Valószínűségszámítás előadás, 10. hét, 2020. november 18.

Nevezetes abszolút folytonos eloszlások

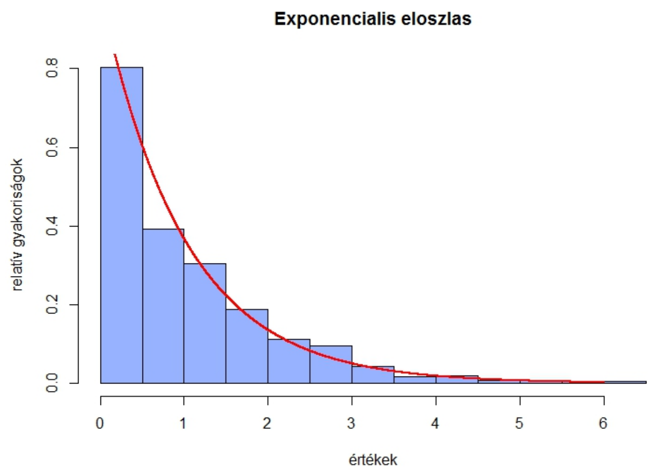
Ahogy korábban láttuk, a sűrűségfüggvény tetszőleges olyan függvény lehet, mely nemnegatív, és az integrálja 1 (pontosabban, ha egy függvény ilyen tulajdonságú, akkor van olyan valószínűségi változó, aminek ez a sűrűségfüggvénye). Vannak azonban olyan sűrűségfüggvények, melyek a statisztikában vagy matematikai modellezésben fontosabb szerepet játszanak, gyakran előjönnek. Ezeket érdemes külön megismerni. Általában jellemző lesz, hogy nem is egy-egy konkrét sűrűségfüggvényről, hanem sűrűségfüggvények egy családjáról van szó, ahol a pontos függvény egy vagy két paraméter megadása után kapható meg.

1. Exponenciális eloszlás

Az **exponenciális eloszlás** sokszor használható véletlen időtartamok modellezésére, például

- egy művelet elvégzésének ideje: egy ember kiszolgálása egy boltban, vagy egy számítás elvégzése egy számítógépen
- egy ember reakcióideje
- két esemény bekövetkezése között eltelt idő, például egy üzletben két ügyfél érkezése közötti idő
- járványterjedés modellezésénél: a fertőzés átadásának vagy a gyógyulásnak az ideje
- radioaktív részecske bomlási ideje

Ahogyan korábban láttuk, ez az eloszlás örökifjú tulajdonságú, azaz akkor jó modellezésre, ha az, hogy t ideje várunk az esemény bekövetkezésére, nem változtat a még hátralévő várakozási idő eloszlásán.

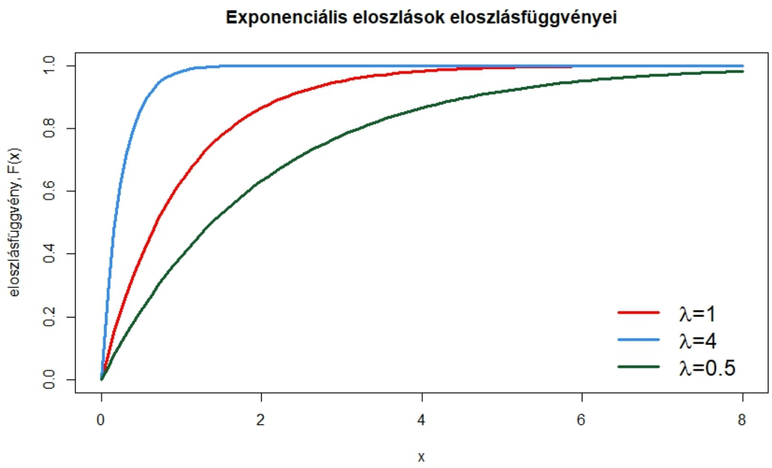


1. ábra. $\lambda = 1$ paraméterű exponenciális eloszlás sűrűségfüggvénye és 500 darab független, 1 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változóból álló minta hisztogramja

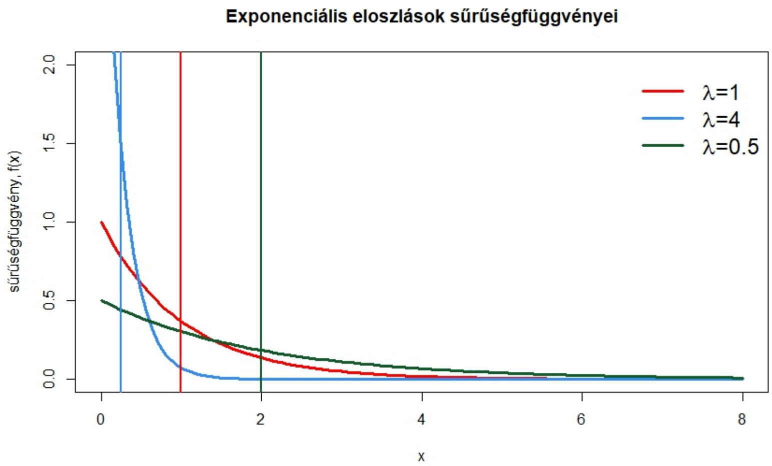
1.1. Definíció. *Legyen $\lambda > 0$ valós szám. Az X valószínűségi változó* **exponenciális eloszlású** *λ paraméterrel, ha eloszlásfüggvénye:*

$$F(t) = \mathbb{P}(X \le t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & ha\ t > 0; \\ 0 & különben. \end{cases}$$

1.1. Állítás. *Tegyük fel, hogy az X valószínűségi változó exponenciális eloszlású $\lambda > 0$ paraméterrel.*



2. ábra. Különböző paraméterű $\left(\lambda = \frac{1}{2}, 1, \text{ illetve } 4\right)$ exponenciális eloszlások eloszlásfüggvényei



3. ábra. Különböző paraméterű $\left(\lambda = \frac{1}{2}, 1, \text{ illetve } 4\right)$ exponenciális eloszlások sűrűségfüggvényei és a várható értékeik: $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} = 2, 1$ illetve $\frac{1}{4}$

(i) X sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0; \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

(ii) X várható értéke: $\mathbb{E}(\mathbf{X}) = \frac{1}{\lambda}$, *szórása:* $\mathbf{D}(\mathbf{X}) = \frac{1}{\lambda}$.

(iii) **Örökifjú tulajdonság.** *Legyenek s, t pozitív számok. Ekkor*

$$\mathbb{P}(X \geq s + t | X \geq s) = \mathbb{P}(X \geq t).$$

Bizonyítás. (i) Korábban láttuk, hogy adott eloszlásfüggvény esetén a sűrűségfüggvény, ha létezik (nem mindig létezik), deriválással kapható. A definícióban megadott függvény deriváltja éppen f lesz. Mivel viszont nem mindig létezik a sűrűségfüggvény, ellenőrizni kell, hogy ez valóban sűrűségfüggvény:

$$\int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx = \int_{0}^{t} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = [-e^{-\lambda x}]_0^t = -e^{-\lambda t} - (-1) = F(t),$$

ha $t > 0$, és 0 különben.

(ii) A várható értékhez az alábbi integrált kell kiszámítani, amit parciális integrálással tehetünk meg:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\, dx = [-xe^{-\lambda x}]_{x=0}^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\, dx = \left[-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_{x=0}^{\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

A szórás hasonlóképpen számítható ki a definícióból.

(iii) Ezt már korábban bizonyítottuk. □

Példa.Tegyük fel, hogy egy boltban egy vevő kiszolgálásának ideje (percben számolva) 3 **várható értékű exponenciális eloszlású** valószínűségi változó.

Mennyi a valószínűsége, hogy a vevőt **legalább** 5 **percig** tart kiszolgálni? Mennyi a valószínűsége, hogy a vevő kiszolgálása **legalább** 2**, de legfeljebb** 4 **percig** tart?

Legyen X a kiszolgálás ideje. Exponenciális eloszlás esetén

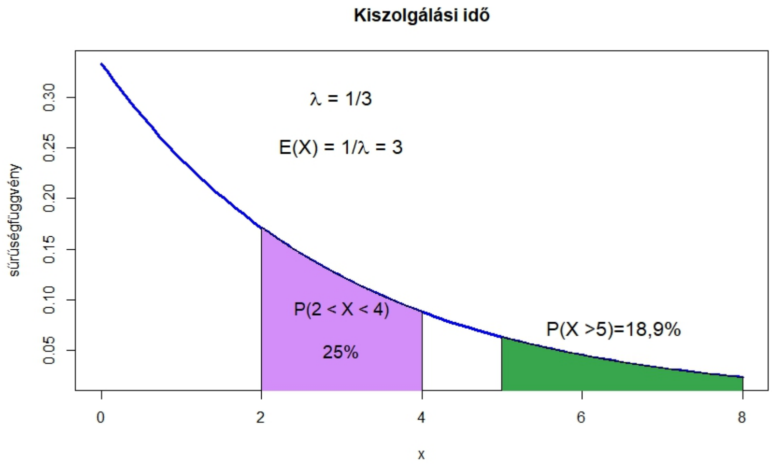
$$\mathbb{E}(X) = 1/\lambda, \text{ és most } \mathbb{E}(X) = 3 \Rightarrow \lambda = 1/3.$$

Ezért az eloszlásfüggvény alapján

$$\mathbb{P}(X \geq 5) = 1 - \mathbb{P}(X < 5) = 1 - F(5) = 1 - (1 - e^{-\lambda\cdot 5}) = e^{-\lambda\cdot 5} = e^{-5/3} = \mathbf{18,9}\%.$$

Hasonlóképpen

$$\mathbb{P}(2 \leq X \leq 4) = \mathbb{P}(X \leq 4) - \mathbb{P}(X \leq 2) = F(4) - F(2) = (1 - e^{-4/3}) - (1 - e^{-2/3}) = e^{-2/3} - e^{-4/3} = \mathbf{25}\%.$$



4. ábra. Annak valószínűsége, hogy a kiszolgálás legalább 5 percig tart, illetve hogy legalább 2, de legalább 4 percig, ha a kiszolgálási idő 3 várható értékű exponenciális eloszlású valószínűségi változó

2. Pareto-eloszlás

Biztosításmatematikában, vagy például a jövedelmek eloszlásának modellezésére használják gyakran az alábbi eloszlást.

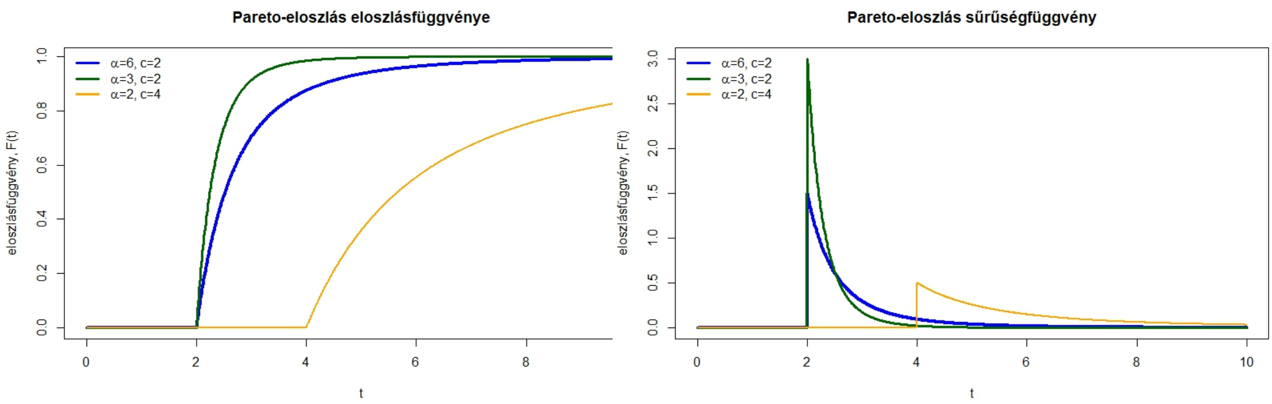
2.1. Definíció (Pareto-eloszlás). *Az X valószínűségi változó Pareto-eloszlású $\alpha > 0$ és $c > 0$ paraméterekkel, ha eloszlásfüggvénye*

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \begin{cases} 0; & ha\ t \leq c; \\ 1 - \left(\frac{c}{t}\right)^{\alpha}; & ha\ t > c. \end{cases}$$

2.1. Állítás. *Ha X Pareto-eloszlású $\alpha > 0$ és $c > 0$ paraméterekkel, akkor sűrűségfüggvénye*

$$f(t) = \begin{cases} 0; & \text{ha } t \leq c; \\ \frac{c^\alpha \alpha}{t^{\alpha+1}}; & \text{ha } t > c. \end{cases}$$

Itt a sűrűségfüggvényt deriválással kapjuk, és ellenőrizhető, hogy ez valóban sűrűségfüggvény lesz.



5. ábra. Különböző paraméterű Pareto-eloszlások eloszlás– és sűrűségfüggvényei

Az X valószínűségi változó k. momentuma:

$$\mathbb{E}(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f(x)\, dx = \int_c^{\infty} c^\alpha \alpha \cdot x^{k-\alpha-1}, dx < \infty \Leftrightarrow k - \alpha - 1 < -1 \Leftrightarrow k < \alpha.$$

Tehát a Pareto-eloszlásnak csak α-nál kisebb k-ra véges a k. momentuma.

Például ha $\alpha = 1,5$, akkor a várható érték létezik és véges, de szórás nem létezik. Ilyenkor a sűrűségfüggvény, például $c = 1$-re: $1,5x^{-2,5}\mathbb{I}(x > 1)$. Ennek tehát a **várható értéke véges**, a **szórása végtelen**. Hasonlóképpen olyan Pareto-eloszlásokat is találhatunk, melyeknek a k. momentuma létezik, de a $k + 1$. nem.

Ez az oka annak, hogy, mivel a Pareto-eloszlás „nagy valószínűséggel vesz fel nagy értékeket” is, például tűzkár vagy árvízkár nagyságának modellezésére használják.

3. Normális eloszlás

A **normális eloszlás**, melynek sűrűségfüggvénye az e^{-x^2} függvényből származtatható, gyakran előfordul például különféle *mérési eredmények* (a mérési hibák következtében), illetve élőlények *biológiai jellemzői* gyakran normális eloszlást követnek (például: testmagasság). A normális eloszlás a **statisztikában** is kulcsfontosságú, ezt használjuk a z-próbában, közvetve pedig a t-próbában is, más eljárásokban is.

3.1. Definíció. *Legyen m valós, σ pedig pozitív szám. Azt mondjuk, hogy az Y valószínűségi változó* **normális eloszlású** *m várható értékkel és σ^2 szórásnégyzettel, ha* **sűrűségfüggvénye**

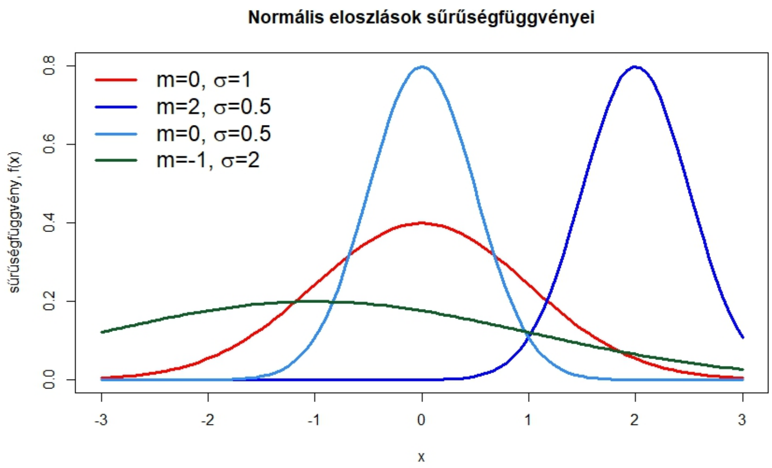
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \exp\left(- \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Jelölése: $Y \sim N(m, \sigma^2)$.

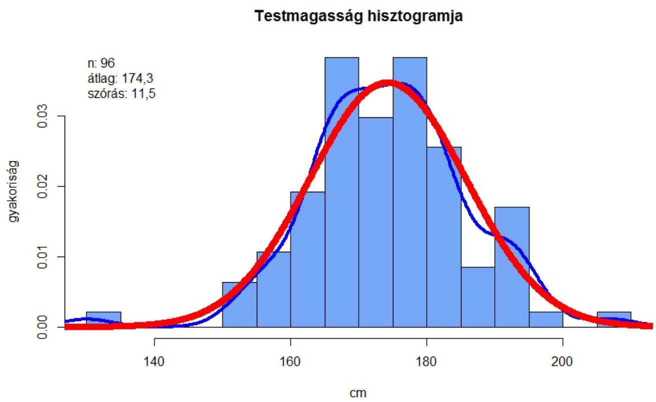
Ellenőrizhető, hogy f valóban sűrűségfüggvény, azaz nemnegatív és 1 az integrálja.

3.1. Állítás (A normális eloszlás várható értéke és szórása). *Ha $Y \sim N(m, \sigma^2)$, akkor $\mathbb{E}(\mathbf{Y}) = \mathbf{m}$, $\mathbf{D}(\mathbf{Y}) = \sigma$.*

Nem bizonyítjuk, de a várható értéket a szimmetria alapján, a szórást parciális integrálás segítségével lehetne levezetni a definícióból.



6. ábra. Különböző várható értékű (m) és szórású (σ) normális eloszlások sűrűségfüggvényei



7. ábra. Testmagasság hisztogramja $n = 96$ elemű mintából (valós adatokból), és az $m = \overline{X} = 174,3$ várható értékű és $\sigma = 11,5$ szórású normális eloszlás sűrűségfüggvénye (pirossal): $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 11,5}\exp(-(x-174,3)^2/(2\cdot 11,5^2))$

3.2. Definíció. **Standard normális eloszlás:** *az $m = 0$ várható értékű és $\sigma = 1$ szórású normális eloszlás.* **Eloszlásfüggvénye:** *Φ, sűrűségfüggvénye φ, ahol*

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(x)\,dx; \qquad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\Big(-\frac{x^2}{2}\Big).$$

Másképpen, ha $Z \sim N(0,1)$, azaz Z standard normális eloszlású, akkor

$$\mathbb{P}(Z \le t) = \Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,dx.$$

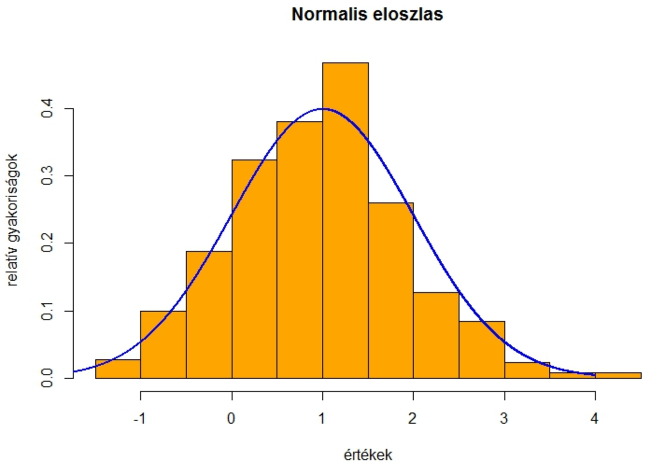
A Φ függvény a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye: ha $Z \sim N(0,1)$, akkor

$$\mathbb{P}(a \le Z \le b) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int_{a}^{b} \varphi(x)\,dx = \int_{a}^{b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,dx.$$

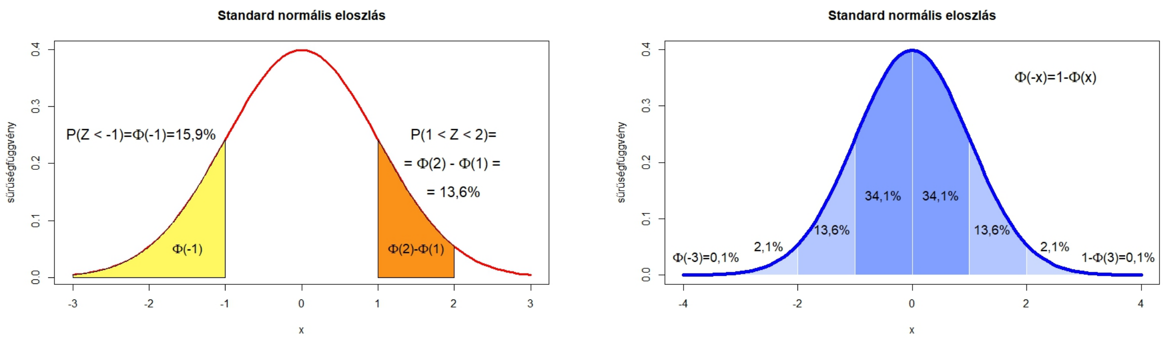
Továbbá

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \le X \le b) = \mathbb{P}(X \le b) - \mathbb{P}(X < a) =$$
$$= \int_{a}^{b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\Big(-\frac{x^2}{2}\Big)dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Más normális eloszlások esetén ezeket a valószínűségeket a Φ függvényre vezethetjük vissza.



8. ábra. Normális eloszlás ($m = 1, \sigma = 1$) sűrűségfüggvénye és 500 darab független, $N(1,1)$ eloszlású valószínűségi változóból álló minta hisztogramja



9. ábra. A standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye

3.1. A normális eloszlás tulajdonságai

Tegyük fel, hogy Y normális eloszlású m várható értékkel és σ^2 szórásnégyzettel, azaz $Y \sim N(m, \sigma^2)$. Ekkor tetszőleges $a \leq b$ valós számokra

$$\mathbb{P}(Y < b) = \mathbb{P}(Y \leq b) = \mathbb{P}\left(\frac{Y-m}{\sigma} \leq \frac{b-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right)$$

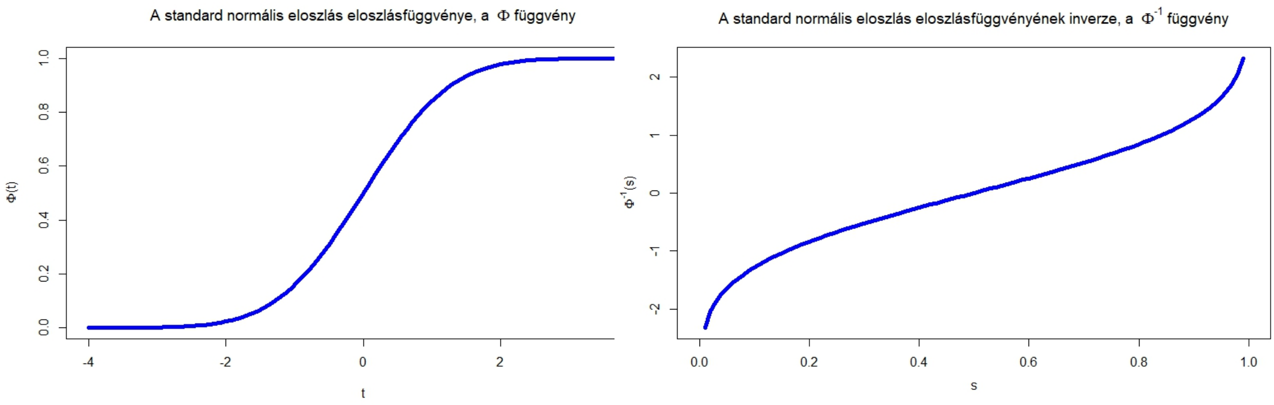
$$\mathbb{P}(Y > a) = \mathbb{P}(Y \geq a) = 1 - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$$

$$\mathbb{P}(a < Y < b) = \mathbb{P}(a \leq Y \leq b) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$$

$$\mathbb{P}(|Y - m| \leq b) = 2\Phi\left(\frac{b}{\sigma}\right) - 1$$

Lineáris transzformáció. Legyen Y normális eloszlású valószínűségi változó m várható értékkel és σ szórással, és a, b valós számok. Ekkor az $aY + b$ valószínűségi változó normális eloszlású $am + b$ várható értékkel és $a^2\sigma^2$ szórásnégyzettel, azaz

$$Y \sim N(m, \sigma^2) \qquad \Rightarrow \qquad aY + b \sim N(am + b, a^2\sigma^2).$$



10. ábra. A standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye és annak inverze

Független összeg. Ha Y_1, Y_2 **független, normális eloszlású** valószínűségi változók, akkor $Y_1 + Y_2$ is **normális eloszlású**, várható értéke $m_1 + m_2$, szórásnégyzete $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$, ahol $Y_1 \sim N(m_1, \sigma_1^2)$ és $Y_2 \sim N(m_2, \sigma_2^2)$

Példa. Ha Y és Z függetlenek, normális eloszlásúak, $Y \sim N(2, 3^2)$ és $Z \sim N(1, 4^2)$, akkor

$$Y + Z \sim N(3, 5^2); \qquad Y - Z \sim N(1, 5^2); \qquad Y + 3Z \sim N(5, 57).$$

Legyenek $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ **független normális eloszlású** valószínűségi változók, melyek várható értéke m, szórásuk σ. Ekkor az **összegük** és **az átlaguk is normális eloszlású**, és

$$Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n \sim N(nm, n\sigma^2);$$

$$\frac{Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n}{n} \sim N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

Példa. Tegyük fel, hogy az emberek testmagassága 176 cm várható értékű és 7 szórású valószínűségi változó. Ekkor

- 100 ember testmagasságának átlaga szintén normális eloszlású, 176 várható értékkel és $7/\sqrt{100} = 0,7$ szórással;
- 10000 ember testmagasságának átlaga normális eloszlású, 176 várható értékkel és $7/\sqrt{10000} = 0,07$ szórással.

Példa. Tegyük fel, hogy a holnap várható középhőmérséklet, Y valószínűségi változó normális eloszlású $\mathbf{m = 4}$ várható értékkel és $\boldsymbol{\sigma = 3}$ szórással. Mennyi a valószínűsége, hogy a holnapi középhőmérséklet értéke legfeljebb 7 fok?

$$\mathbb{P}(Y \le 7) = \Phi\left(\frac{7 - \mathbf{m}}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{7 - \mathbf{4}}{\mathbf{3}}\right) = \Phi(1) = \mathbf{84,1}\%.$$

Az R-ben ugyanezt a `pnorm(7, mean=4, sd=3)` paranccsal érhetjük el.

Mennyi a valószínűsége, hogy a középhőmérséklet 1 és 7 fok közé esik?

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(1 < Y \le 7) = \mathbb{P}(Y \le 7) - \mathbb{P}(Y \le 1) = \Phi\left(\frac{7 - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{1 - m}{\sigma}\right) \\ = \Phi\left(\frac{7 - 4}{3}\right) - \Phi\left(\frac{1 - 4}{3}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) = \\ = 2\Phi(1) - 1 = \mathbf{68,2}\%,\end{aligned}$$

mert

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

minden valós x-re érvényes a sűrűségfüggvény 0-ra való szimmetriája miatt.

Kvantilisek. Emlékeztetőül: egy (folytonos) eloszlás z-kvantilise az a t szám, melyre $\mathbb{P}(X \leq t) = z$, vagyis az a szám, melynél a valószínűségi változó értéke pontosan z valószínűséggel kisebb.

A fentiek alapján a normális eloszlásnál ezt is kiszámíthatjuk, és ennek van a statisztikában gyakran fontos szerepe. Ha tehát $X \sim N(m, \sigma^2)$, akkor

$$\mathbb{P}(X \leq t) = \Phi\left(\frac{t-m}{\sigma}\right) = z \Rightarrow \frac{t-m}{\sigma} = \Phi^{-1}(z) \Rightarrow t = \sigma\Phi^{-1}(z) + m.$$

Speciálisan a standard normális eloszlásnál $m = 0$, $\sigma = 1$, a kvantilis $\Phi^{-1}(z)$ lesz, ami nem más, mint a z megbízhatósági szintű, vagyis $1 - z$ szignifikanciaszintű egyoldali z-próba kritikus értéke.

Kiszámítás az R-ben: `qnorm(0.9, mean=4, sd=3)` a 90%-os kvantilis adott várható érték és szórás esetén. Ennek értéke: $7,84$.

A fenti példában tehát ez azt jelenti, hogy a középhőmérséklet értéke 90% valószínűséggel lesz $7,84$ foknál kisebb.

4. További nevezetes abszolút folytonos eloszlások

Az alábbi eloszlások többek között **statisztikai alkalmazásokban** fordulnak elő:

- t-eloszlás: t-próba, például két eloszlás **várható értékének** összehasonlítására
- F-eloszlás: F-próba, például két eloszlás **szórásának** összehasonlítására
- χ^2-eloszlás: χ^2-próba, például annak eldöntésére, hogy két tulajdonság között van-e **összefüggés**
- gamma-eloszás: nemnegatív valószínűségi változók modellezésére
- beta-eloszlás: $[0, 1]$-értékű valószínűségi változók modellezésére

4.1. t-eloszlás

Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_f$ és Y független standard normális eloszlású valószínűségi változók. Ekkor a

$$Z = \frac{Y}{\sqrt{(X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_f^2)/f}}$$

valószínűségi változó eloszlását f szabadsági fokú **t-eloszlásnak** (vagy Student-eloszlásnak) nevezzük.

Az $f = 1$ szabadsági fokú t-eloszlás, vagyis Y/X eloszlása a **Cauchy-eloszlás**. Ennek sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + x^2}.$$

A Cauchy-eloszlásnak sem várható értéke, sem szórása nem létezik: $\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx$ nem értelmezhető, mert $\int_0^{\infty} \frac{1}{x}\, dx$ integrál nem véges. Hasonlóképpen a többi t-eloszlásnak sem létezik a várható értéke.

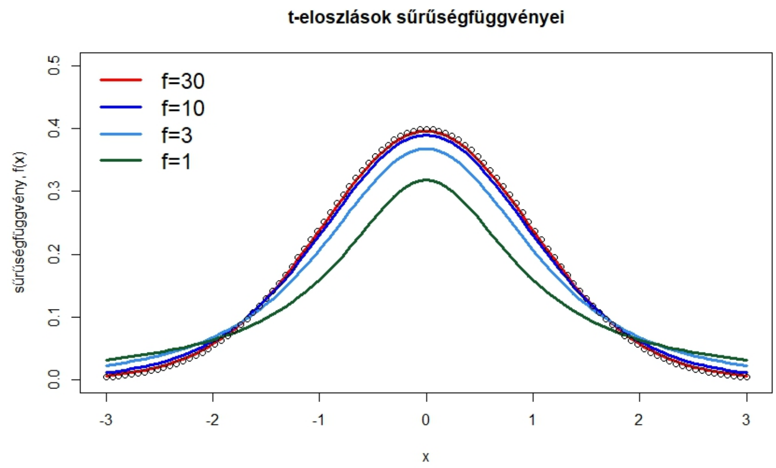
Ha f nagy, akkor az f szabadsági fokú t-eloszlás közel esik a standard normális eloszláshoz, $f > 30$ esetén a t-eloszlást gyakran a normális eloszlással helyettesítik a számolásokban.

4.2. F-eloszlás

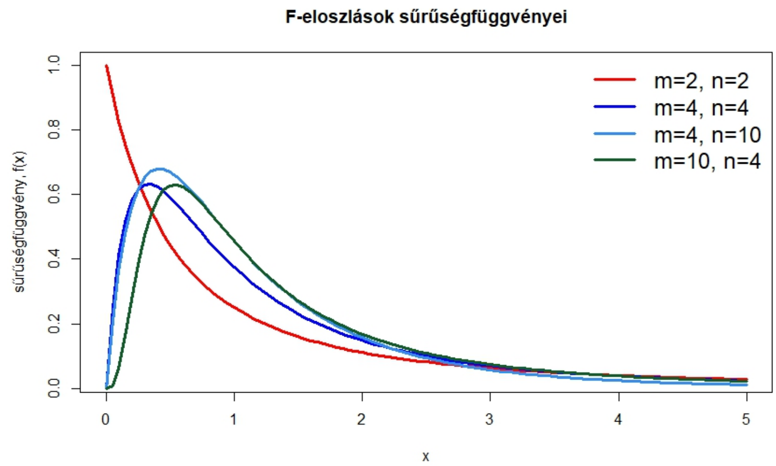
Legyenek m, n pozitív egészek, $X_1, \ldots, X_m$, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ pedig független standard normális eloszlású valószínűségi változók. Ekkor az

$$F = \frac{n(X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_m^2)}{m(Y_1^2 + Y_2^2 + \ldots + Y_n^2)}$$

valószínűségi változó eloszlását m, n szabadsági fokú **F-eloszlásnak** nevezzük.



11. ábra. Különböző szabadsági fokú t-eloszlások sűrűségfüggvényei. A pöttyözött vonal a standard normális eloszlás sűrűségfüggvényét jelöli, ez közel van a t-eloszlás sűrűségfüggvényéhez, ha f nagy.



12. ábra. Különböző szabadsági fokú F-eloszlások sűrűségfüggvényei

4.3. χ^2-eloszlás

Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_q$ független standard normális eloszlású valószínűségi változók. Az

$$Y = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_q^2$$

valószínűségi változó eloszlását q szabadsági fokú **χ^2-eloszlásnak** nevezzük. Ennek sűrűségfüggvénye:

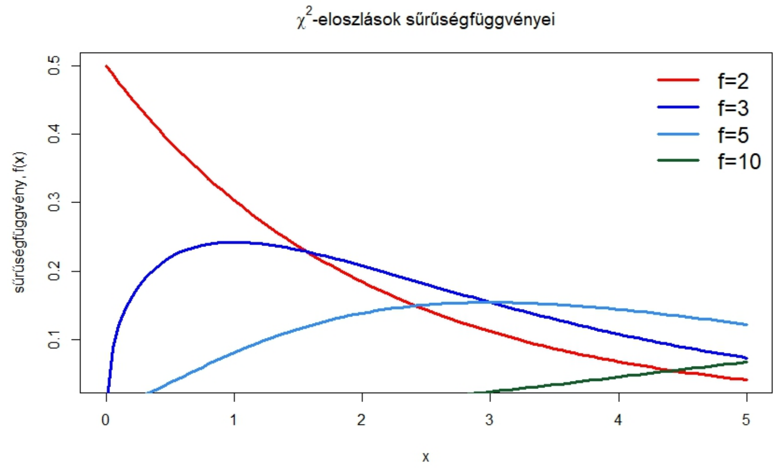
$$f(t) = \begin{cases} \frac{t^{q/2-1}}{2^{q/2}\Gamma(q/2)} e^{-t/2}, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

4.4. Gamma-eloszlás

Gamma-függvény. Ha $a > 0$ pozitív szám, legyen

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt.$$

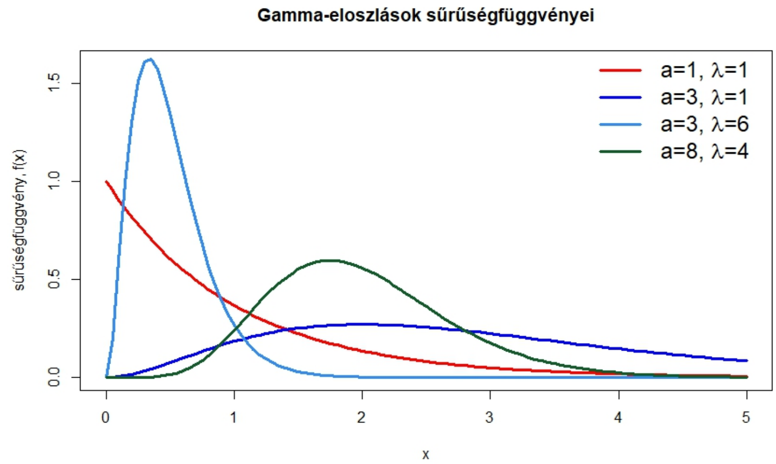
Parciális integrálással belátható, hogy $\Gamma(a) = (a-1)\Gamma(a-1)$ minden $a > 1$-re, és így $\Gamma(n) = (n-1)!$, ha n pozitív egész.



13. ábra. Különböző szabadsági fokú χ^2-eloszlások sűrűségfüggvényei

4.1. Definíció. *Legyenek a és λ pozitív számok. Az X valószínűségi változó* **gamma-eloszlású** *a renddel és λ paraméterrel, ha sűrűségfüggvénye*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^a x^{a-1}}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$



14. ábra. Különböző paraméterű gamma-eloszlások sűrűségfüggvényei

A gamma-eloszlás tulajdonságai:

- **Kapcsolat az exponenciális eloszlással**: ha $a = 1$, akkor a sűrűségfüggvény $\lambda e^{-\lambda x}$, ha $x \geq 0$, és az exponenciális eloszlást kapjuk vissza.
- **Exponenciális eloszlások összege:** ha $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók, akkor $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ gamma-eloszlású $a = n$ renddel és λ paraméterrel.
- **Kapcsolat a χ^2-eloszlással**: ha $a = q/2$ és $\lambda = 1/2$, akkor a q szabadsági fokú χ^2-eloszlást kapjuk vissza.
- **Várható érték** és **szórás:**

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a}{\lambda}; \qquad D(X) = \frac{\sqrt{a}}{\lambda}.$$

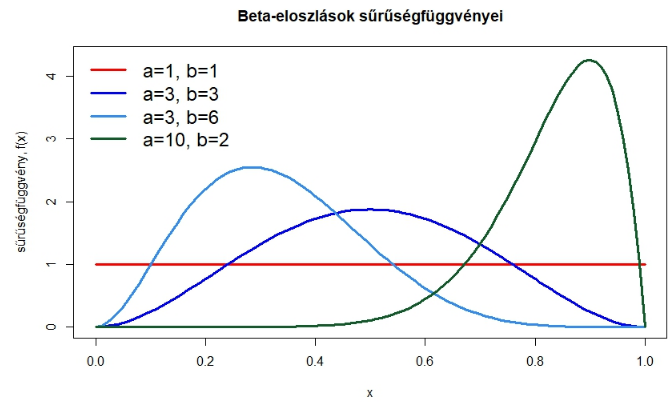
4.5. Beta-eloszlás

4.2. Definíció. *Legyenek $a, b > 1$ számok. Az X valószínűségi változó* **beta-eloszlású** *a és b paraméterekkel, ha sűrűségfüggvénye*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, & t \in [0,1]; \\ 0, & x < 0 \text{ vagy } x > 1. \end{cases}$$

Ha $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független, a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók, és X_k^* jelöli ebben a mintában a k. legnagyobb számot, akkor X_k^* eloszlása beta-eloszlás $a = k$ és $b = n - k + 1$ paraméterekkel.

Az $a = 1$ és $b = 1$ választással az **egyenletes eloszlást** kapjuk vissza.



15. ábra. Különböző paraméterű beta-eloszlások sűrűségfüggvényei

---

Házi feladat november 25., szerda, 8:00-ig Tegyük fel, hogy egy ember jövedelme normális eloszlású 300 várható értékkel és 100 szórással.

Mi lesz a jövedelem 90%-os, illetve 95%-os kvantilise a két esetben?

A normális eloszlás esetén sorsoljunk 10000 elemű mintát a megadott eloszlásból (az `rnom` parancs segítségével), határozzuk meg a minta 90%-os és 95%-os kvantilisét, és hasonlítsuk össze a fent kiszámított értékkel.