a négyzetes várható érték értelemben? Pontosabban fogalmazva: ha az Y valószínűségi változót ismerjük, akkor ez alapján olyan előrejelzést készíthetünk, mely Y-nak függvénye, valamilyen $h(Y)$ függvény. Az ilyen alakú függvények közül pedig azt választjuk, melyre a négyzetes hiba várható értéke a lehető legkisebb.

1.2. Definíció. *Az X valószínűségi változó feltételes várható értéke Y-ra nézve az a $h(Y)$ függvény, melyre*

$$\mathbb{E}((X - h(Y))^2)$$

a lehető legkisebb (az összes „megfelelő” h függvény között). Jelölése: $\mathbb{E}(X|Y)$.

Az így definiált fogalom szoros kapcsolatban van a fenti feltételes várható értékekkel. Nevezetesen, diszkrét valószínűségi változók esetén $\mathbb{E}(X|Y)$ egy $h(Y)$ alakú függvény. Ekkor, ha k rögzített, akkor

$$\mathbb{E}(X|Y=k) = h(k)$$

teljesül.

2. Feltételes sűrűségfüggvény és várható érték

Az 1.2. definícióban nem használtuk, hogy X és Y diszkrét valószínűségi változók lennének (bár a példában azok voltak). Kérdés, hogy az így értelmezett feltételes várható értéket hogyan tudjuk kiszámítani, ha ismerjük X és Y együttes sűrűségfüggvényét.

Emlékeztetőül: legyen az (X,Y) abszolút folytonos valószínűségi vektorváltozó együttes sűrűségfüggvénye a f. Ekkor az igaz megfelelő $H \subseteq \mathbb{R}^2$ halmazokra, hogy

$$\mathbb{P}((X,Y) \in H) = \int_H f(x,y)\,dxdy.$$

Az X, illetve Y sűrűségfüggvénye:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy; \qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx.$$

2.1. Definíció. *Az X valószínűségi változónak az $Y = y$ feltételre vonatkozó* **feltételes sűrűségfüggvénye** *adott y valós számra:*

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y).}$$

2.2. Definíció. *Legyen (X,Y) abszolút folytonos valószínűségi vektorváltozó, melynek együttes sűrűségfüggvénye f. Ekkor A $g(X)$ valószínűségi változó* **feltételes várható értéke** *az $Y = y$ feltétel mellett:*

$$\mathbb{E}(g(X)|Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X|Y=y}(x)dx.$$

Az így definiált feltételes várható érték kapcsolata az 1.2. definícióval az alábbi: $\mathbb{E}(X|Y=y)$ valójában egy $h(y)$ alakú függvény. Ekkor

$$\mathbb{E}(X|Y) = h(Y),$$

vagyis a feltételes sűrűségfüggvény segítségével kiszámíthatjuk a tévedés négyzetes várható értéke szempontjából legjobb előrejelzést.

Példa. Legyenek X és Z független standard normális eloszlású valószínűségi változók. Ekkor az $(X, X+Z)$ együttes sűrűségfüggvénye (ezt nem bizonyítjuk):

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} \exp\Big(-\frac{2x^2-2xy+y^2}{2}\Big).$$

Az $X+Z$ valószínűségi változó normális eloszlású $m=0$ várható értékkel és $\sigma=2$ szórásnégyzettel, így

$$f_{X+Z}(y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\Big(-\frac{y^2}{4}\Big).$$

Mennyi lehet az $\mathbb{E}(X|X+Z=y)$ feltételes várható érték?

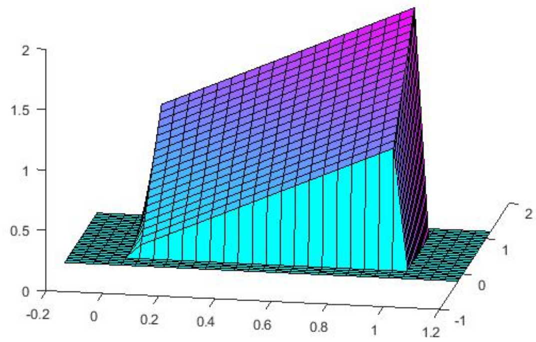
$$\mathbb{E}(X|X+Z=y) = \int_{-\infty}^{\infty} x\frac{f(x,y)}{f_{X+Z}(y)}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} x \exp\Big(-\frac{2x^2-2xy+y^2/2}{2}\Big)dx \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\Big(-\frac{(x-y/2)^2}{2\cdot 1/2}\Big)dx = \frac{y}{2},$$

ahol felhasználtuk, hogy éppen az $y/2$ várható értékű, $1/\sqrt{2}$ szórású normális eloszlás sűrűségfüggvénye jelent meg x-szel szorozva és integrálva. Ez éppen ennek a normális eloszlásnak a várható értéke, azaz $y/2$.

Ebből következik, hogy

$$\mathbb{E}(X|X+Z) = \frac{X+Z}{2}.$$

Ez tehát azt jelenti, hogy $h(y) = y/2$ lesz az a függvény (a „megfelelő” függvények között), melyre a $\mathbb{E}((X-h(X+Z))^2)$ várható érték a legkisebb.



1. ábra. A $[0,1]\times[0,1]$ négyzeten $x+y$ alakú együttes sűrűségfüggvény

Példa. Tegyük fel, hogy (X,Y) együttes sűrűségfüggvénye az alábbi függvény:

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & \text{ha } 0\le x\le 1 \text{ és } 0\le y\le 1; \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Számítsuk ki X-nek Y-ra vonatkozó feltételes várható értékét.

Ehhez először számítsuk ki a feltételes sűrűségfüggvényt.

Az Y sűrűségfüggvénye:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_0^1 x+y\,dx = \Big[\frac{x^2}{2}\Big]_{x=0}^1 + y = y+\frac{1}{2},$$

ha $0\le y\le 1$. Különben azonosan nullát integrálunk, a sűrűségfüggvény is 0.

Ezért

$$\mathbb{E}(X|Y=y)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\,dx=\int_0^1 x\cdot\frac{x+y}{\frac{1}{2}+y}\,dx=\frac{1}{\frac{1}{2}+y}\int_0^1 x^2+xy\,dx=\frac{1}{\frac{1}{2}+y}\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2y}{2}\right]_{x=0}^{1}=$$
$$=\frac{1/3+y/2}{1/2+y}=\frac{2+3y}{3(1+2y)}\qquad\Rightarrow\qquad\mathbb{E}(X|Y)=\frac{2+3Y}{3(1+2Y)}.$$

Ez tehát azt jelenti, hogy $h(y)=\frac{2+3y}{3(1+2y)}$ az a függvény, melyre $\mathbb{E}((X-h(Y))^2)$ a lehető legkisebb, ez lesz X legjobb előrejelzése ebben az értelemben.

Megjegyzés. Általában igaz, hogy a $\mathbb{E}(X|Y)$ valószínűségi változó várható értéke $\mathbb{E}(X)$.