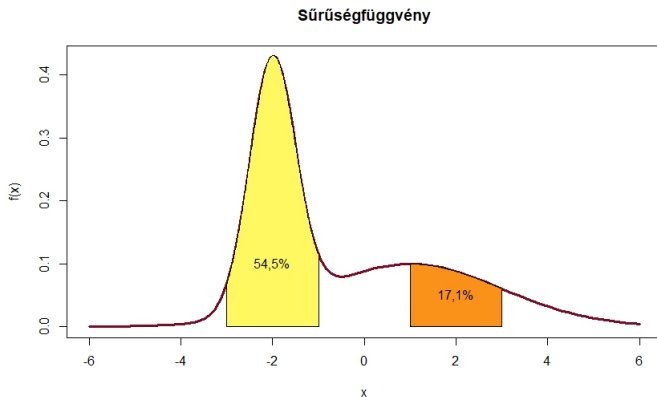


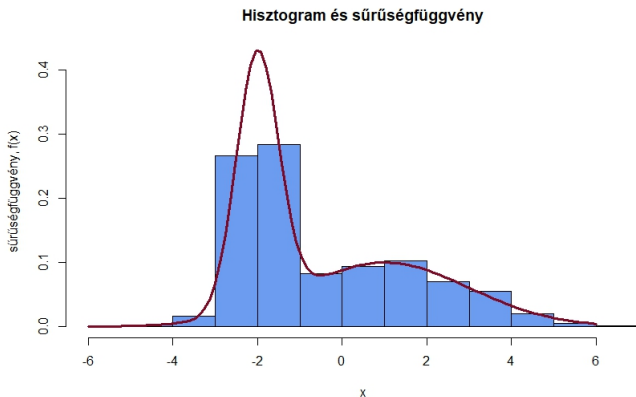
Sűrűségfüggvény (8. előadás)



Ha X sűrűségfüggvénye f (ami most az ábrán látható függvény): $\mathbb{P}(-3 \leq X \leq -1) = \int_{-3}^{-1} f(x) dx = \mathbf{54,5\%}$;

$\mathbb{P}(1 \leq X \leq 3) = \int_1^3 f(x) dx = \mathbf{17,1\%}$.

Sűrűségfüggvény



Egy sűrűségfüggvény és hozzá tartozó ezer elemű független minta hisztogramja;
nagyobb a sűrűségfüggvény \rightarrow nagyobb a gyakoriság;
minta: független valószínűségi változók, melyek mindegyikének f a sűrűségfüggvénye

Sűrűségfüggvény: definíció

Az $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változó **sűrűségfüggvénye** az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, ha

$$\mathbb{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$$

teljesül minden $t \in \mathbb{R}$ számra.

Nem minden valószínűségi változónak van sűrűségfüggvénye, például a diszkrétnek nincs. Ha X -nek **van sűrűségfüggvénye**, akkor **abszolút folytonos** valószínűségi változónak nevezzük.

Ha az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye f , akkor tetszőleges $a < b$ számokra

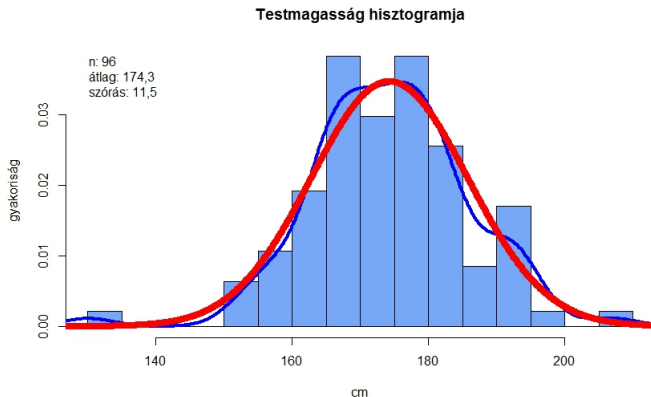
$$\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx.$$

Normális eloszlás: bevezetés

Ha egy, a valóságban megfigyelhető valószínűségi változó eloszlását, pontosabban a **sűrűségfüggvényét** szeretnénk meghatározni:

- az adatokból készíthetünk hisztogramot;
- a hisztogram és a sűrűségfüggvény alakja sok független megfigyelés esetén „közel” van egymáshoz;
- megfigyelhetjük, hogy különféle mennyiségek esetén a hisztogramok gyakran **hasonló alakúak** → a gyakran előforduló sűrűségfüggvény-típusokat érdemes külön megérteni;
- az egyik ilyen a **normális eloszlás**, melynek sűrűségfüggvénye az e^{-x^2} függvényből származtatható
- például különféle *mérési eredmények* (a mérési hibák következtében), illetve élőlények *biológiai jellemzői* gyakran normális eloszlást követnek (például: testmagasság)
- a normális eloszlás a **statisztikában** is kulcsfontosságú

Testmagasság



Testmagasság histogramja $n = 96$ elemű mintából (valós adatokból), és az $m = \bar{X} = 174,3$ várható értékű és $\sigma = 11,5$ szórású normális eloszlás sűrűségfüggvénye (pirossal): $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 11,5^2}} \exp(-(x - 174,3)^2 / (2 \cdot 11,5^2))$

Normális eloszlás: definíció

Legyen m valós, σ pedig pozitív szám. Azt mondjuk, hogy az Y valószínűségi változó **normális eloszlású** m várható értékkel és σ^2 szórásnégyzettel, ha **sűrűségfüggvénye**

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

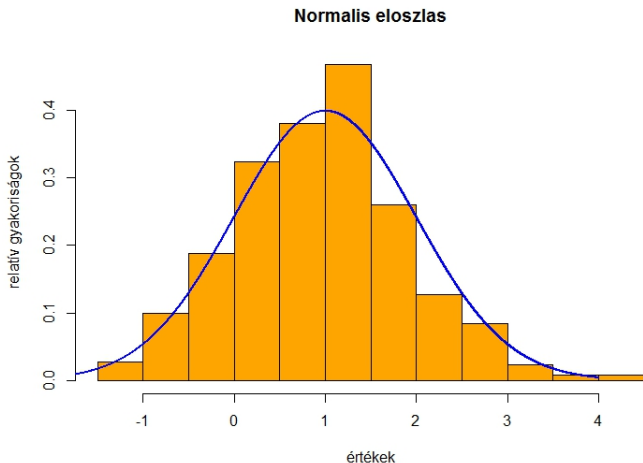
Jelölése: $Y \sim N(m, \sigma^2)$.

Ha $Y \sim N(m, \sigma^2)$, akkor $\mathbb{E}(Y) = m$, $D(Y) = \sigma$.

Standard normális eloszlás: az $m = 0$ várható értékű és $\sigma = 1$ szórással rendelkező normális eloszlás. **Eloszlásfüggvénye:** Φ , sűrűségfüggvénye φ , ahol

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^t \varphi(x) dx; \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

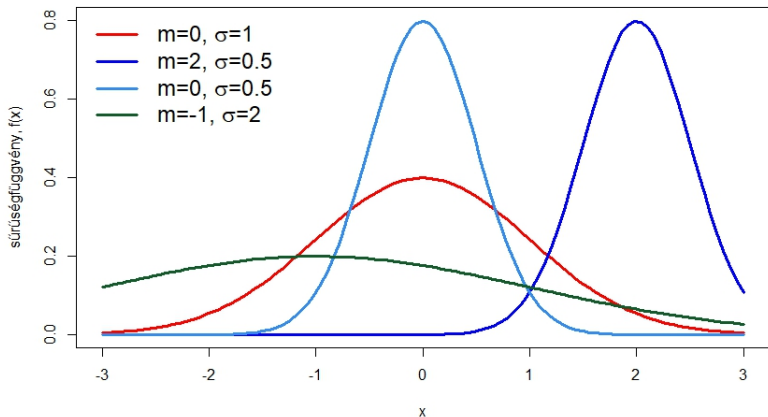
Normális eloszlás



Normális eloszlás ($m = 1, \sigma = 1$) sűrűségfüggvénye és 500 darab független, $N(1, 1)$ eloszlású valószínűségi változóból álló minta hisztogramja

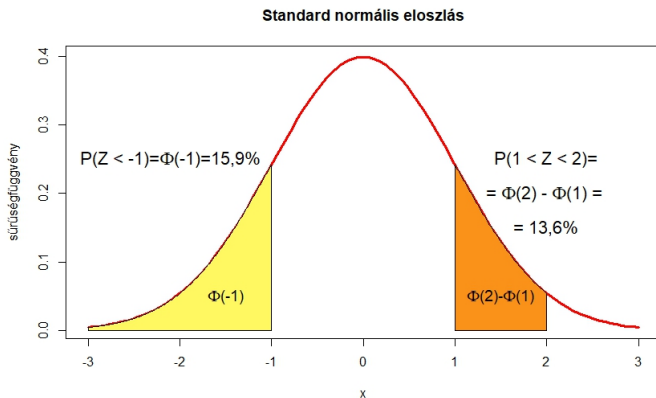
Normális eloszlás

Normális eloszlások sűrűségfüggvényei



Különböző várható értékű (m) és szórású (σ) normális eloszlások sűrűségfüggvényei

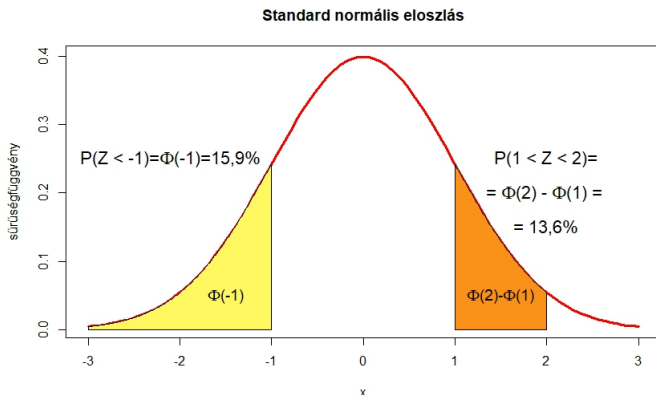
A Φ függvény



A Φ függvény a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye: ha $Z \sim N(0, 1)$, akkor

$$\mathbb{P}(Z \leq t) = \Phi(t) = \int_{-\infty}^t \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx.$$

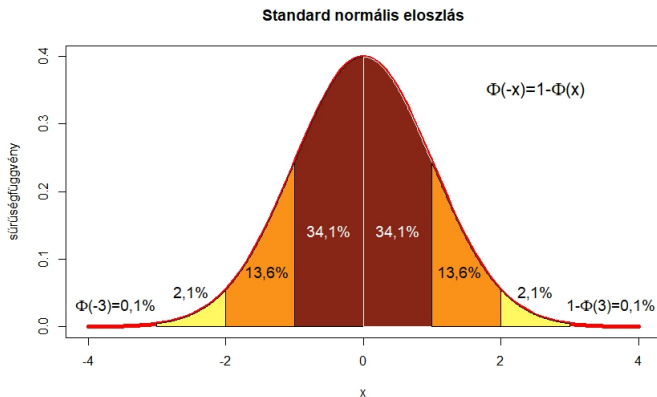
Standard normális eloszlás



A Φ függvény a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye: ha $Z \sim N(0,1)$, akkor

$$\mathbb{P}(a \leq Z \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx.$$

Standard normális eloszlás



A Φ függvény a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye: ha $Z \sim N(0,1)$, akkor

$$\mathbb{P}(a \leq Z \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx.$$

Standard normális eloszlás

A Z valószínűségi változó **standard normális eloszlású**, azaz $Z \sim N(0,1)$, ha sűrűségfüggvénye

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Ekkor **eloszlásfüggvénye** Φ , azaz

$$\Phi(t) = \mathbb{P}(Z \leq t) = \mathbb{P}(Z < t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

Továbbá

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(a < X < b) &= \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X < a) = \\ &= \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \Phi(b) - \Phi(a). \end{aligned}$$

Más normális eloszlások esetén ezeket a valószínűségeket a Φ függvényre vezetjük vissza.

A normális eloszlás tulajdonságai

Tegyük fel, hogy Y normális eloszlású m várható értékkel és σ^2 szórásnégyzettel, azaz $Y \sim N(m, \sigma^2)$. Ekkor tetszőleges $a \leq b$ valós számokra

$$\mathbb{P}(Y < b) = \mathbb{P}(Y \leq b) = \mathbb{P}\left(\frac{Y - m}{\sigma} \leq \frac{b - m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b - m}{\sigma}\right)$$

$$\mathbb{P}(Y > a) = \mathbb{P}(Y \geq a) = 1 - \Phi\left(\frac{a - m}{\sigma}\right)$$

$$\mathbb{P}(a < Y < b) = \mathbb{P}(a \leq Y \leq b) = \Phi\left(\frac{b - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - m}{\sigma}\right)$$

$$\mathbb{P}(|Y - m| \leq b) = 2\Phi\left(\frac{b}{\sigma}\right) - 1$$

Normális eloszlás: példa

Tegyük fel, hogy az Y valószínűségi változó normális eloszlású $m = 4$ várható értékkel és $\sigma = 3$ szórással. Ekkor

$$\mathbb{P}(Y \leq 7) = \Phi\left(\frac{7 - m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{7 - 4}{3}\right) = \Phi(1) = \mathbf{84,1\%}.$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(1 < Y \leq 7) &= \mathbb{P}(Y \leq 7) - \mathbb{P}(Y \leq 1) = \Phi\left(\frac{7 - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{1 - m}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{7 - 4}{3}\right) - \Phi\left(\frac{1 - 4}{3}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) = \\ &= 2\Phi(1) - 1 = \mathbf{68,2\%},\end{aligned}$$

mert

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

minden valós x -re érvényes a sűrűségfüggvény 0-ra való szimmetriája miatt.

A normális eloszlás tulajdonságai

Lineáris transzformáció. Legyen Y normális eloszlású valószínűségi változó m várható értékkel és σ szórással, és a, b valós számok. Ekkor az $aY + b$ valószínűségi változó normális eloszlású $am + b$ várható értékkel és $a^2\sigma^2$ szórásnégyzettel, azaz

$$Y \sim N(m, \sigma^2) \quad \Rightarrow \quad aY + b \sim N(am + b, a^2\sigma^2).$$

Független összeg. Ha Y_1, Y_2 **független, normális eloszlású** valószínűségi változók, akkor $Y_1 + Y_2$ is **normális eloszlású**, várható értéke $m_1 + m_2$, szórásnégyzete $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$, ahol $Y_1 \sim N(m_1, \sigma_1^2)$ és $Y_2 \sim N(m_2, \sigma_2^2)$

Példa. Ha Y és Z függetlenek, normális eloszlásúak, $Y \sim N(2, 3^2)$ és $Z \sim N(1, 4^2)$, akkor

$$Y + Z \sim N(3, 5^2); \quad Y - Z \sim N(1, 5^2); \quad Y + 3Z \sim N(5, 57).$$

A normális eloszlás tulajdonságai

Legyenek Y_1, Y_2, \dots, Y_n **független normális eloszlású** valószínűségi változók, melyek várható értéke m , szórásuk σ . Ekkor az **összegük** és **az átlaguk is normális eloszlású**, és

$$Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n \sim N(nm, n\sigma^2);$$

$$\frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n}{n} \sim N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

A normális eloszlás tulajdonságai

Legyenek Y_1, Y_2, \dots, Y_n **független normális eloszlású** valószínűségi változók, melyek várható értéke m , szórásuk σ . Ekkor az **összegük** és **az átlaguk is normális eloszlású**, és

$$Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n \sim N(nm, n\sigma^2);$$

$$\frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n}{n} \sim N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

Példa. Tegyük fel, hogy az emberek testmagassága 176 cm várható értékű és 7 szórású valószínűségi változó. Ekkor

- 100 ember testmagasságának átlaga szintén normális eloszlású, 176 várható értékkel és $7/\sqrt{100} = 0,7$ szórással;
- 10000 ember testmagasságának átlaga normális eloszlású, 176 várható értékkel és $7/\sqrt{10000} = 0,07$ szórással.

Egyenletes eloszlás: példa

- Csomagot várunk, amit a futár véletlen Y időpontban hoz ki.
- Feltételezzük, hogy Y egyenletes eloszlású a $[8, 12]$ intervallumon (órában mérve).
- **Feltéve, hogy a futár 10 óráig még nem érkezett meg, mennyi a valószínűsége, hogy 11 óra előtt megérkezik?**

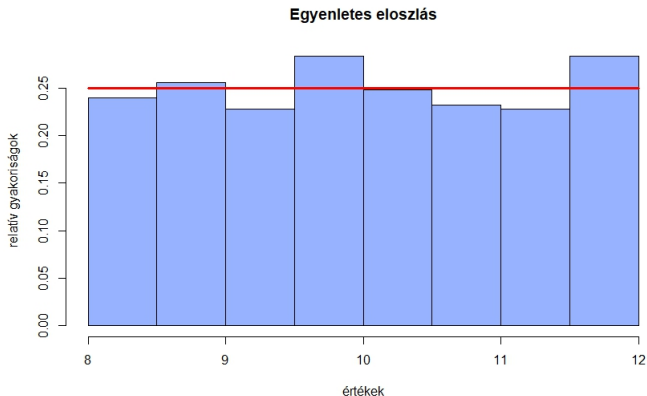
Egyenletes eloszlás: példa

- Csomagot várunk, amit a futár véletlen Y időpontban hoz ki.
- Feltételezzük, hogy Y egyenletes eloszlású a $[8, 12]$ intervallumon (órában mérve).
- **Feltéve, hogy a futár 10 óráig még nem érkezett meg, mennyi a valószínűsége, hogy 11 óra előtt megérkezik?**

Legyen X a futár érkezésének időpontja. Így fogunk tudni számolni:

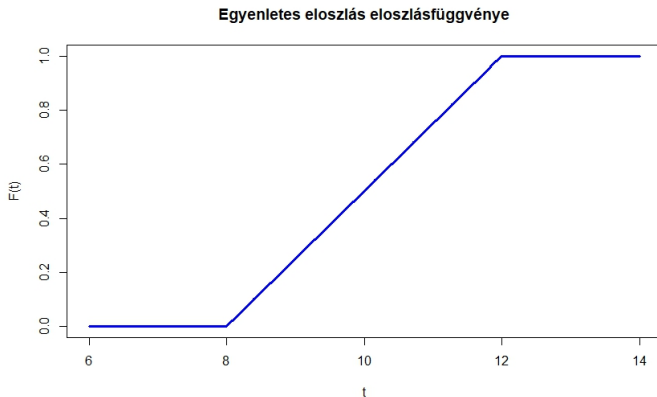
$$\mathbb{P}(X \leq 11 | X > 10) = \frac{\mathbb{P}(\{X \leq 11\} \cap \{X > 10\})}{\mathbb{P}(X > 10)} = \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{2}.$$

Egyenletes eloszlás



A $[8, 12]$ intervallumon egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénye és 500 darab független, $[8, 12]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változóból álló minta hisztogramja

Egyenletes eloszlás eloszlásfüggvénye



A $[8, 12]$ intervallumon egyenletes eloszlás eloszlásfüggvénye

Házi feladat november 13., 10:15-ig

Legyen az X valószínűségi változó egyenletes eloszlású a $[0, 1]$ intervallumon, azaz sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

- (a) Mennyi a valószínűsége, hogy $X \leq t$, ha t tetszőleges valós szám?
- (b) Válasszon egy k számot 23 és 67 között, és határozza meg $\sqrt[k]{X}$ eloszlásfüggvényét, azaz annak valószínűségét, hogy $\sqrt[k]{X} \leq t$.
- (c) Határozza meg $\sqrt[k]{X}$ sűrűségfüggvényét.

Házi feladat november 13., 10:15-ig

Legyen az X valószínűségi változó egyenletes eloszlású a $[0, 1]$ intervallumon, azaz sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Mennyi a valószínűsége, hogy $X \leq t$, ha t tetszőleges valós szám?

$$\mathbb{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx = \int_0^t 1 dx = t, \text{ ha } 0 \leq t \leq 1.$$

Ha $t \leq 0$, akkor $\mathbb{P}(X \leq t) = 0$, és ha $t > 1$, akkor $\mathbb{P}(X \leq t) = 1$.

Házi feladat november 13., 10:15-ig

Legyen az X valószínűségi változó egyenletes eloszlású a $[0, 1]$ intervallumon, azaz sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Mennyi a valószínűsége, hogy $X \leq t$, ha t tetszőleges valós szám?

$$\mathbb{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx = \int_0^t 1 dx = t, \text{ ha } 0 \leq t \leq 1.$$

Ha $t \leq 0$, akkor $\mathbb{P}(X \leq t) = 0$, és ha $t > 1$, akkor $\mathbb{P}(X \leq t) = 1$.

Legyen k tetszőleges egész. Ekkor $\sqrt[k]{X}$ eloszlásfüggvénye:

$$F(t) = \mathbb{P}(\sqrt[k]{X} \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t^k) = t^k,$$

Ha $t \geq 0$, akkor $\mathbb{P}(\sqrt[k]{X} \leq t) = 0$, és ha $t > 1$, akkor $\mathbb{P}(\sqrt[k]{X} \leq t) = 1$.

Házi feladat november 13., 10:15-ig

Legyen az X valószínűségi változó egyenletes eloszlású a $[0, 1]$ intervallumon, azaz sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Legyen $23 \leq k \leq 67$. Ekkor $\sqrt[k]{X}$ eloszlásfüggvénye:

$$F(t) = \mathbb{P}(\sqrt[k]{X} \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t^k) = t^k,$$

Ha $t \leq 0$, akkor $\mathbb{P}(\sqrt[k]{X} \leq t) = 0$, és ha $t > 1$, akkor $\mathbb{P}(\sqrt[k]{X} \leq t) = 1$.

Házi feladat november 13., 10:15-ig

Legyen az X valószínűségi változó egyenletes eloszlású a $[0, 1]$ intervallumon, azaz sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Legyen $23 \leq k \leq 67$. Ekkor $\sqrt[k]{X}$ eloszlásfüggvénye:

$$F(t) = \mathbb{P}(\sqrt[k]{X} \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t^k) = t^k,$$

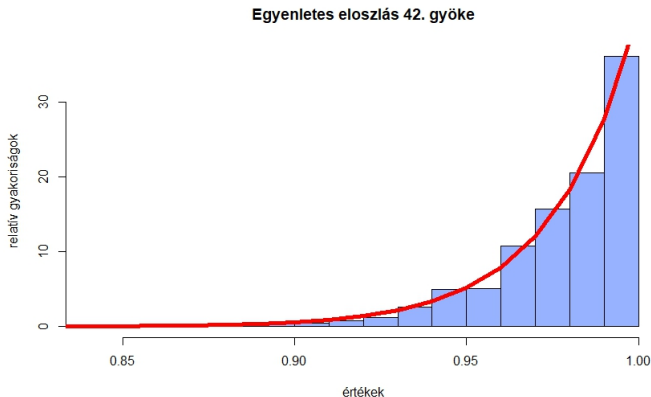
Ha $t \leq 0$, akkor $\mathbb{P}(\sqrt[k]{X} \leq t) = 0$, és ha $t > 1$, akkor $\mathbb{P}(\sqrt[k]{X} \leq t) = 1$.

Ebből látható, hogy

$$f(t) = \begin{cases} kt^{k-1}, & \text{ha } 0 \leq t \leq 1; \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}.$$

akkor a $\sqrt[k]{X}$ sűrűségfüggvénye, hiszen $\int_{-\infty}^t f(s) ds = F(t)$ teljesül minden t valós számra.

Házi feladat november 13., 10:15-ig



A $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlás 42. gyökének hisztogramja 1000 elemű mintából, és a sűrűségfüggvénye

Házi feladat november 13., 10:15-ig

1000 elemű, egyenletes eloszlású mintában elemenként 42. gyököt veszünk, majd hisztogramot készítünk.

```
x<-runif(min=0,max=1, n=1000)
```

```
y<-x^(1/42)
```

```
hist(y, freq=FALSE, col="#97B3FF",  
main="Egyenletes eloszlás 42. gyöke", xlab="értékek",  
ylab="relatív gyakoriságok")
```

```
curve(42*x^41, from=0, to=1, col="red", lwd="5", add=T)
```

A görbe a sűrűségfüggvény:

$$f(t) = \begin{cases} kt^{k-1}, & \text{ha } 0 \leq t \leq 1; \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}.$$

akkor a $\sqrt[k]{X}$ sűrűségfüggvénye, hiszen $\int_{-\infty}^t f(s) ds = F(t)$ teljesül minden t valós számra.

Az egyenletes eloszlás várható értéke

Az $[a, b]$ intervallumon egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénye:

$$f(s) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } a \leq s \leq b; \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Ha X egyenletes eloszlású az $[a, b]$ intervallumon, akkor várható értéke

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} s \cdot f(s) ds = \int_a^b s \cdot \frac{1}{b-a} ds = \frac{1}{b-a} \left[\frac{s^2}{2} \right]_{s=a}^b = \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{a+b}{2}, \end{aligned}$$

hiszen az x függvény primitív függvénye $\frac{x^2}{2}$, és $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$.

Az egyenletes eloszlás szórása

Az $[a, b]$ intervallumon egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénye:

$$f(s) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } a \leq s \leq b; \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Ha X egyenletes eloszlású az $[a, b]$ intervallumon, akkor várható értéke

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} s^2 \cdot f(s) ds = \int_a^b s^2 \cdot \frac{1}{b-a} ds = \frac{1}{b-a} \left[\frac{s^3}{3} \right]_{s=a}^b \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^3 - a^3}{3} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}, \end{aligned}$$

hiszen az x^2 függvény primitív függvénye $\frac{x^3}{3}$, és $b^3 - a^3 = (b-a)(a^2 + ab + b^2)$.

Az egyenletes eloszlás szórása

Az $[a, b]$ intervallumon egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénye:

$$f(s) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } a \leq s \leq b; \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Ha X egyenletes eloszlású az $[a, b]$ intervallumon, akkor várható értéke

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} s^2 \cdot f(s) ds = \int_a^b s^2 \cdot \frac{1}{b-a} ds = \frac{1}{b-a} \left[\frac{s^3}{3} \right]_{s=a}^b \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^3 - a^3}{3} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}, \end{aligned}$$

hiszen az x^2 függvény primitív függvénye $\frac{x^3}{3}$, és $b^3 - a^3 = (b-a)(a^2 + ab + b^2)$.

$$\begin{aligned} D^2(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \\ &= \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = \frac{4a^2 + 4ab + 4b^2 - 3a^2 - 6ab - 3b^2}{12} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{12}. \end{aligned}$$

Egyenletes eloszlás (uniform distribution)

Az X valószínűségi változó **egyenletes eloszlású** az $[a, b]$ intervallumon, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } a \leq x \leq b; \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Ekkor

(i) X eloszlásfüggvénye:

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \leq a; \\ \frac{t-a}{b-a}, & \text{ha } a < t < b; \\ 1, & \text{ha } t \geq b. \end{cases}$$

(ii) Ha $a \leq c \leq d \leq b$, akkor

$$\mathbb{P}(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(x) dx = \int_c^d \frac{1}{b-a} dx = \frac{d-c}{b-a}.$$

(iii) Az X valószínűségi változó **várható értéke** és **szórása**:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}; \quad D(X) = \frac{b-a}{\sqrt{12}}.$$

Példa: egyenletes eloszlás

Csomagot várunk, a futár érkezésének időpontja, Y ,
egyenletes eloszlású a $[8, 12]$ intervallumon.

Mennyi a valószínűsége, hogy **10 és 11 óra között** érkezik?

$$\mathbb{P}(10 \leq Y \leq 11) =$$

Mennyi a valószínűsége, hogy **11 : 45 után** érkezik?

$$\mathbb{P}(Y > 11,75) =$$

Mennyi az érkezési időpontjának **várható értéke**?

$$\mathbb{E}(X) =$$

Mennyi az érkezési időpontjának **szórása**?

$$D(X) =$$

Példa: egyenletes eloszlás

Csomagot várunk, a futár érkezésének időpontja, Y ,
egyenletes eloszlású a $[8, 12]$ intervallumon.

Mennyi a valószínűsége, hogy **10 és 11 óra között** érkezik?

$$\mathbb{P}(10 \leq Y \leq 11) = \frac{d-c}{b-a} = \frac{11-10}{12-8} = \mathbf{25\%}.$$

Mennyi a valószínűsége, hogy **11 : 45 után** érkezik?

$$\mathbb{P}(Y > 11,75) = \frac{d-c}{b-a} = \frac{12-11,75}{12-8} = \frac{1}{16} = \mathbf{6,25\%}.$$

Mennyi az érkezési időpontjának **várható értéke**?

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{8+12}{2} = \mathbf{10}.$$

Mennyi az érkezési időpontjának **szórása**?

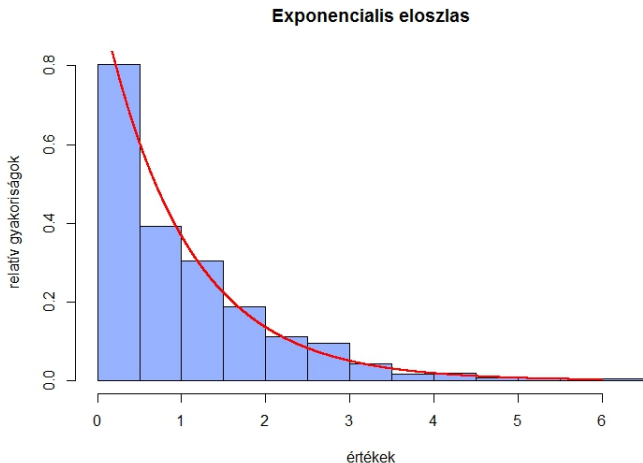
$$D(X) = \frac{b-a}{\sqrt{12}} = \frac{12-8}{\sqrt{12}} = \mathbf{1,16}.$$

Exponenciális eloszlás

Az **exponenciális eloszlás** sokszor használható véletlen időtartamok modellezésére, például

- egy művelet elvégzésének ideje: egy ember kiszolgálása egy boltban, vagy egy számítás elvégzése egy számítógépen
- egy ember reakcióideje
- két esemény bekövetkezése között eltelt idő, például egy üzletben két ügyfél érkezése közötti idő
- járványterjedés modellezésénél: a fertőzés átadásának vagy a gyógyulásnak az ideje
- radioaktív részecske bomlási ideje

Exponenciális eloszlás



$\lambda = 1$ paraméterű exponenciális eloszlás sűrűségfüggvénye és 500 darab független, 1 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változóból álló minta hisztogramja

Exponenciális eloszlás: definíció és tulajdonságok

Legyen $\lambda > 0$ valós szám. Az X valószínűségi változó **exponenciális eloszlású** λ paraméterrel, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0; \\ 0, & \text{különbén.} \end{cases}$$

Ekkor

(i) X eloszlásfüggvénye:

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & \text{ha } t > 0; \\ 0 & \text{különbén.} \end{cases}$$

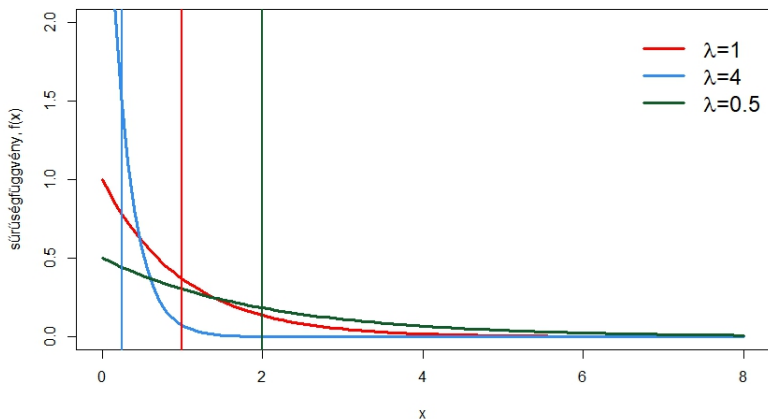
(ii) X várható értéke: $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$, szórása: $\mathbf{D}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

(iii) **Örökifjú tulajdonság.** Legyenek s, t pozitív számok. Ekkor

$$\mathbb{P}(X \geq s + t | X \geq s) = \mathbb{P}(X \geq t).$$

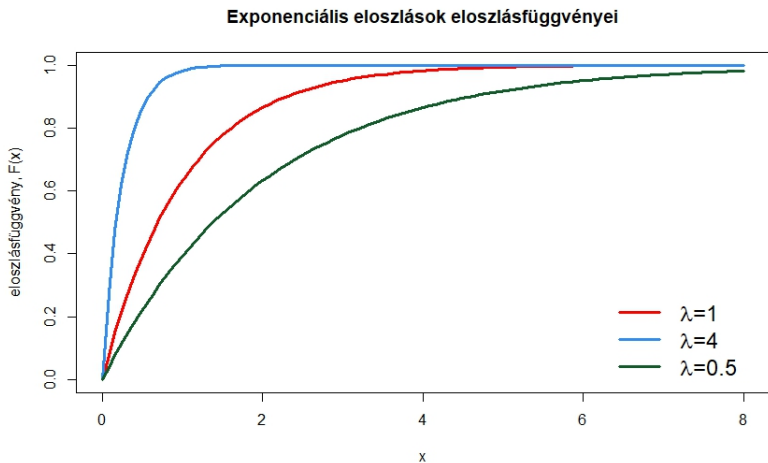
Exponenciális eloszlás

Exponenciális eloszlások sűrűségfüggvényei



Különböző paraméterű ($\lambda = \frac{1}{2}, 1$, illetve 4) exponenciális eloszlások sűrűségfüggvényei és a várható értékeik: $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} = 2, 1$ illetve $\frac{1}{4}$

Exponenciális eloszlás



Különböző paraméterű ($\lambda = \frac{1}{2}, 1$, illetve 4) exponenciális eloszlások eloszlásfüggvényei

Az exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonsága

Állítás

Legyen X exponenciális eloszlású valószínűségi változó, s, t pozitív számok. Ekkor

$$\mathbb{P}(X \geq s + t | X \geq s) = \mathbb{P}(X \geq t).$$

Bizonyítás. A feltételes valószínűség definícióját és az exponenciális eloszlás eloszlásfüggvényének alakját felhasználva

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq s + t | X \geq s) &= \frac{\mathbb{P}(\{X \geq s + t\} \cap \{X \geq s\})}{\mathbb{P}(X \geq s)} = \frac{1 - \mathbb{P}(X < s + t)}{1 - \mathbb{P}(X < s)} = \\ &= \frac{1 - F(s + t)}{1 - F(s)} = \frac{1 - (1 - e^{-\lambda(s+t)})}{1 - (1 - e^{-\lambda s})} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = \\ &= e^{-\lambda t} = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = 1 - F(t) = \mathbb{P}(X \geq t).\end{aligned}$$

Exponenciális eloszlás: példa

Tegyük fel, hogy egy boltban egy vevő kiszolgálásának ideje (percben számolva) **3 várható értékű exponenciális eloszlású** valószínűségi változó.

Mennyi a valószínűsége, hogy a vevőt **legalább 5 percig** tart kiszolgálni? Mennyi a valószínűsége, hogy a vevő kiszolgálása **legalább 2, de legfeljebb 4 percig** tart?

Exponenciális eloszlás: példa

Tegyük fel, hogy egy boltban egy vevő kiszolgálásának ideje (percben számolva) **3 várható értékű exponenciális eloszlású** valószínűségi változó.

Mennyi a valószínűsége, hogy a vevőt **legalább 5 percig** tart kiszolgálni? Mennyi a valószínűsége, hogy a vevő kiszolgálása **legalább 2, de legfeljebb 4 percig** tart? Legyen X a kiszolgálás ideje. Exponenciális eloszlás esetén

$$\mathbb{E}(X) = 1/\lambda, \text{ és most } \mathbb{E}(X) = 3 \Rightarrow \lambda = 1/3.$$

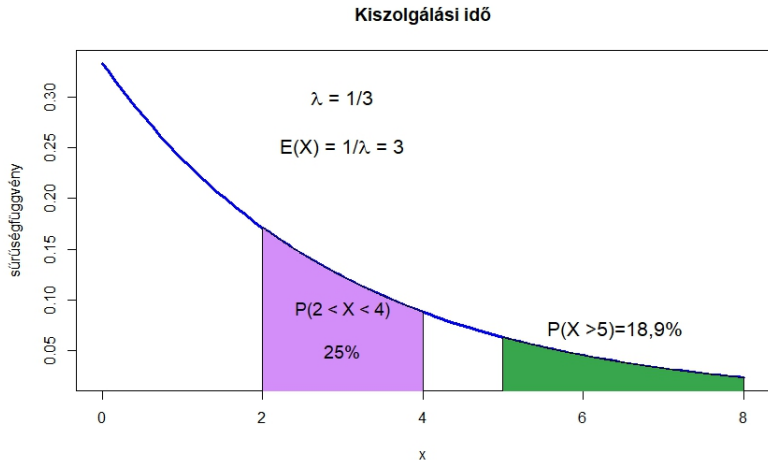
Ezért az eloszlásfüggvény alapján

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 5) &= 1 - \mathbb{P}(X < 5) = 1 - F(5) = 1 - (1 - e^{-\lambda \cdot 5}) = e^{-\lambda \cdot 5} = \\ &= e^{-5/3} = \mathbf{18,9\%}.\end{aligned}$$

Hasonlóképpen

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(2 \leq X \leq 4) &= \mathbb{P}(X \leq 4) - \mathbb{P}(X \leq 2) = F(4) - F(2) = \\ &= (1 - e^{-4/3}) - (1 - e^{-2/3}) = e^{-2/3} - e^{-4/3} = \mathbf{25\%}.\end{aligned}$$

Exponenciális eloszlás: példa



Annak valószínűsége, hogy a kiszolgálás legalább 5 percig tart, illetve hogy legalább 2, de legalább 4 percig, ha a kiszolgálási idő 3 várható értékű exponenciális eloszlású valószínűségi változó

Házi feladat november 20., 10:15-ig

Tegyük fel, hogy egy mosógép élettartama

- (i) exponenciális eloszlású 10 év várható értékkel;
- (ii) normális eloszlású 10 év várható értékkel és 10 év szórással.

Mennyi garanciaidőt adhatunk (évben számolva), ha azt szeretnénk, hogy annak valószínűsége, hogy egy mosógép a garanciaidőn belül elromlik, 5% legyen?