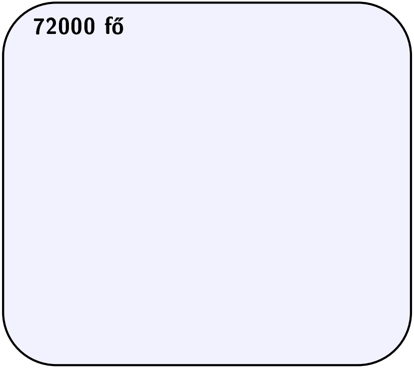
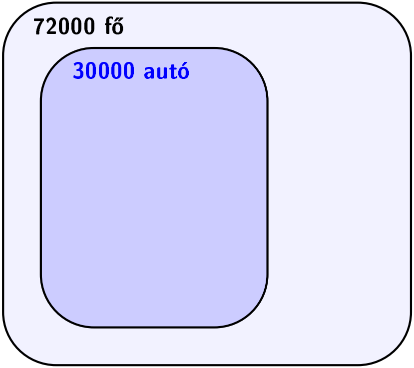
Unió valószínűsége: példa (3. előadás)

Egy **72000 fős** városban



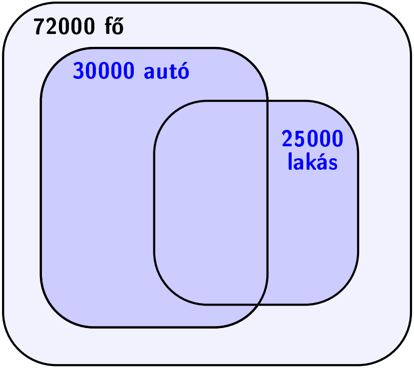
Unió valószínűsége: példa (3. előadás)

Egy **72000 fős** városban **30000** embernek van autója,



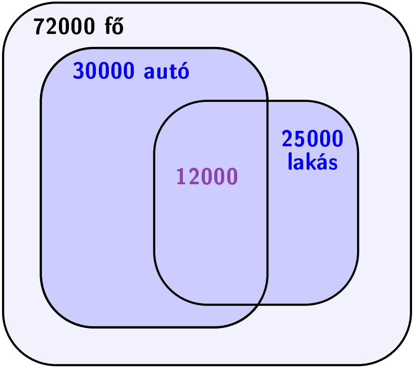
Unió valószínűsége: példa (3. előadás)

Egy **72000 fős** városban **30000** embernek van autója, **25000**-nek lakása,



Unió valószínűsége: példa (3. előadás)

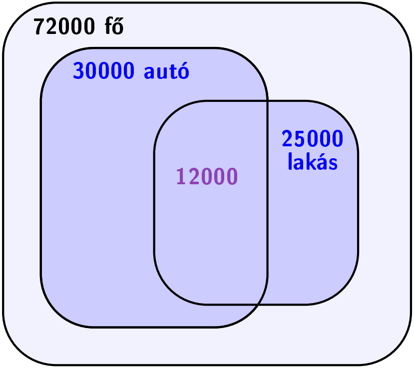
Egy **72000 fős** városban **30000** embernek van autója, **25000**-nek lakása, **12000**-nek autója és lakása is.



Unió valószínűsége: példa (3. előadás)

Egy **72000 fős** városban **30000** embernek van autója, **25000**-nek lakása, **12000**-nek autója és lakása is.

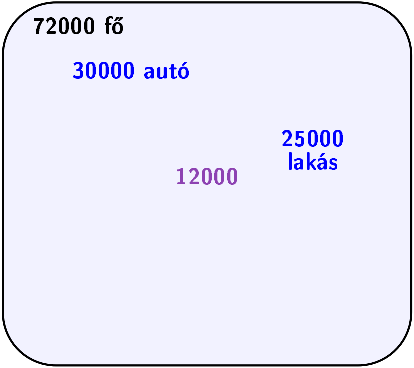
Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember **legalább az egyikkel** rendelkezik?



Unió valószínűsége: példa (3. előadás)

Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember **legalább az egyikkel** rendelkezik?

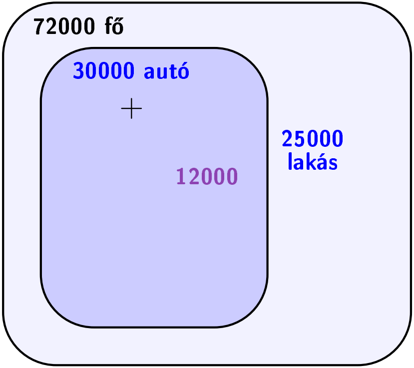
$\mathbb{P}(\textbf{legalább az egyik}) =$



Unió valószínűsége: példa (3. előadás)

Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember **legalább az egyikkel** rendelkezik?

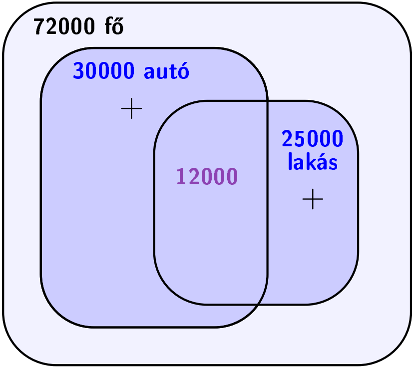
$\mathbb{P}($**legalább az egyik**$) = \quad \mathbb{P}($**autó**$)$



Unió valószínűsége: példa (3. előadás)

Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember **legalább az egyikkel** rendelkezik?

$\mathbb{P}(\textbf{legalább az egyik}) = \mathbb{P}(\textbf{autó}) + \mathbb{P}(\textbf{lakás})$

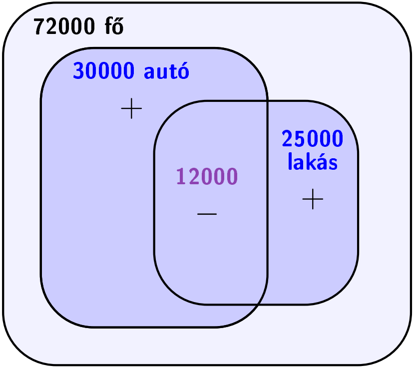


Unió valószínűsége: példa (3. előadás)

Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember **legalább az egyikkel** rendelkezik?

$$\mathbb{P}(\textbf{legalább az egyik}) = \mathbb{P}(\textbf{autó}) + \mathbb{P}(\textbf{lakás}) - \mathbb{P}(\textbf{mindkettő})$$

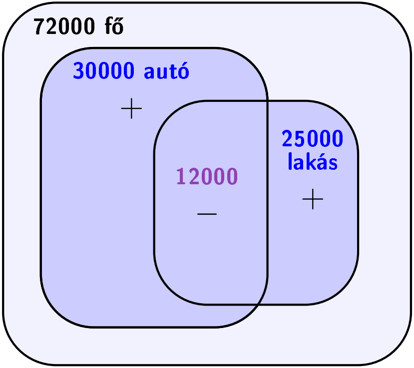
12000 embert kétszer számoltunk, ezt le kell vonni



Unió valószínűsége: példa (3. előadás)

Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember **legalább az egyikkel** rendelkezik?

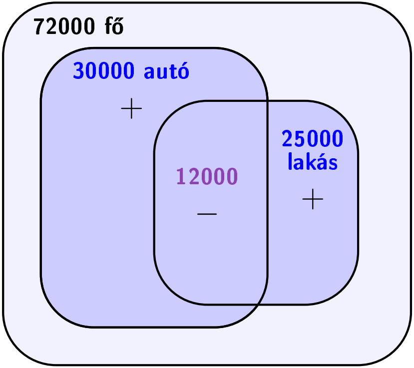
$$\mathbb{P}(\textbf{legalább az egyik}) = \mathbb{P}(\textbf{autó}) + \mathbb{P}(\textbf{lakás}) - \mathbb{P}(\textbf{mindkettő})$$
$$= 30000/72000 + 25000/72000 - 12000/72000$$



Unió valószínűsége: példa (3. előadás)

Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember **legalább az egyikkel** rendelkezik?

$$\mathbb{P}(\textbf{legalább az egyik}) = \mathbb{P}(\textbf{autó}) + \mathbb{P}(\textbf{lakás}) - \mathbb{P}(\textbf{mindkettő})$$
$$= 30000/72000 + 25000/72000 - 12000/72000$$
$$= 43000/72000 = 59\%.$$



Unió valószínűsége: példa (3. előadás)

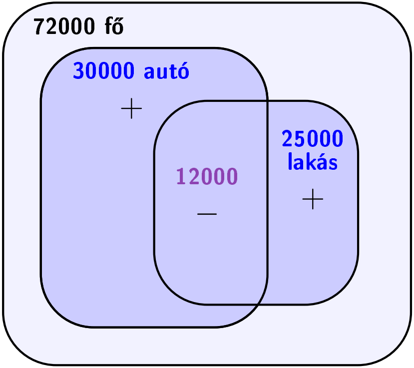
Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember **legalább az egyikkel** rendelkezik?

$$\boxed{\mathbb{P}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \quad \mathbb{P}(\textbf{autó}) \; + \mathbb{P}(\textbf{lakás}) \; - \mathbb{P}(\textbf{mindkettő})}$$

$$= 30000/72000 + 25000/72000 - 12000/72000$$

$$= 43000/72000 = 59\%.$$

↑
unió



Unió valószínűsége: példa (3. előadás)

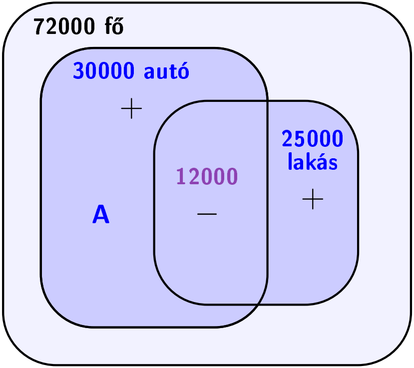
Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember **legalább az egyikkel** rendelkezik?

$$\boxed{\mathbb{P}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \quad \mathbb{P}(\mathbf{A}) \quad + \mathbb{P}(\textbf{lakás}) \quad - \mathbb{P}(\textbf{mindkettő})}$$

$$= 30000/72000 + 25000/72000 - 12000/72000$$

↑ **unió**

$$= 43000/72000 = 59\%.$$



Unió valószínűsége: példa (3. előadás)

Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember **legalább az egyikkel** rendelkezik?

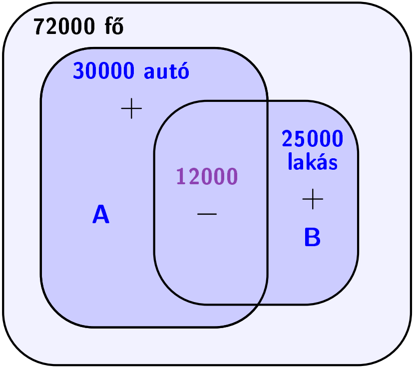
$$\boxed{\mathbb{P}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \mathbb{P}(\mathbf{A}) + \mathbb{P}(\mathbf{B}) - \mathbb{P}(\mathbf{mindkettő})}$$

$$= 30000/72000 + 25000/72000 - 12000/72000$$

$$= 43000/72000 = 59\%.$$

↑

unió



Unió valószínűsége: példa (3. előadás)

Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember **legalább az egyikkel** rendelkezik?

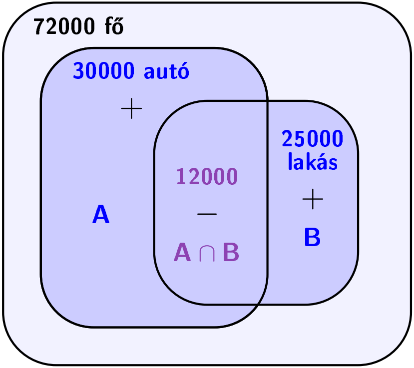
$$\boxed{\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)}$$

$$= 30000/72000 + 25000/72000 - 12000/72000$$

$$= 43000/72000 = 59\%.$$

unió

metszet



Unió valószínűsége: példa (3. előadás)

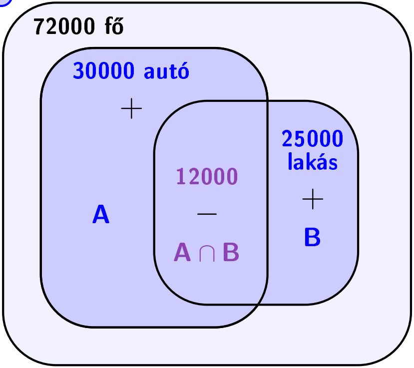
Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember **legalább az egyikkel** rendelkezik?

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)}$$

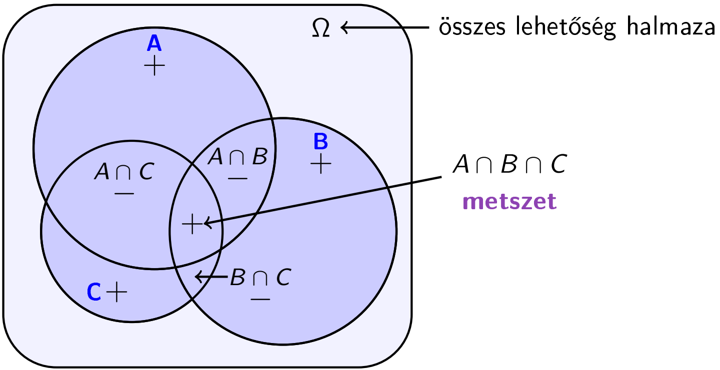
$$= 30000/72000 + 25000/72000 - 12000/72000$$

$$= 43000/72000 = 59\%.$$

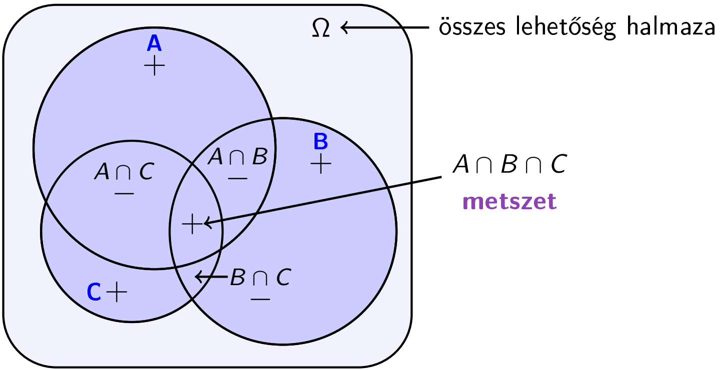
szitaformula



Szitaformula három eseményre



Szitaformula három eseményre



Az **unió** (legalább az egyik bekövetkezik) valószínűsége:

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)$$
$$-\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) +$$
$$+\mathbb{P}(A \cap B \cap C).$$

Szitaformula

Szitaformula két eseményre. Annak valószínűsége, hogy A és B közül legalább az egyik bekövetkezik:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Szitaformula három eseményre. Annak valószínűsége, hogy A, B és C közül legalább az egyik bekövetkezik:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = {} & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \\ & - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

Szitaformula

Szitaformula két eseményre. Annak valószínűsége, hogy A és B közül legalább az egyik bekövetkezik:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Szitaformula három eseményre. Annak valószínűsége, hogy A, B és C közül legalább az egyik bekövetkezik:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \\ - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

Szitaformula általánosan: az $A_1, \dots, A_n$ események uniójának (vagyis annak, hogy legalább az egyik bekövetkezik) a valószínűsége:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \ldots + \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \\ - \ldots - \mathbb{P}(A_{n-1} \cap A_n) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \ldots\end{aligned}$$

Szitaformula

Annak valószínűsége, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események közül legalább az egyik bekövetkezik:

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \ldots + \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \\ - \ldots - \mathbb{P}(A_{n-1} \cap A_n) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \ldots$$

Vagyis:

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \\ + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) - \\ - \ldots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \\ = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}).$$

Házi feladat szeptember 25., 10:15-ig

Tegyük fel, hogy egy város 20000 választópolgára közül 3467-en támogatnak egy adott pártot.

1. Mennyi a valószínűsége, hogy 2000 véletlenszerűen választott embert megkérdezve pontosan 348 lesz közülük, aki támogatja ezt a pártot, ha az embereket véletlenszerűen, egyenletesen választjuk úgy, hogy a már megkérdezetteket nem sorsoljuk ki újra?
2. Mennyi ugyanez a valószínűség, ha a mintát úgy választjuk, hogy minden sorsolásnál mind a 20000 választópolgár közül választunk, a korábbi választásokat elfelejtve? Mennyi a különbsége ennek és az előző valószínűségnek?
3. **Szorgalmi feladat:** készítsünk szimulációt, ami elvégzi (a)-beli kísérletet 100-szor, és készítsünk hisztogramot az egyes kísérleteknél a támogatók számából.
4. **Szorgalmi feladat:** Készítsük el ugyanezt a (b)-beli kísérletre. Hasonlítsuk össze a két hisztogramot.

Házi feladat szeptember 25., 10:15-ig

Tegyük fel, hogy egy város 20000 választópolgára közül 3467-en támogatnak egy adott pártot.

Mennyi a valószínűsége, hogy 2000 véletlenszerűen választott embert megkérdezve pontosan 348 lesz közülük, aki támogatja ezt a pártot, ha az embereket véletlenszerűen, egyenletesen választjuk úgy, hogy a már megkérdezetteket nem sorsoljuk ki újra?

Ez a **visszatevés nélküli mintavétel**, ahol $N = 20000, M = 3467, n = 2000$ és $k = 348$:

$$\mathbb{P}(348 \text{ támogató}) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{3467}{348} \cdot \binom{20000-3467}{2000-348}}{\binom{20000}{2000}} = 2,47\%$$

A kiválasztott támogatók száma **hipergeometrikus eloszlású**, ezért az R-ben így számolhatunk:

```
> dhyper(348, m=3467, n=(20000-3467), k=2000)
[1] 0.0247201
```

Házi feladat szeptember 25., 10:15-ig

Tegyük fel, hogy egy város 20000 választópolgára közül 3467-en támogatnak egy adott pártot. Mennyi a valószínűsége, hogy 2000 véletlenszerűen választott embert megkérdezve pontosan 348 lesz közülük, aki támogatja ezt a pártot, ha az embereket véletlenszerűen, egyenletesen választjuk úgy, hogy hogy minden sorsolásnál mind a 20000 választópolgár közül választunk, a korábbi választásokat elfelejtve? Mennyi a különbsége ennek és az előző valószínűségnek?

Ez a **visszatevéses mintavétel**, ahol $N = 20000$, $M = 3467$, $n = 2000$ és $k = 348$:

$$\mathbb{P}(348 \text{ támogató}) = \binom{n}{k}\left(\frac{M}{N}\right)^k\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-k} =$$

$$= \binom{2000}{348}\left(\frac{3467}{20000}\right)^k\left(1-\frac{3467}{20000}\right)^{2000-348} = 2,35\%$$

A kiválasztott támogatók száma **binomiális eloszlású**, ezért az R-ben így számolhatunk:

```
> dbinom(348, size=2000, prob=(3467/20000))
```

```
[1] 0.02345543
```

A különbség a kétféle mintavétel között: **0,12%**.

Házi feladat szeptember 25., 10:15-ig

Tegyük fel, hogy egy város 20000 választópolgára közül 3467-en támogatnak egy adott pártot. Mennyi a valószínűsége, hogy 2000 véletlenszerűen választott embert megkérdezve pontosan 348 lesz közülük, aki támogatja ezt a pártot, ha az embereket véletlenszerűen, egyenletesen választjuk úgy, hogy hogy minden sorsolásnál mind a 20000 választópolgár közül választunk, a korábbi választásokat elfelejtve? Mennyi a különbsége ennek és az előző valószínűségnek?

$$\frac{\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} - \binom{n}{k}\left(\frac{M}{N}\right)^k\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-k} =$$

$$= \binom{n}{k}\left[\frac{M(M-1)\dots(M-k+1)}{N(N-1)\dots(N-k+1)} - \left(\frac{M}{N}\right)^k\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-k}\right] \le$$

$$\le n^k\cdot\left(\frac{M}{N}\right)^k\left(1-\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-k}\right).$$

Házi feladat szeptember 25., 10:15-ig

`> x<-c(rep(1, 3467),rep(0, 20000-3467))` **támogató: 1, nem támogató: 0**

`> sample(x,2000, replace=FALSE)` **visszatevés nélkül kétezer elemet sorsolunk**

`[1] 0 1 0 0 0 ...`

`> sum(sample(x,2000, replace=FALSE))` **a támogatók száma az összeg**

`[1] 328`

Házi feladat szeptember 25., 10:15-ig

`> x<-c(rep(1, 3467),rep(0, 20000-3467))` **támogató: 1, nem támogató: 0**

`> sample(x,2000, replace=FALSE)` **visszatevés nélkül kétezer elemet sorsolunk**

`[1] 0 1 0 0 0 ...`

`> sum(sample(x,2000, replace=FALSE))` **a támogatók száma az összeg**

`[1] 328`

`> eredmeny<-rep(0,100)` **100 darab csupa 0, majd 100 ismétlés**

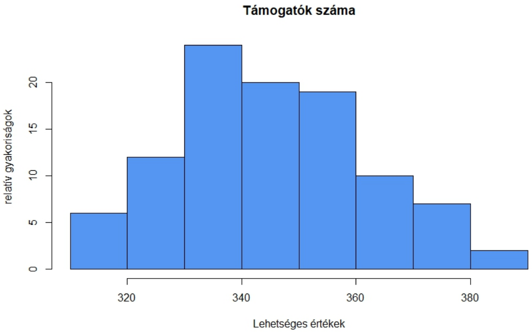
`> for (k in 1:100) {eredmeny[k] = sum(sample(x,2000, replace=FALSE))`

`> eredmeny` **a 100 sorsolás eredménye, majd hisztogram**

`[1] 343 348 340 321 372 337 346 ....`

`> hist(eredmeny, col=”#5596f2”, main=”Támogatók száma”, xlab= ”Lehetséges értékek”, ylab=”relatív gyakoriságok”)`

Házi feladat szeptember 25., 10:15-ig



A támogatók számának hisztogramja 100 megfigyelésből, **visszatevés nélküli** mintavétellel ($N = 20000$ lakos, $M = 3467$ támogató, $n = 2000$ elemű minta)

Házi feladat szeptember 25., 10:15-ig

`> x<-c(rep(1, 3467),rep(0, 20000-3467))` **támogató: 1, nem támogató: 0**

`> sample(x,2000, replace=TRUE)` **visszatevéssel kétezer elemet sorsolunk**

`[1] 0 1 0 1 0 ...`

`> sum(sample(x,2000, replace=TRUE))` **a támogatók száma az összeg**

`[1] 336`

Házi feladat szeptember 25., 10:15-ig

`> x<-c(rep(1, 3467),rep(0, 20000-3467))` **támogató: 1**, **nem támogató: 0**

`> sample(x,2000, replace=TRUE)` **visszatevéssel kétezer elemet sorsolunk**

`[1] 0 1 0 1 0 ...`

`> sum(sample(x,2000, replace=TRUE))` **a támogatók száma az összeg**

`[1] 336`

`> eredmeny2<-rep(0,100)` **100 darab csupa 0, majd 100 ismétlés**

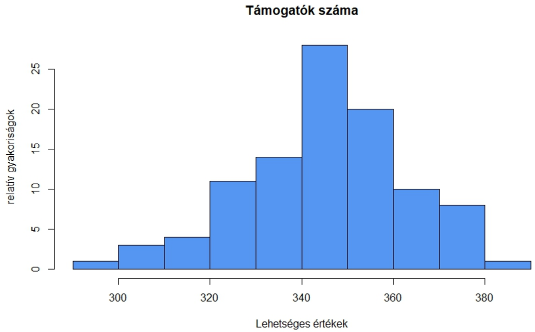
`> for (k in 1:100) {eredmeny2[k] = sum(sample(x,2000, replace=TRUE)`

`> eredmeny2` **a 100 sorsolás eredménye, majd hisztogram**

`[1] 356 342 367 339 347 350 368 ....`

```
> hist(eredmeny2, col=”#5596f2”, main=”Támogatók száma”, xlab=
”Lehetséges értékek”, ylab=”relatív gyakoriságok”)
```

Házi feladat szeptember 25., 10:15-ig



A támogatók számának hisztogramja 100 megfigyelésből, **visszatevéses** mintavétellel ($N = 20000$ lakos, $M = 3467$ támogató, $n = 2000$ elemű minta)

Feltételes valószínűség: példa

Gábornak **három gyereke** van.

Feltételes valószínűség: példa

Gábornak **három gyereke** van.

Mennyi a valószínűsége, hogy **a középső gyermeke fiú**?

Feltételes valószínűség: példa

Gábornak **három gyereke** van.

Mennyi a valószínűsége, hogy **a középső gyermeke fiú**?

Ω

FFF	**LLF**
LFF	**LFL**
FLF	**FLL**
FFL	**LLL**

Feltételes valószínűség: példa

Gábornak **három gyereke** van.

Mennyi a valószínűsége, hogy **a középső gyermeke fiú**?

A **esemény**

Ω

FFF	**LLF**
LFF	**LFL**
FLF	**FLL**
FFL	**LLL**

$2^3 = 8$ egyformán valószínű lehetőség

4 jó lehetőség

$\mathbb{P}(A) = \frac{4}{8} = \mathbf{50\%}$

Feltételes valószínűség: példa

Gábornak **három gyereke** van.

Azt is elárulja, hogy **pontosan egy fia van**.

Most mennyi a valószínűsége, hogy **a középső gyermeke fiú**?

A **esemény**

Feltételes valószínűség: példa

feltétel: plusz információ

Gábornak **három gyereke** van. $\downarrow$ B **esemény**

Azt is elárulja, hogy **pontosan egy fia van**.

Most mennyi a valószínűsége, hogy **a középső gyermeke fiú**?

A **esemény**

Feltételes valószínűség: példa

feltétel: plusz információ

Gábornak **három gyereke** van. ↓ B **esemény**

Azt is elárulja, hogy **pontosan egy fia van**.

Most mennyi a valószínűsége, hogy **a középső gyermeke fiú**?

A **esemény**

$2^3 = 8$
egyformán
valószínű
lehetőség

Ω

B

FFF	**LLF**
LFF	**LFL**
FLF	**FLL**
FFL	**LLL**

Feltételes valószínűség: példa

feltétel: plusz információ

Gábornak **három gyereke** van. $\downarrow$ B **esemény**

Azt is elárulja, hogy **pontosan egy fia van**.

Most mennyi a valószínűsége, hogy **a középső gyermeke fiú**?

A **esemény**

$2^3 = 8$ egyformán valószínű lehetőség

Ω

B

FFF	**LLF**
LFF	**LFL**
FLF	**FLL**
FFL	**LLL**

$\mathbb{P}(B) = 3/8$

$\mathbb{P}(A \cap B) = 1/8$

Feltételes valószínűség: példa

feltétel: plusz információ

Gábornak **három gyereke** van. ↓ B **esemény**

Azt is elárulja, hogy **pontosan egy fia van**.

Most mennyi a valószínűsége, hogy **a középső gyermeke fiú**?

A **esemény**

Ω

	B
FFF	**LLF**
LFF	**LFL**
FLF	**FLL**
FFL	**LLL**

$\mathbb{P}(B) = 3/8$

$\mathbb{P}(A \cap B) = 1/8$

A-nak B-re vonatkozó feltételes valószínűsége

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1/8}{3/8} = \frac{1}{3} < \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A) \text{ ebben az esetben.}$$

Feltételes valószínűség

Legyenek $A, B \in \mathcal{A}$ események úgy, hogy $\mathbb{P}(B) > 0$.

Feltételes valószínűség

Legyenek $A, B \in \mathcal{A}$ események úgy, hogy $\mathbb{P}(B) > 0$.

Ekkor az A eseménynek B-re vonatkozó **feltételes valószínűsége**:

Feltételes valószínűség

Legyenek $A, B \in \mathcal{A}$ események úgy, hogy $\mathbb{P}(B) > 0$.

Ekkor az A eseménynek B-re vonatkozó **feltételes valószínűsége**:

$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.}$$

Feltételes valószínűség

Legyenek $A, B \in \mathcal{A}$ események úgy, hogy $\mathbb{P}(B) > 0$.

Ekkor az A eseménynek B-re vonatkozó **feltételes valószínűsége**:

$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.} \longleftarrow \boxed{\text{metszet valószínűsége}}$$

A és B is bekövetkezik

Feltételes valószínűség

Legyenek $A, B \in \mathcal{A}$ események úgy, hogy $\mathbb{P}(B) > 0$.

Ekkor az A eseménynek B-re vonatkozó **feltételes valószínűsége**:

$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.}$$

metszet valószínűsége

A és B is bekövetkezik

feltétel valószínűsége

$\mathbb{P}(B) > 0$, lehet osztani

Értelmezés: feltéve, hogy B bekövetkezett, mennyi a valószínűsége, hogy A is bekövetkezik

Feltételes valószínűség

Legyenek $A, B \in \mathcal{A}$ események úgy, hogy $\mathbb{P}(B) > 0$.

Ekkor az A eseménynek B-re vonatkozó **feltételes valószínűsége**:

$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.}$$

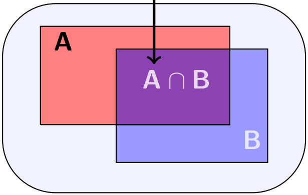
metszet valószínűsége

A és B is bekövetkezik

feltétel valószínűsége

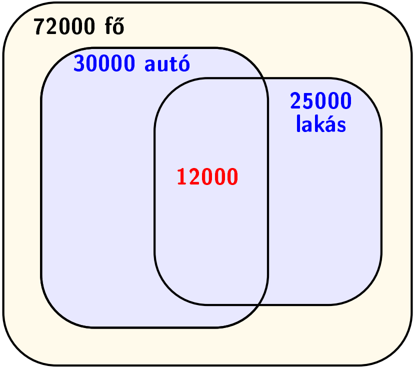
$\mathbb{P}(B) > 0$, lehet osztani

Értelmezés: feltéve, hogy B bekövetkezett, mennyi a valószínűsége, hogy A is bekövetkezik



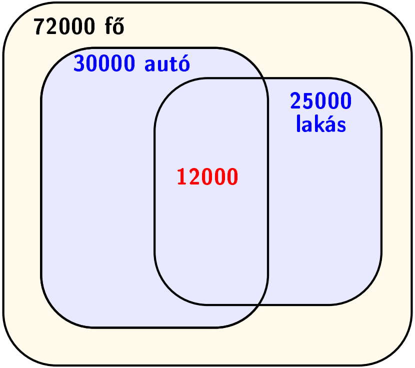
Feltételes valószínűség: példa

Egy 72000 fős városban harmincezer embernek van autója, huszonötezernek lakása, tizenkét ezernek mindkettő. Egy véletlenszerűen választott lakosról tudjuk, hogy van autója. Erre vonatkozóan mennyi a feltételes valószínűsége, hogy az illetőnek van lakása?



Feltételes valószínűség: példa

Egy 72000 fős városban harmincezer embernek van autója, huszonötezernek lakása, tizenkét ezernek mindkettő. Egy véletlenszerűen választott lakosról tudjuk, hogy van autója. Erre vonatkozóan mennyi a feltételes valószínűsége, hogy az illetőnek van lakása?



$$\mathbb{P}(L|A) = \frac{\mathbb{P}(L \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{12000/72000}{30000/72000} = \frac{12000}{30000} = 40\% > \mathbb{P}(L) = \frac{25000}{72000} = 34,7\%.$$

Bayes-tétel: példa

Hanna sátorozni megy Sopronba. Az alábbi táblázat mutatja, hogy adott mennyiségű csapadék esetén mennyi valószínűséggel ázik be a sátra, illetve az előrejelzés szerint mennyi az adott csapadékmennyiség valószínűsége.

csapadék (mm)	0	$0-5$	$5-10$	10-**nél több**
beázás valószínűsége	0	15%	35%	60%
előrejelzés	40%	10%	30%	20%

Mennyi a valószínűsége, hogy **Hanna sátra beázik?**

Bayes-tétel: példa

Hanna sátorozni megy Sopronba. Az alábbi táblázat mutatja, hogy adott mennyiségű csapadék esetén mennyi valószínűséggel ázik be a sátra, illetve az előrejelzés szerint mennyi az adott csapadékmennyiség valószínűsége.

csapadék (mm)	0	0 – 5	5 – 10	**10-nél több**
beázás valószínűsége	0	15%	35%	60%
előrejelzés	40%	10%	30%	20%

Mennyi a valószínűsége, hogy **Hanna sátra beázik?**

Hanna a **beázott sátorról** küld képeket.

Erre feltételesen mennyi annak valószínűsége, hogy Sopronban **több mint 10 mm eső** esett ezen a napon?

Teljes valószínűség tétele

csapadék (mm)	0	$0-5$	$5-10$	10-nél több
beázás valószínűsége	0	15%	35%	60%
előrejelzés	40%	10%	30%	20%

B_1: nincs csapadék

$B_2: 0-5$ mm csapadék

A: Hanna sátra beázik

$B_3: 5-10$ mm csapadék

$B_4: > 10$ mm csapadék

Teljes valószínűség tétele

csapadék (mm)	0	$0-5$	$5-10$	10-nél több
beázás valószínűsége	0	15%	35%	60%
előrejelzés	40%	10%	30%	20%

B_1: nincs csapadék

$\mathbb{P}(B_1) = 0,4$

$B_2 : 0-5$ mm csapadék

$\mathbb{P}(B_2) = 0,1$

A: Hanna sátra beázik

$\mathbb{P}(B_3) = 0,3$

$B_3 : 5-10$ mm csapadék

$\mathbb{P}(B_4) = 0,2$

$B_4 : > 10$ mm csapadék

Teljes valószínűség tétele

csapadék (mm)	0	0 – 5	5 – 10	10-nél több
beázás valószínűsége	0	15%	35%	60%
előrejelzés	40%	10%	30%	20%

B_1: nincs csapadék

$\mathbb{P}(B_1) = 0,4$

$\mathbb{P}(A|B_1) = \mathbf{0}$

$B_2 : 0 - 5$ mm csapadék

$\mathbb{P}(B_2) = 0,1$

$\mathbb{P}(A|B_2) = \mathbf{0,15}$

A: Hanna sátra beázik

$\mathbb{P}(A|B_3) = \mathbf{0,35}$

$\mathbb{P}(B_3) = 0,3$

$B_3 : 5 - 10$ mm csapadék

$\mathbb{P}(A|B_4) = \mathbf{0,6}$

$\mathbb{P}(B_4) = 0,2$

$B_4 : > 10$ mm csapadék

Teljes valószínűség tétele

csapadék (mm)	0	$0-5$	$5-10$	10-nél több
beázás valószínűsége	0	15%	35%	60%
előrejelzés	40%	10%	30%	20%

B_1: nincs csapadék

$\mathbb{P}(B_1) = 0,4$

$\mathbb{P}(A|B_1) = \mathbf{0}$

$B_2 : 0-5$ mm csapadék

$\mathbb{P}(B_2) = 0,1$

$\mathbb{P}(A|B_2) = \mathbf{0,15}$

A: Hanna sátra beázik

$\mathbb{P}(A|B_3) = \mathbf{0,35}$

$\mathbb{P}(B_3) = 0,3$

$B_3 : 5-10$ mm csapadék

$\mathbb{P}(A|B_4) = \mathbf{0,6}$

$\mathbb{P}(B_4) = 0,2$

$B_4 : > 10$ mm csapadék

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) +$$
$$+ \mathbb{P}(A|B_3)\mathbb{P}(B_3) + \mathbb{P}(A|B_4)\mathbb{P}(B_4) =$$

Teljes valószínűség tétele

csapadék (mm)	0	0 – 5	5 – 10	10-nél több
beázás valószínűsége	0	15%	35%	60%
előrejelzés	40%	10%	30%	20%

B_1: nincs csapadék

$\mathbb{P}(B_1) = 0,4$

$\mathbb{P}(A|B_1) = \mathbf{0}$

$B_2 : 0 - 5$ mm csapadék

$\mathbb{P}(B_2) = 0,1$

$\mathbb{P}(A|B_2) = \mathbf{0,15}$

A: Hanna sátra beázik

$\mathbb{P}(A|B_3) = \mathbf{0,35}$

$\mathbb{P}(B_3) = 0,3$

$B_3 : 5 - 10$ mm csapadék

$\mathbb{P}(A|B_4) = \mathbf{0,6}$

$\mathbb{P}(B_4) = 0,2$

$B_4 : > 10$ mm csapadék

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) +$$
$$+\mathbb{P}(A|B_3)\mathbb{P}(B_3) + \mathbb{P}(A|B_4)\mathbb{P}(B_4) =$$
$$= \mathbf{0} \cdot 0,4 + \mathbf{0,15} \cdot 0,1 + \mathbf{0,35} \cdot 0,3 + \mathbf{0,6} \cdot 0,2 = \mathbf{24}\%.$$

Bayes-tétel: példa

Hanna sátorozni megy Sopronba. Az alábbi táblázat mutatja, hogy adott mennyiségű csapadék esetén mennyi valószínűséggel ázik be a sátra, illetve az előrejelzés szerint mennyi az adott csapadékmennyiség valószínűsége.

csapadék (mm)	0	0 – 5	5 – 10	**10-nél több**
beázás valószínűsége	0	15%	35%	60%
előrejelzés	40%	10%	30%	20%

Mennyi a valószínűsége, hogy **Hanna sátra beázik?**

$$\mathbf{0} \cdot 0,4 + \mathbf{0,15} \cdot 0,1 + \mathbf{0,35} \cdot 0,3 + \mathbf{0,6} \cdot 0,2 = \mathbf{24\%}.$$

Hanna a **beázott sátorról** küld képeket.

Erre feltételesen mennyi annak valószínűsége, hogy Sopronban **több mint 10 mm eső** esett ezen a napon?

Bayes-tétel: példa

csapadék (mm)	0	$0-5$	$5-10$	**10-nél több**
beázás valószínűsége	0	15%	35%	60%
előrejelzés	40%	10%	30%	20%

B_1: nincs csapadék

$\mathbb{P}(B_1) = 0,4$

$\mathbb{P}(A|B_1) = 0$

$B_2 : 0 - 5$ mm csapadék

$\mathbb{P}(B_2) = 0,1$

$\mathbb{P}(A|B_2) = 0,15$

A: Hanna sátra beázik

$\mathbb{P}(A|B_3) = 0,35$

$\mathbb{P}(B_3) = 0,3$

$B_3 : 5 - 10$ mm csapadék

$\mathbb{P}(A|B_4) = 0,6$

$\mathbb{P}(B_4) = 0,2$

$B_4 : > 10$ mm csapadék

Bayes-tétel: példa

Hanna a **beázott sátorról** küld képeket. Mennyi annak valószínűsége, hogy Sopronban **több mint 10 mm eső** esett ezen a napon? Azaz mennyi $\mathbb{P}(B_4|A)$?

csapadék (mm)	0	$0-5$	$5-10$	**10-nél több**
beázás valószínűsége	0	15%	35%	**60%**
előrejelzés	40%	10%	30%	**20%**

Bayes-tétel: példa

Hanna a **beázott sátorról** küld képeket. Mennyi annak valószínűsége, hogy Sopronban **több mint 10 mm eső** esett ezen a napon? Azaz mennyi $\mathbb{P}(B_4|A)$?

csapadék (mm)	0	$0-5$	$5-10$	**10-nél több**
beázás valószínűsége	0	15%	35%	**60%**
előrejelzés	40%	10%	30%	**20%**

$$\mathbb{P}(\mathbf{B_4}|\mathbf{A}) = \frac{\mathbb{P}(\mathbf{A}|\mathbf{B_4})\mathbb{P}(\mathbf{B_4})}{\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \ldots + \mathbb{P}(A|B_4)\mathbb{P}(B_4)} =$$

$$= \frac{\mathbf{0,6 \cdot 0,2}}{0 \cdot 0,3 + 0,15 \cdot 0,1 + 0,35 \cdot 0,3 + \mathbf{0,6 \cdot 0,2}} = \frac{0,12}{0,24} = \mathbf{50\%}.$$

Bayes-tétel: példa

Hanna a **beázott sátorról** küld képeket. Mennyi annak valószínűsége, hogy Sopronban **több mint 10 mm eső** esett ezen a napon? Azaz mennyi $\mathbb{P}(B_4|A)$?

csapadék (mm)	0	$0-5$	$5-10$	**10-nél több**
beázás valószínűsége	0	15%	35%	**60%**
előrejelzés	40%	10%	30%	**20%**

$$\mathbb{P}(\mathbf{B_4}|\mathbf{A}) = \frac{\mathbb{P}(\mathbf{A}|\mathbf{B_4})\mathbb{P}(\mathbf{B_4})}{\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \ldots + \mathbb{P}(A|B_4)\mathbb{P}(B_4)} =$$

$$= \frac{\mathbf{0,6 \cdot 0,2}}{0 \cdot 0,3 + 0,15 \cdot 0,1 + 0,35 \cdot 0,3 + \mathbf{0,6 \cdot 0,2}} = \frac{0,12}{0,24} = \mathbf{50\%}.$$

Vagyis feltéve, hogy beázott a sátor, 50% valószínűséggel volt 10 mm-nél több csapadék. Ez több, mint 20%: feltéve, hogy beázott a sátor, valószínűbb a sok csapadék, mint az új információ nélkül.

Teljes eseményrendszer

Definíció (Teljes eseményrendszer)

A $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{A}$ *(véges vagy megszámlálható sok) esemény együttesét teljes eseményrendszernek nevezzük, ha*

(i) $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$, *azaz minden elemi esemény szerepel valamelyik eseményben;*

(ii) $B_i \cap B_j = \emptyset$ *teljesül minden* $1 \leq i < j$*-re, azaz páronként kizáróak, semelyik elemi esemény nem szerepel egyszerre két eseményben is;*

(iii) $\mathbb{P}(B_i) > 0$ *minden* $i = 1, 2, \ldots$*-re, azaz mindegyiknek pozitív a valószínűsége.*

Teljes eseményrendszer

Definíció (Teljes eseményrendszer)

A $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{A}$ *(véges vagy megszámlálható sok) esemény együttesét teljes eseményrendszernek nevezzük, ha*

(i) $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$, *azaz minden elemi esemény szerepel valamelyik eseményben;*

(ii) $B_i \cap B_j = \emptyset$ *teljesül minden* $1 \leq i < j$*-re, azaz páronként kizáróak, semelyik elemi esemény nem szerepel egyszerre két eseményben is;*

(iii) $\mathbb{P}(B_i) > 0$ *minden* $i = 1, 2, \ldots$*-re, azaz mindegyiknek pozitív a valószínűsége.*

Tétel (Teljes valószínűség tétele)

Legyen $A \in \mathcal{A}$ *tetszőleges esemény,* $B_1, B_2, \ldots$ *pedig teljes eseményrendszer. Ekkor*

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3)\mathbb{P}(B_3) + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i).$$

Bayes-tétel

Tétel (Teljes valószínűség tétele)

Legyen $A \in \mathcal{A}$ tetszőleges esemény, $B_1, B_2, \dots$ pedig teljes eseményrendszer. Ekkor

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3)\mathbb{P}(B_3) + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i).$$

Tétel (Bayes-tétel)

Legyen $A \in \mathcal{A}$ olyan esemény, melyre $\mathbb{P}(A) > 0$, $B_1, B_2, \dots$ pedig teljes eseményrendszer. Ekkor minden $k = 1, 2, \dots$-re teljesül, hogy

$$\mathbb{P}(B_k|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_k)\mathbb{P}(B_k)}{\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3)\mathbb{P}(B_3) + \dots} = \frac{\mathbb{P}(A|B_k)\mathbb{P}(B_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}.$$

Bayes-tétel: példa

Példa. Tegyük fel, hogy egy város lakosságának 36%-a rendelkezik diplomával, 42%-a érettségivel (mint legmagasabb végzettség), a többiek egyikkel sem. A diplomások 23%-a, az érettségizettek 21%-a, az érettségivel nem rendelkezők 10%-ának van saját autója.

- Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott lakos saját autóval rendelkezik?
- A város egyik lakosa elárulja, hogy van saját autója. Ez alapján mennyi a feltételes valószínűsége, hogy az illető diplomával rendelkezik?

Bayes-tétel: példa

Példa. Tegyük fel, hogy egy város lakosságának 36%-a rendelkezik diplomával, 42%-a érettségivel (mint legmagasabb végzettség), a többiek egyikkel sem. A diplomások 23%-a, az érettségizettek 21%-a, az érettségivel nem rendelkezők 10%-ának van saját autója.

A: autó; B_1: diploma; B_2: érettségi; B_3: nem érettségizett

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A \cap B_1) + \mathbb{P}(A \cap B_2) + \mathbb{P}(A \cap B_3) = \\ &= \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3)\mathbb{P}(B_3) = \\ &= 0,23 \cdot 0,36 + 0,21 \cdot 0,42 + 0,1 \cdot 0,22 = 19,3\%.\end{aligned}$$

Vagyis egy véletlenszerűen választott lakos $19,3\%$ valószínűséggel rendelkezik saját autóval.

Bayes-tétel: példa

Példa. Tegyük fel, hogy egy város lakosságának 36%-a rendelkezik diplomával, 42%-a érettségivel (mint legmagasabb végzettség), a többiek egyikkel sem. A diplomások 23%-a, az érettségizettek 21%-a, az érettségivel nem rendelkezők 10%-ának van saját autója.

A: autó; B_1: diploma; B_2: érettségi; B_3: nem érettségizett

$$\mathbb{P}(B_1|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1)}{\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3)\mathbb{P}(B_3)} =$$
$$= \frac{0,23 \cdot 0,36}{0,23 \cdot 0,36 + 0,21 \cdot 0,42 + 0,1 \cdot 0,22} = 42,9\%.$$

Vagyis egy autóval rendelkező lakosnak $42,9\%$ valószínűséggel van diplomája. Ez nagyobb a diplomások arányánál (36%), hiszen a diplomások között nagyobb az autósok aránya, mint a teljes népességben.

Házi feladat október 2., 10:15-ig

- Hanna minden nap a többitől függetlenül $1/2$ valószínűséggel 4-es, $1/2$ valószínűséggel hatos villamossal jön egyetemre. Feltéve, hogy egy hónap 20 tanítási napja alatt pontosan nyolcszor jött négyessel, mennyi a valószínűsége, hogy ebben a hónapban az első tanítási napon négyes villamossal érkezett?
- Tegyük fel, hogy a négyes villamos $0,01$ valószínűséggel, a hatos villamos $0,02$ valószínűséggel hibásodik meg a Hanna által megtett úton. Egy adott napon mennyi a valószínűsége, hogy az a villamos, amivel Hanna utazik, meghibásodik?

Függetlenség

Mely események tekinthetők egymástól függetlennek, és melyek között van kapcsolat? Péter egy felmérés véletlenszerűen választott résztvevője.

Péternek van saját autója

holnap Budapesten lesz csapadék

Péter jövedelme több az átlagosnál

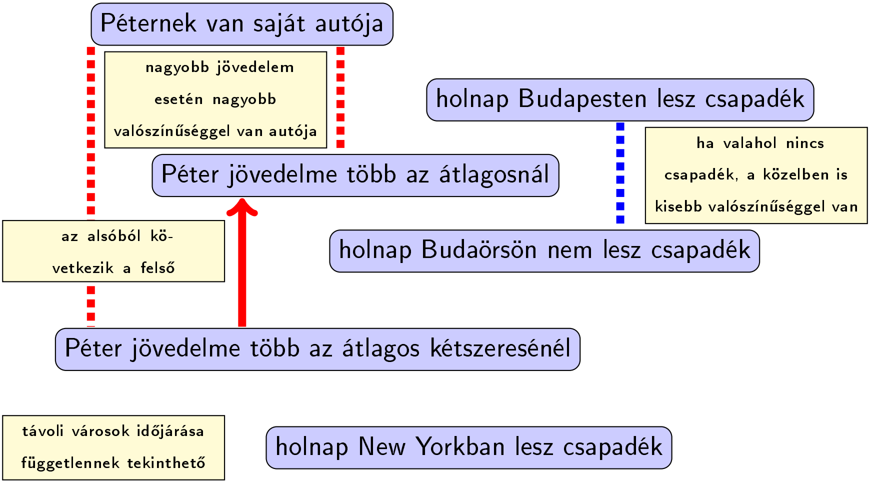
holnap Budaörsön nem lesz csapadék

Péter jövedelme több az átlagos kétszeresénél

holnap New Yorkban lesz csapadék

Függetlenség

Mely események tekinthetők egymástól függetlennek, és melyek között van kapcsolat? Péter egy felmérés véletlenszerűen választott résztvevője.



Események függetlensége: példa

Tegyük fel, hogy egy városban

- összesen 100000 ember él;
- 15000 embernek **van saját autója (A esemény)**:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{15000}{100000} = \mathbf{0,15}.$$

- 25000-nek **több a jövedelme az átlagosnál** (B esemény):

$$\mathbb{P}(B) = \frac{25000}{100000} = \mathbf{0,25}.$$

- 10000 ember van, akinek **több a jövedelme az átlagosnál és saját autóval rendelkezik**:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{10000}{100000} = \mathbf{0,1}.$$

Független-e A és B, vagyis az, hogy egy véletlenszerűen választott lakos jövedelme több az átlagosnál, és saját autóval rendelkezik?

Események függetlensége: példa

Hasonlítsuk össze **az autóval rendelkezők arányát**

Események függetlensége: példa

Hasonlítsuk össze **az autóval rendelkezők arányát a teljes lakosságban**,

Az autóval rendelkezők aránya a teljes lakosságban:
$\mathbb{P}(A) = \frac{15000}{100000} = 0,15$

Események függetlensége: példa

Hasonlítsuk össze **az autóval rendelkezők arányát a teljes lakosságban**, illetve **az átlagosnál nagyobb jövedelműek között**. Saját autó (A): 10000, nagy jövedelem (B): 25000,
mindkettő ($A \cap B$): 10000, összes lakos: 100000.

Ha független a két esemény, akkor a két arány megegyezik.

Az autóval rendelkezők aránya a teljes lakosságban: $\mathbb{P}(A) = \frac{15000}{100000} = 0,15$	Az autóval rendelkezők aránya az átlagosnál nagyobb jövedelműek között: $\frac{10000}{25000} = 0,4$

Események függetlensége: példa

Hasonlítsuk össze **az autóval rendelkezők arányát a teljes lakosságban**, illetve **az átlagosnál nagyobb jövedelműek között**. Saját autó (A): 10000, nagy jövedelem (B): 25000,
mindkettő ($A \cap B$): 10000, összes lakos: 100000.

Ha független a két esemény, akkor a két arány megegyezik.

Az autóval rendelkezők aránya a teljes lakosságban: $\mathbb{P}(A) = \frac{15000}{100000} = 0,15$	$\neq$	Az autóval rendelkezők aránya az átlagosnál nagyobb jövedelműek között: $\frac{10000}{25000} = 0,4$

Események függetlensége: példa

Hasonlítsuk össze **az autóval rendelkezők arányát** **a teljes lakosságban**, illetve **az átlagosnál nagyobb jövedelműek között**. Saját autó (A): 10000, nagy jövedelem (B): 25000,
mindkettő ($A \cap B$): 10000, összes lakos: 100000.

Ha független a két esemény, akkor a két arány megegyezik.

Az autóval rendelkezők aránya a teljes lakosságban: $\mathbb{P}(A) = \frac{15000}{100000} = 0,15$	$\neq$	Az autóval rendelkezők aránya az átlagosnál nagyobb jövedelműek között: $\frac{10000}{25000} = 0,4$

Az autóval rendelkezők aránya több az átlagosnál nagyobb jövedelműek között $\Rightarrow$ **a két esemény nem független.**

Események függetlensége: példa

Hasonlítsuk össze **az autóval rendelkezők arányát a teljes lakosságban**, illetve **az átlagosnál nagyobb jövedelműek között**. Saját autó (A): 10000, nagy jövedelem (B): 25000,
mindkettő ($A \cap B$): 10000, összes lakos: 100000.

Az autóval rendelkezők aránya a teljes lakosságban: $\mathbb{P}(A) = \frac{15000}{100000} = 0,15$	$\neq$	Az autóval rendelkezők aránya az átlagosnál nagyobb jövedelműek között: $\frac{10000}{25000} = 0,4$

Akkor egyezett volna meg a két arány, ha $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$, azaz

Események függetlensége: példa

Hasonlítsuk össze **az autóval rendelkezők arányát** **a teljes lakosságban**, illetve **az átlagosnál nagyobb jövedelműek között**. Saját autó (A): 10000, nagy jövedelem (B): 25000,
mindkettő ($A \cap B$): 10000, összes lakos: 100000.

Az autóval rendelkezők aránya a teljes lakosságban: $\mathbb{P}(A) = \frac{15000}{100000} = 0,15$	$\neq$	Az autóval rendelkezők aránya az átlagosnál nagyobb jövedelműek között: $\frac{10000}{25000} = 0,4$

Akkor egyezett volna meg a két arány, ha $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$, azaz

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \quad \Leftrightarrow$$

Események függetlensége: példa

Hasonlítsuk össze **az autóval rendelkezők arányát a teljes lakosságban**, illetve **az átlagosnál nagyobb jövedelműek között**. Saját autó (A): 10000, nagy jövedelem (B): 25000,
mindkettő ($A \cap B$): 10000, összes lakos: 100000.

Az autóval rendelkezők aránya a teljes lakosságban: $\mathbb{P}(A) = \frac{15000}{100000} = 0,15$	$\neq$	Az autóval rendelkezők aránya az átlagosnál nagyobb jövedelműek között: $\frac{10000}{25000} = 0,4$

Akkor egyezett volna meg a két arány, ha $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$, azaz

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B).$$

Események függetlensége

Az $A, B \in \mathcal{A}$ események **függetlenek**, ha

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B),$$

vagyis **a metszet valószínűsége a valószínűségek szorzata**.

Események függetlensége

Az $A, B \in \mathcal{A}$ események **függetlenek**, ha

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B),$$

vagyis **a metszet valószínűsége a valószínűségek szorzata**.

Több eseménynél tetszőleges részhalmazra teljesülnie kell ennek a tulajdonságnak.

Az $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ események **függetlenek**, ha tetszőleges $k \geq 1$ és $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ számokra

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2})\ldots\mathbb{P}(A_{i_k}).$$

Függetlenség: példa

Két szabályos dobókockával dobunk. Független-e az alábbi két esemény: **az első dobás hatos**; **a második dobás hatos**?

Függetlenség: példa

Két szabályos dobókockával dobunk. Független-e az alábbi két esemény: **az első dobás hatos**; **a második dobás hatos**?

11	12	13	14	15	**16**
21	22	23	24	25	**26**
31	32	33	34	35	**36**
41	42	43	44	45	**46**
51	52	53	54	55	**56**
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**

A: az első dobás hatos; **B**: a második dobás hatos; $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$: mindkét dobás hatos

Függetlenség: példa

Két szabályos dobókockával dobunk. Független-e az alábbi két esemény: **az első dobás hatos**; **a második dobás hatos**?

11	12	13	14	15	**16**
21	22	23	24	25	**26**
31	32	33	34	35	**36**
41	42	43	44	45	**46**
51	52	53	54	55	**56**
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**

A: az első dobás hatos; **B**: a második dobás hatos; **A ∩ B**: mindkét dobás hatos

$$\frac{1}{36} = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}.$$

Az A és B események **függetlenek**.

Függetlenség: példa

Két szabályos dobókockával dobunk. Független-e az alábbi két esemény: **az első dobás hatos**; **az összeg** 10?

Függetlenség: példa

Két szabályos dobókockával dobunk. Független-e az alábbi két esemény: **az első dobás hatos**; **az összeg** 10?

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	**46**
51	52	53	54	**55**	56
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**

A: az első dobás hatos; **C**: az összeg 10; $\mathbf{A} \cap \mathbf{C}$: az első dobás hatos, a második négyes

Függetlenség: példa

Két szabályos dobókockával dobunk. Független-e az alábbi két esemény: **az első dobás hatos**; **az összeg** 10?

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	**46**
51	52	53	54	**55**	56
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**

A: az első dobás hatos; **C**: az összeg 10; **A ∩ C**: az első dobás hatos, a második négyes

$$\frac{1}{36} = \mathbb{P}(A \cap C) \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{12}.$$

Az A és C események **nem függetlenek**.

Függetlenség: példa

Két szabályos dobókockával dobunk. Független-e az alábbi két esemény: **az első dobás hatos**; **az összeg** 7?

Függetlenség: példa

Két szabályos dobókockával dobunk. Független-e az alábbi két esemény: **az első dobás hatos**; **az összeg** 7?

11	12	13	14	15	**16**
21	22	23	24	**25**	26
31	32	33	**34**	35	36
41	42	**43**	44	45	46
51	**52**	53	54	55	56
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**

A: az első dobás hatos; **D**: az összeg 7; $\mathbf{A} \cap \mathbf{D}$: az első dobás hatos, a második egyes

Függetlenség: példa

Két szabályos dobókockával dobunk. Független-e az alábbi két esemény: **az első dobás hatos**; **az összeg** 7?

11	12	13	14	15	**16**
21	22	23	24	**25**	26
31	32	33	**34**	35	36
41	42	**43**	44	45	46
51	**52**	53	54	55	56
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**

A: az első dobás hatos; **D**: az összeg 7; **A ∩ D**: az első dobás hatos, a második egyes

$$\frac{1}{36} = \mathbb{P}(A \cap D) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(D) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}.$$

Az A és D események **függetlenek**.