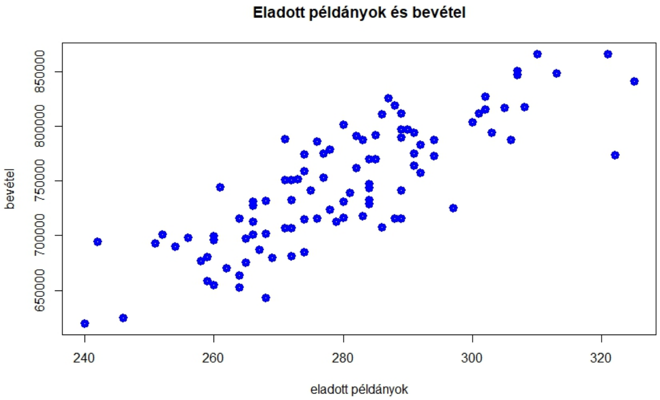
Korrelációs együttható: példa.

Példa. Egy üzletben az A és B újság forgalmát figyelik. Legyen az A újságból egy nap alatt eladott példányok száma X, a B újságból eladott példányok száma Y. Tegyük fel, hogy X és Y függetlenek, Poisson-eloszlásúak, X paramétere 100, Y-é 180. Az A újság ára 300 forint, a B-é **4000**. Mennyi az összesen eladott példányok számának és az ezekből származó bevételnek a korrelációs együtthatója?

$$
\begin{aligned}
\mathrm{cov}(X+Y, 300X+4000Y) &= 300\cdot 100 + 4000\cdot 180 = 750000;\\
D(X+Y) &= \sqrt{D^2(X)+D^2(Y)} = \sqrt{100+180} = 16,73;\\
D(300X+4000Y) &= \sqrt{300^2 D^2(X) + 4000^2 D^2(Y)} =\\
&= \sqrt{300^2\cdot 100 + 4000^2\cdot 180} = 53749,42;\\
R(X+Y, 300X+4000Y) &= \frac{\mathrm{cov}(X+Y, 300X+4000Y)}{D(X+Y)D(300X+4000Y)} = \frac{750000}{16,73\cdot 53749,42}\\
&= 0,83.
\end{aligned}
$$

A korrelációs együttható értéke kisebb, mint abban az esetben, amikor az újságok ára közel egyforma volt.

Korrelációs együttható: példa



A bevétel $(300X + 4000Y)$ és az eladott példányszám $(X + Y)$ együttes előfordulása $n = 100$ megfigyelésből. Kovariancia: 750000, korrelációs együttható: $0,83$.

Házi feladat november 6., 10:15-ig

Kétszer dobunk szabályos dobókockával. Legyen X az első dobás, Y a második.

Számítsuk ki X és $rX + Y$ korrelációs együtthatóját tetszőleges r esetén, és ábrázoljuk ezt r függvényében (kézzel készített ábra is megfelelő).

Milyen r-ek esetén lesz pozitív, negatív, illetve 0 a korrelációs együttható?

Házi feladat november 6., 10:15-ig

Kétszer dobunk szabályos dobókockával. Legyen X az első dobás, Y a második.

Ekkor X és Y **függetlenek**, ezért kovarianciájuk 0. Másrészt, mivel ugyanazokat az értékeket ugyanolyan valószínűséggel veszik fel, eloszlásuk megegyezik, és ezért a szórásuk is: $D(X) = D(Y)$. Ezeket felhasználva:

$$\mathrm{cov}(X, rX + Y) = \mathrm{cov}(X, rX) + \mathrm{cov}(X, Y) = r\mathrm{cov}(X, X) = rD^2(X).$$

Továbbá, felhasználva, hogy független tagok esetén a szórásnégyzetek összeadódnak:

$$D(rX + Y) = \sqrt{D^2(rX) + D^2(Y)} = \sqrt{(r^2 + 1)D^2(X)} = \sqrt{r^2 + 1} \cdot D(X).$$

Vagyis

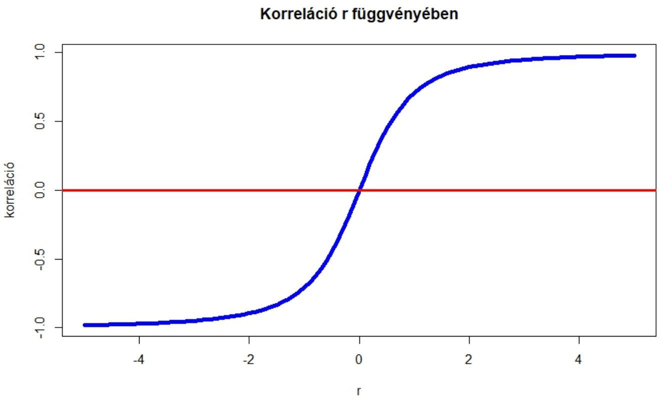
$$R(X, rX + Y) = \frac{\mathrm{cov}(X, rX + Y)}{D(X)D(rX + Y)} = \frac{rD^2(X)}{D(X) \cdot \sqrt{r^2 + 1} \cdot D(X)} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + 1}}.$$

Ennek előjele r előjelével egyezik meg.

Házi feladat november 6., 10:15-ig

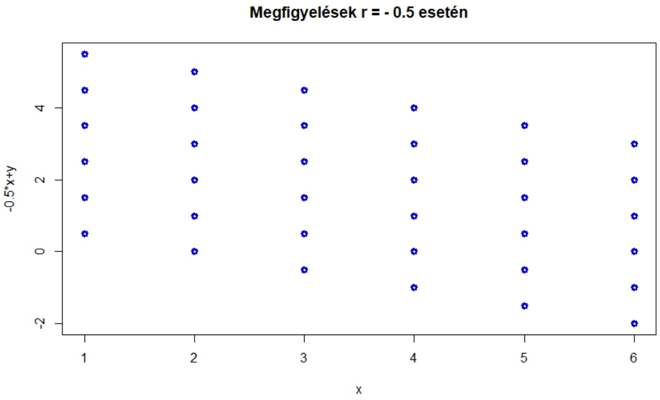
```
> curve(x/sqrt(x^2+1), from=-5, to=5, lwd="5", col="blue", xlab="r",
ylab="korreláció", main="Korreláció r függvényében")
> lines(abline(a=0, b=0, col="red", lwd="3"))
> x=sample(1:6, 500, replace=TRUE)
> y=sample(1:6, 500, replace=TRUE)
> z=-0.5*x + y
> plot(z~ x, lwd="3", col="blue", main="Megfigyelések r = - 0.5 esetén",
xlab="x", ylab="-0.5*x+y")
```

Házi feladat november 6., 10:15-ig



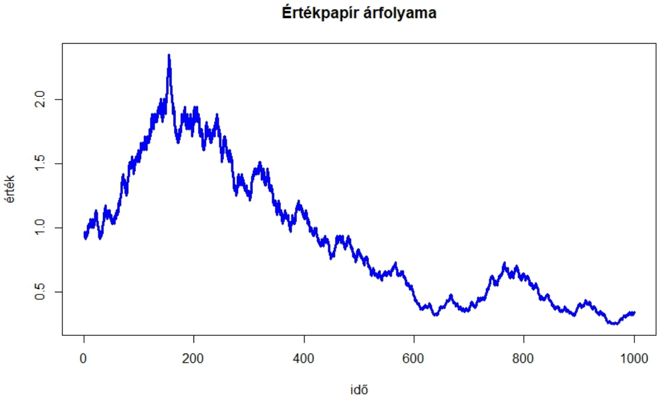
X és $rX + Y$ korrelációs együtthatója r függvényében: $\frac{r}{\sqrt{r^2+1}}$

Házi feladat november 6., 10:15-ig



500 elemű mintából X és $-0,5X+Y$ együttes elhelyezkedése. A korrelációs együttható $-0,45$.

Eloszlásfüggvény: példa

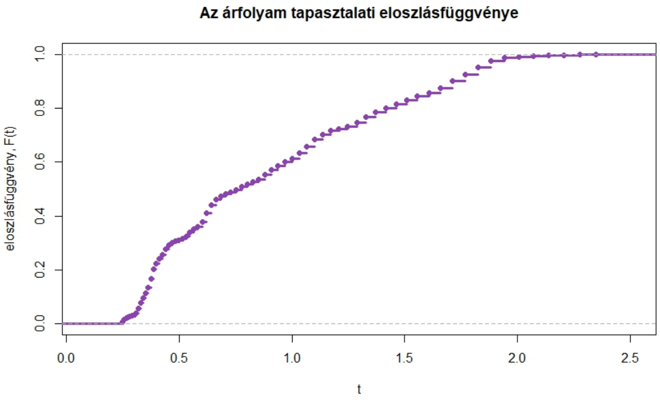


Egy elképzelt értékpapír árfolyama 1000 napon keresztül, 1000 forintban

Eloszlásfüggvény: bevezetés

- X valószínűségi változó: egy véletlen kísérlet eredménye
- eddig: X **diszkrét**, és a $\mathbb{P}(\mathbf{X} = \mathbf{x})$ valószínűségekkel lehet leírni az eloszlását
- ha a lehetséges értékek halmaza „túl nagy", vagy a valószínűségek „túl kicsik", ez nem informatív
- például: X az értékpapír árfolyama holnap, $\mathbb{P}(X = 784) = 0,0038$, $\mathbb{P}(X = 785) = 0,004$, stb. egy előrejelzés szerint $\rightarrow$ ennél hasznosabb információ lehet, hogy
$$\mathbb{P}(\mathbf{X} \leq \mathbf{785}) = 0,5,$$
azaz az értékpapír 50% valószínűséggel nem haladja meg a 785 szintet
- **eloszlásfüggvény**: $F(t)$ annak valószínűsége, hogy **a valószínűségi változó értéke legfeljebb** t, azaz
$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t).$$

Eloszlásfüggvény: példa



t függvényében a t-nél nem nagyobb árfolyamú napok aránya az előző példában

Eloszlásfüggvény: definíció

Legyen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változó. Ekkor X **eloszlásfüggvénye** az alábbi $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ függvény:

$$\mathbf{F(t)} = \mathbb{P}(\mathbf{X} \leq \mathbf{t}) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\})$$

tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ valós számra.

Ez **minden valószínűségi változóra** és minden $t \in \mathbb{R}$ valós számra értelmes: éppen úgy definiáltuk a valószínűségi változót, hogy $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\} \in \mathcal{A}$ egy esemény, tehát van valószínűsége.

Eloszlásfüggvény: példa

Valakinek három gyereke születik, a gyerekek mindegyike egymástól függetlenül $1/2$ valószínűséggel fiú. Nyolc egyformán valószínű eset van:

$$\{\mathbf{LLL}, \mathbf{FLL}, \mathbf{LFL}, \mathbf{LLF}, \mathbf{FFL}, \mathbf{FLF}, \mathbf{LFF}, \mathbf{FFF}\}$$

Legyen X a fiúk száma. X diszkrét valószínűségi változó, lehetséges értékei: $0, 1, 2, 3$, és

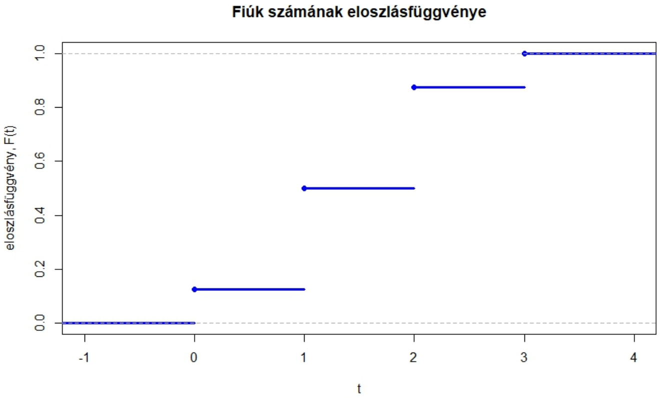
$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbf{\frac{1}{8}}, \quad \mathbb{P}(X = 1) = \mathbf{\frac{3}{8}}, \quad \mathbb{P}(X = 2) = \mathbf{\frac{3}{8}}, \quad \mathbb{P}(X = 3) = \mathbf{\frac{1}{8}}.$$

Az X **eloszlásfüggvényének**, F-nek az értéke néhány helyen:

$$F(0) = \mathbb{P}(X \le 0) = \mathbf{\frac{1}{8}}; \qquad F(1) = \mathbb{P}(X \le 1) = \mathbf{\frac{1}{2}};$$

$$F(2,4) = \mathbb{P}(X \le 2,4) = \mathbf{\frac{7}{8}}; \qquad F(4) = \mathbb{P}(X \le 4) = \mathbf{1}.$$

Eloszlásfüggvény: példa



Három gyerek közül a fiúk számának eloszlásfüggvénye
vízszintes: t, függőleges: $F(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$.

Eloszlásfüggvény

Definíció (Eloszlásfüggvény)

Legyen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *valószínűségi változó. Ekkor* X *eloszlásfüggvénye az alábbi* $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ *függvény:*

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\}) \qquad \textit{minden } t \in \mathbb{R} \textit{ valós számra.}$$

Az eloszlásfüggvény minden t valós számhoz hozzárendeli, hogy mennyi annak valószínűsége, hogy a valószínűségi változó értéke legfeljebb t. Például ha X a fiúk száma három gyerek közül:

$$F(1) = \mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(\text{legfeljebb egy fiú van}) = 1/2;$$

$$F(2) = \mathbb{P}(X \leq 2) = \mathbb{P}(\text{legfeljebb két fiú van}) = 7/8;$$

$$F(2,3) = \mathbb{P}(X \leq 2,3) = \mathbb{P}(\text{legfeljebb } 2,3 \text{ fiú van}) = 7/8;$$

Eloszlásfüggvény

Definíció (Eloszlásfüggvény)

Legyen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *valószínűségi változó. Ekkor* X *eloszlásfüggvénye az alábbi* $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ *függvény:*

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\}) \qquad \textit{minden } t \in \mathbb{R} \textit{ valós számra.}$$

Az eloszlásfüggvény minden t valós számhoz hozzárendeli, hogy mennyi annak valószínűsége, hogy a valószínűségi változó értéke legfeljebb t. Például ha X a fiúk száma három gyerek közül:

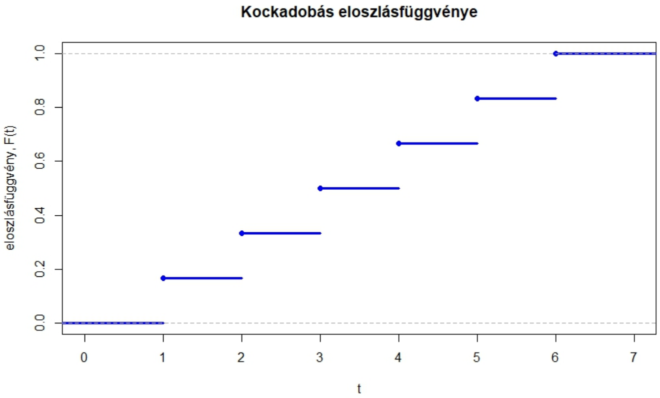
$$F(1) = \mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(\text{legfeljebb egy fiú van}) = 1/2;$$

$$F(2) = \mathbb{P}(X \leq 2) = \mathbb{P}(\text{legfeljebb két fiú van}) = 7/8;$$

$$F(2,3) = \mathbb{P}(X \leq 2,3) = \mathbb{P}(\text{legfeljebb } 2,3 \text{ fiú van}) = 7/8;$$

Véges értékkészletű valószínűségi változók esetén az eloszlásfüggvény lépcsős (véges sok értéket vesz fel), és az ugrások nagyságát az egyes lehetséges értékek valószínűségei adják meg.

Eloszlásfüggvény: példa



Szabályos dobókockával dobott szám eloszlásfüggvénye
vízszintes: t, függőleges: $F(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$.

Az eloszlásfüggvény tulajdonságai

Ha $a, b \in \mathbb{R}$ valós számok, és F az X eloszlásfüggvénye, akkor

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a),$$

hiszen annak valószínűségét, hogy X az a és b közé esik, megkaphatjuk úgy, hogy $\mathbb{P}(X \leq b)$-ből levonjuk $\mathbb{P}(X \leq a)$-t.

Legyen F egy tetszőleges valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. Ekkor

(i) F monoton növő: $a < b$ esetén $F(a) \leq F(b)$.

(ii) $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$; $\qquad \lim_{t\to\infty} F(t) = 1$.

(iii) F jobbról folytonos, azaz minden $t \in \mathbb{R}$ valós számra $\lim_{s\to t+} F(s) = F(t)$.

Fordítva: ha F-re érvényesek ezek a tulajdonságok, akkor van olyan X, aminek F az eloszlásfüggvénye.

Eloszlásfüggvény: példa

Legyen X négy rendű $1/2$ paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó. Mennyi X eloszlásfüggvényének az értéke az $1,5$ helyen?

Eloszlásfüggvény: példa

Legyen X négy rendű $1/2$ paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó. Mennyi X eloszlásfüggvényének az értéke az $1,5$ helyen?

X-re a következőképpen gondolhatunk: $n = 4$ független kísérlet, mindegyik $p = 0,5$ valószínűséggel sikerül, X a **sikeres kísérletek száma.**

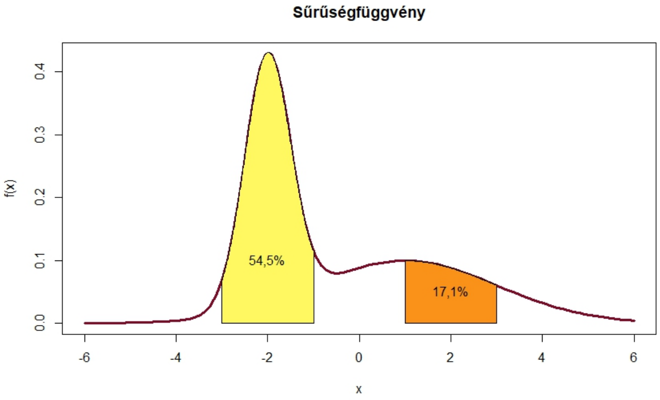
Definíció szerint, ha F az X eloszlásfüggvénye, akkor

$$F(1,5) = \mathbb{P}(X \leq 1,5) = \mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1),$$

hiszen X értéke nemnegatív egész. Így

$$F(1,5) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \mathbf{\frac{5}{16}}.$$

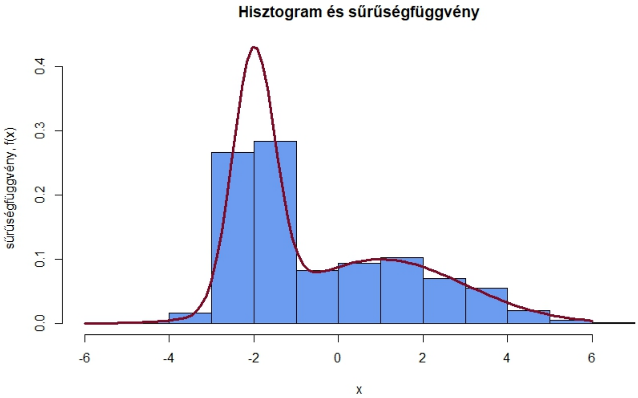
Sűrűségfüggvény



Ha X sűrűségfüggvénye f (ami most az ábrán látható függvény): $\mathbb{P}(-3 \leq X \leq -1) = \int_{-3}^{-1} f(x)dx = \mathbf{54,5\%}$;

$\mathbb{P}(1 \leq X \leq 3) = \int_{1}^{3} f(x)dx = \mathbf{17,1\%}$.

Sűrűségfüggvény



Egy sűrűségfüggvény és hozzá tartozó ezer elemű független minta hisztogramja; nagyobb a sűrűségfüggvény $\rightarrow$ nagyobb a gyakoriság;
minta: független valószínűségi változók, melyek mindegyikének f a sűrűségfüggvénye

Sűrűségfüggvény: definíció

Az $X : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változó **sűrűségfüggvénye** az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, ha

$$\mathbb{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$$

teljesül minden $t \in \mathbb{R}$ számra.

Nem minden valószínűségi változónak van sűrűségfüggvénye, például a diszkréteknek nincs. Ha X-nek **van sűrűségfüggvénye**, akkor **abszolút folytonos** valószínűségi változónak nevezzük.

Ha az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye f, akkor tetszőleges $a < b$ számokra

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

A sűrűségfüggvény tulajdonságai

Legyen X abszolút folytonos valószínűségi változó, melynek F az eloszlásfüggvénye.
(a) Ha f az X sűrűségfüggvénye, akkor minden $t \in \mathbb{R}$ számra

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx.$$

(b) Az $f(t) = F'(t)$ függvény (azokra a t-kre, ahol F differenciálható) az X sűrűségfüggvénye.

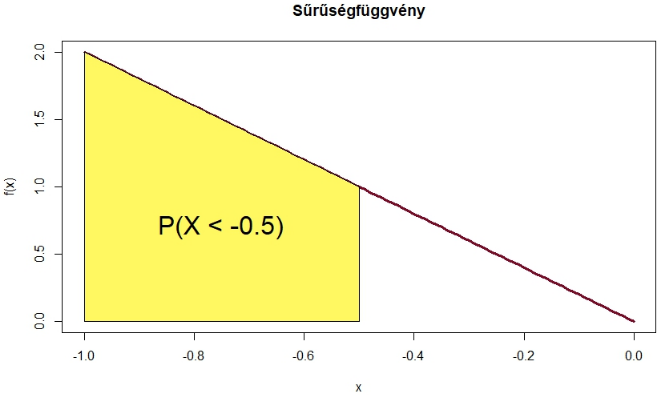
Ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény sűrűségfüggvény, akkor

(i) $f(x) \geq 0$ teljesül „majdnem minden" $x \in \mathbb{R}$-re (például véges vagy megszámlálható sok kivétel lehetséges).

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.

Fordítva: ha f teljesíti ezt a két tulajdonságot, akkor van olyan valószínűségi változó, aminek f a sűrűségfüggvénye.

Sűrűségfüggvény: példa



Ha X sűrűségfüggvénye f, akkor

$$F(-1/2) = \mathbb{P}(X \leq -1/2) = \int_{-\infty}^{-1/2} f(x)\, dx.$$

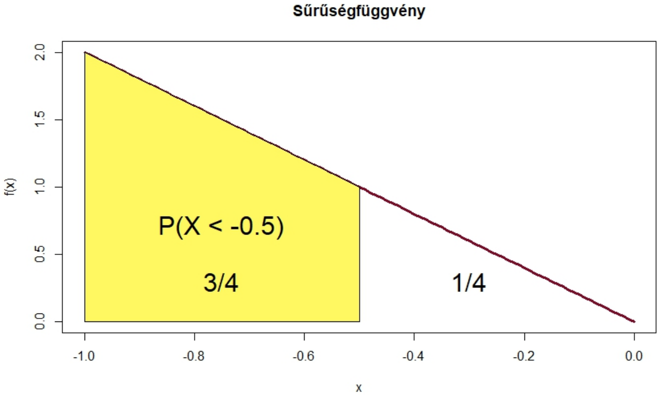
Sűrűségfüggvény: példa

Legyen az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x) = 2|x|$, ha $-1 < x < 0$, és 0 különben. Mennyi X eloszlásfüggvényének értéke a $-1/2$ helyen?

Felhasználva az **eloszlásfüggvény** és a **sűrűségfüggvény** definícióját, illetve hogy $x \leq -1$ esetén $f(x) = 0$, azt kapjuk, hogy

$$F(-1/2) = \mathbb{P}(X \leq -1/2) = \int_{-\infty}^{-1/2} f(x)dx = \int_{-1}^{-1/2} f(x)dx =$$
$$= \int_{-1}^{-1/2} 2|x|\, dx = -\int_{-1}^{-1/2} 2x\, dx = -\left[x^2\right]_{x=-1}^{x=-1/2} =$$
$$= -\left(\frac{1}{4} - 1\right) = \mathbf{\frac{3}{4}}.$$

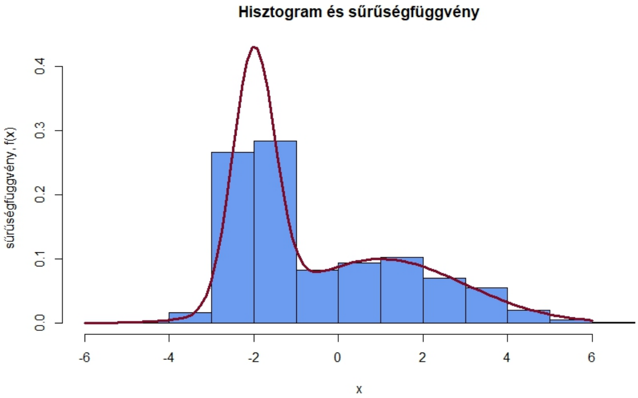
Sűrűségfüggvény: példa



Ha X sűrűségfüggvénye f, akkor

$$F(-1/2) = \mathbb{P}(X \leq -1/2) = \int_{-\infty}^{-1/2} f(x)\,dx = \frac{3}{4}.$$

Sűrűségfüggvény



Egy sűrűségfüggvény és hozzá tartozó ezer elemű független minta hisztogramja – mennyi lehet az f sűrűségfüggvényű valószínűségi változó **várható értéke** és **szórása**?

Diszkrét és abszolút folytonos eset

A **várható értéket** olyan formában nem tudjuk definiálni abszolút folytonos eloszlásokra, mint diszkrét esetben, hiszen $\mathbb{P}(X = x) = 0$ minden x-re. Helyette:

diszkrét

X lehetséges értékei: $x_1, x_2, \ldots$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \cdot \mathbb{P}(X = x_j)}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X^2) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 \cdot \mathbb{P}(X = x_j)}$$

abszolút folytonos

X sűrűségfüggvénye: f.

Diszkrét és abszolút folytonos eset

A **várható értéket** olyan formában nem tudjuk definiálni abszolút folytonos eloszlásokra, mint diszkrét esetben, hiszen $\mathbb{P}(X = x) = 0$ minden x-re. Helyette:

diszkrét

X lehetséges értékei: $x_1, x_2, \ldots$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \cdot \mathbb{P}(X = x_j)}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X^2) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 \cdot \mathbb{P}(X = x_j)}$$

abszolút folytonos

X sűrűségfüggvénye: f.

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\, dx}$$

Diszkrét és abszolút folytonos eset

A **várható értéket** olyan formában nem tudjuk definiálni abszolút folytonos eloszlásokra, mint diszkrét esetben, hiszen $\mathbb{P}(X = x) = 0$ minden x-re. Helyette:

diszkrét

X lehetséges értékei: $x_1, x_2, \ldots$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \cdot \mathbb{P}(X = x_j)}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X^2) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 \cdot \mathbb{P}(X = x_j)}$$

abszolút folytonos

X sűrűségfüggvénye: f.

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\, dx}$$

$$\boxed{D(X) = \sqrt{\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)} = \sqrt{\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2}}$$

Diszkrét és abszolút folytonos eset

A **várható értéket** olyan formában nem tudjuk definiálni abszolút folytonos eloszlásokra, mint diszkrét esetben, hiszen $\mathbb{P}(X = x) = 0$ minden x-re. Helyette:

diszkrét	**abszolút folytonos**
X lehetséges értékei: $x_1, x_2, \ldots$	X sűrűségfüggvénye: f.
$\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \cdot \mathbb{P}(X = x_j)}$	$\boxed{\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx}$
$\boxed{\mathbb{E}(X^2) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 \cdot \mathbb{P}(X = x_j)}$	$\boxed{\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\, dx}$

$$\boxed{D(X) = \sqrt{\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)} = \sqrt{\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2}}$$

$\mathbb{E}(X^k) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^k \cdot \mathbb{P}(X = x_j)$	$\mathbb{E}(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\, dx$
$\boxed{\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{j=1}^{\infty} g(x_j) \cdot \mathbb{P}(X = x_j)}$	$\boxed{\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\, dx}$

Várható érték és szórás abszolút folytonos esetben

Legyen X abszolút folytonos valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye f. Ekkor X **várható értéke**:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx,$$

ha ez az integrál létezik és véges.

Tegyük fel, hogy az X valószínűségi változó abszolút folytonos, sűrűségfüggvénye f, és $\mathbb{E}(X^2)$ létezik, azaz az $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx$ integrál véges. Ekkor X **szórásnégyzete**:

$$D^2(X) = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))^2\big) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2,$$

szórása pedig

$$D(X) = \sqrt{\mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))^2\big)} = \sqrt{\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2}.$$

A szórás definíciója megegyezik a diszkrét esetben használttal.

Momentumok

Az X valószínűségi változók **k. momentuma** a k. hatványának várható értéke:

$$\mathbb{E}(X^k).$$

Általában igaz, hogy ha X abszolút folytonos valószínűségi változó, f a sűrűségfüggvénye, és $\mathbb{E}(g(X))$ létezik, akkor

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx.$$

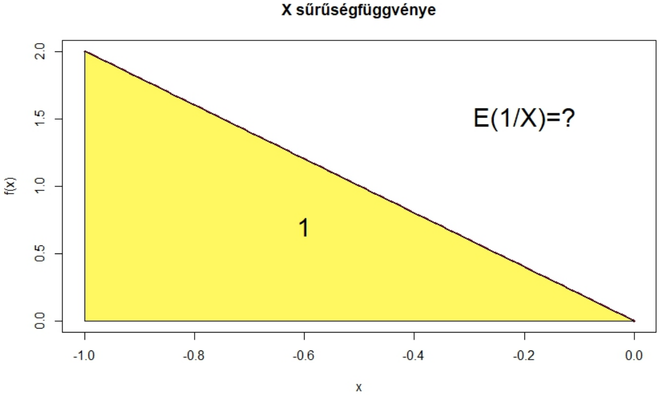
Ezért a k. momentum kiszámítása:

$$\mathbb{E}(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\,dx.$$

Következmény: a **szórásnégyzetet** a következőképpen számíthatjuk ki abszolút folytonos X valószínűségi változó esetén:

$$D^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \left[\mathbb{E}(X)\right]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \left[\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx\right]^2.$$

Várható érték abszolút folytonos esetben: példa



Várható érték abszolút folytonos esetben: példa

Legyen az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x) = 2|x|$, ha $-1 < x < 0$, és 0 különben. Mennyi az $1/X$ valószínűségi változó várható értéke?

Mivel X sűrűségfüggvénye azonosan 0, ha $x > 0$, ezért $X < 0$ és $1/X < 0$ biztosan teljesül. Így $\mathbb{E}(\mathbf{X}) < \mathbf{0}$ teljesülni fog.

Pontosabban, mivel

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\, dx,$$

a $g(x) = 1/x$ függvénnyel:

$$\mathbb{E}(1/X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} \cdot f(x)\, dx = \int_{-1}^{0} \frac{2|x|}{x}\, dx = \int_{-1}^{0} (-2)\, dx = -\mathbf{2}.$$

Várható érték abszolút folytonos esetben: példa

Tegyük fel, hogy a holnap hulló csapadék mennyiségének sűrűségfüggvénye az alábbi:

$$f(x) = \begin{cases} 0,2, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1; \\ 0,4, & \text{ha } 1 < x \leq 3; \\ 0 & \text{ha } x < 0 \text{ vagy } x > 2. \end{cases}$$

Jelölje a csapadékmennyiséget X. A csapadékmennyiség **várható értéke**:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_0^1 x \cdot 0,2 dx + \int_1^3 x \cdot 0,4 dx =$$

$$= 0,2 \cdot \left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) + 0,4 \cdot \left(\frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) = \mathbf{1,7}.$$

Szórás abszolút folytonos esetben: példa

Tegyük fel, hogy a holnap hulló csapadék mennyiségének sűrűségfüggvénye az alábbi:

$$f(x) = \begin{cases} 0,2, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1; \\ 0,4, & \text{ha } 1 < x \leq 3; \\ 0 & \text{ha } x < 0 \text{ vagy } x > 2. \end{cases}$$

Már láttuk, hogy $\mathbb{E}(\mathbf{X}) = \mathbf{1,7}$.

A csapadékmennyiség négyzetének várható értéke:

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\, ds = \int_0^1 x^2 \cdot 0,2\, dx + \int_1^3 x^2 \cdot 0,4\, dx =$$

$$= 0,2 \cdot \left(\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) + 0,4 \cdot \left(\frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} \right) = \mathbf{3,53}.$$

Ez alapján a csapadékmennyiség szórása:

$$D(X) = \sqrt{\mathbb{E}(X^2) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2} = \sqrt{3,53 - 1,7^2} = \mathbf{0,8}.$$

Házi feladat november 13., 10:15-ig

Legyen az X valószínűségi változó egyenletes eloszlású a $[0,1]$ intervallumon, azaz sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy $X \leq t$, ha t tetszőleges valós szám?

(b) Válasszon egy számot 23 és 67 között, és határozza meg $\sqrt[k]{X}$ eloszlásfüggvényét, azaz annak valószínűségét, hogy $\sqrt[k]{X} \leq t$.

(c) Határozza meg $\sqrt[k]{X}$ sűrűségfüggvényét.