A Kolmogorov-féle valószínűségi mező (2. előadás)

Ω: (magyar) **felnőtt emberek**

eseménytér

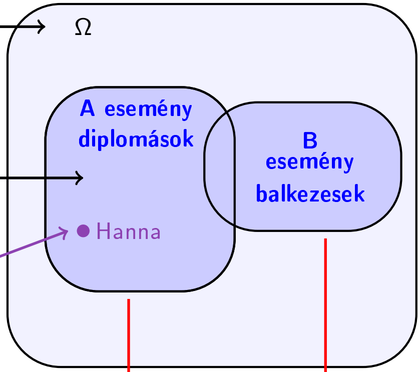
összes lehetőség: Ω

$\boxed{\mathbb{P}(\Omega) = 1}$

esemény

$A \subseteq \Omega$ részhalmaz

elemi esemény



valószínűség: eseményekhez $[0, 1]$-beli számokat rendelő függvény

$\boxed{\mathbb{P}(A) = 22\%}$ $\boxed{\mathbb{P}(B) = 10\%}$

Relatív gyakoriság

Legyen Ω az eseménytér, a lehetséges kimenetelek halmaza, és $A \subseteq \Omega$ egy esemény, vagyis ennek egy részhalmaza.

Az A esemény **relatív gyakorisága** n kísérletből:

$$r(A) = \frac{A \text{ bekövetkezéseinek száma}}{\text{az összes kísérlet száma}} = \frac{A \text{ bekövetkezéseinek száma}}{n}.$$

A relatív gyakoriságra az alábbiak igazak:

- **eseményekhez rendel nemnegatív számokat**, azaz $A \in \mathcal{A}$ esetén $r(A) \geq 0$
- **additív**: ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ események, és bármely kettő metszete üres, akkor

$$r(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = r(A_1) + r(A_2) + r(A_3) + \ldots$$

- $r(\Omega) = 1$, azaz a biztos esemény relatív gyakorisága 1

A valószínűség axiomatikus felépítése

Ω: eseménytér (a lehetséges kimenetelek összessége)

$\mathcal{A}$: az események halmaza

$\mathbb{P}$: **valószínűség**, amire az alábbiak teljesülnek:

- **eseményekhez rendel nemnegatív számokat**, azaz $A \in \mathcal{A}$ esetén $\mathbb{P}(A) \geq 0$
- **additív**: ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ események, és bármely kettő metszete üres, akkor

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) + \ldots$$

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, azaz a biztos esemény valószínűsége 1

Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ hármast **valószínűségi mezőnek** nevezzük.

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ hármas **Kolmogorov-féle valószínűségi mező**, ha

- az Ω **eseménytér** egy nem üres halmaz;

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ hármas **Kolmogorov-féle valószínűségi mező**, ha

- az Ω **eseménytér** egy nem üres halmaz;
- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ az **az események halmaza**, azaz minden $A \in \mathcal{A}$-ra $A \subseteq \Omega$ úgy, hogy
  - (i) $\Omega \in \mathcal{A}$;
  - (ii) ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, akkor $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ (azaz megszámlálható sok $\mathcal{A}$-beli elem uniója is $\mathcal{A}$-beli);
  - (iii) ha $A \in \mathcal{A}$, akkor $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ (azaz $\mathcal{A}$-beli halmazok komplementere is $\mathcal{A}$-beli.

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ hármas **Kolmogorov-féle valószínűségi mező**, ha

- az Ω **eseménytér** egy nem üres halmaz;
- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ az **az események halmaza**, azaz minden $A \in \mathcal{A}$-ra $A \subseteq \Omega$ úgy, hogy
  - (i) $\Omega \in \mathcal{A}$;
  - (ii) ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, akkor $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ (azaz megszámlálható sok $\mathcal{A}$-beli elem uniója is $\mathcal{A}$-beli);
  - (iii) ha $A \in \mathcal{A}$, akkor $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ (azaz $\mathcal{A}$-beli halmazok komplementere is $\mathcal{A}$-beli.
- a **valószínűség** egy $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$ függvény, melyre
  - (i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, azaz a biztos esemény valószínűsége 1;
  - (ii) ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ és minden $1 \leq i < j$-re $A_i \cap A_j = \emptyset$, akkor

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n),$$

azaz megszámlálható sok kizáró esemény uniójának valószínűsége a valószínűségek összege.

Véges valószínűségi mező

Tegyük fel, hogy véges sok lehetséges kimenetel van, vagyis $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, továbbá $\mathcal{A}$ az Ω összes részhalmazából áll.

Jelölés: $p_j = \mathbb{P}(\omega_j)$ a j. kimenetel valószínűsége. Ekkor az additivitás miatt

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = \sum_{j=1}^{n} p_j,$$

vagyis az elemi események valószínűségének összege 1. Továbbá

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\Bigg(\bigcup_{j:\, \omega_j \in A} p_j \Bigg) = \sum_{j:\, \omega_j \in A} p_j,$$

ami azt jelenti, hogy

minden esemény valószínűsége a benne lévő elemi események valószínűségének összege.

Klasszikus valószínűségi mező

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ olyan valószínűségi mező, melyre

- Ω véges halmaz;
- $\mathcal{A}$ az Ω összes részhalmazából áll;
- továbbá **minden elemi esemény egyformán valószínű**, azaz

$$\mathbb{P}(\omega_j) = p_j = \frac{1}{n} \qquad \text{minden } j = 1, 2, \ldots, n\text{-re.}$$

Ekkor $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$-t **klasszikus valószínűségi mezőnek** nevezzük. Ilyenkor tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ eseményre

$$\mathbb{P}(A) = \frac{k}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n},$$

ahol k az A elemeinek száma, n pedig az összes elemi esemény (lehetőség) száma.

Klasszikus valószínűségi mező

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ olyan valószínűségi mező, melyre

- Ω véges halmaz;
- $\mathcal{A}$ az Ω összes részhalmazából áll;
- továbbá **minden elemi esemény egyformán valószínű**, azaz

$$\mathbb{P}(\omega_j) = p_j = \frac{1}{n} \qquad \text{minden } j = 1, 2, \ldots, n\text{-re.}$$

Ekkor $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$-t **klasszikus valószínűségi mezőnek** nevezzük. Ilyenkor tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ eseményre

$$\mathbb{P}(A) = \frac{k}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n},$$

ahol k az A elemeinek száma, n pedig az összes elemi esemény (lehetőség) száma.

Példa: kétszer dobunk egy szabályos kockával, A: az összeg 7. Ekkor $k = 6$ és $n = 36$ alapján $\mathbb{P}(A) = 1/6 = 1/36 + 1/36 + 1/36 + 1/36 + 1/36 + 1/36$.

Példa: két szabályos kockadobás

Két szabályos dobókockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7?

Példa: két szabályos kockadobás

Két szabályos dobókockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7?

A dobókockák, emberek, tárgyak stb. mindig különbözőek.

- **eseménytér**: lehetséges dobássorozatok. Ezek száma:

$$6 \cdot 6 = 36; \text{mindkét dobás hatféle lehet.}$$

- A dobássorozatok egyformán valószínűek: mindegyiknek $1/36$ a valószínűsége.
- A kedvező dobássorozatok száma: 6.

11	12	13	14	15	**16**
21	22	23	24	**25**	26
31	32	33	**34**	35	36
41	42	**43**	44	45	46
51	**52**	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

Tehát $\mathbb{P}(\text{az összeg } 7) = 6/36 = 1/6$.

Házi feladat szeptember 18-ig: megoldás

Egy dobozban négy kék és két piros golyó van. Kiveszünk egy golyót, mindegyiket azonos valószínűséggel választva, majd még egyet, a megmaradt öt mindegyikét azonos valószínűséggel választva.

Legyen A_j az az esemény, hogy j darab kék golyót húzunk ($j = 0, 1, 2$).

a) Mennyi a valószínűsége, hogy két kék golyót húzunk? Annak valószínűsége, hogy egy kéket és egy pirosat? És annak valószínűsége, hogy csak pirosat? Azaz mennyi A_0, A_1, A_2 valószínűsége?

b) Készítsünk számítógépes szimulációt, mely a fenti kísérletet százszor elvégzi, és megadja a húzott kék golyók számát. Készítsünk hisztogramot, mely a kihúzott kék golyók számát ábrázolja a száz húzásból.

c) Mennyi a legnagyobb eltérés A_j relatív gyakorisága (vagyis bekövetkezésének aránya a száz kísérletből) és A_j valószínűsége, azaz $\mathbb{P}(A_j)$ között?

Házi feladat szeptember 18-ig: megoldás

Négy kék, **két piros** golyó, **kettőt húzunk** visszatevés nélkül.

Legyen A_j az az esemény, hogy j darab kék golyót húzunk $(j = 0, 1, 2)$.

A húzás eredményeképpen, ha a sorrendet nem vesszük figyelembe, két különböző golyót húzunk, és a szimmetria miatt **minden párt azonos valószínűséggel húzunk.**

Hat golyó esetén **a lehetséges párok száma**:

$$\frac{6 \cdot 5}{2} = \binom{6}{2} = 15.$$

Házi feladat szeptember 18-ig: megoldás

Négy kék, **két piros** golyó, **kettőt húzunk** visszatevés nélkül.

Legyen A_j az az esemény, hogy j darab kék golyót húzunk ($j = 0, 1, 2$).

A húzás eredményeképpen, ha a sorrendet nem vesszük figyelembe, két különböző golyót húzunk, és a szimmetria miatt **minden párt azonos valószínűséggel húzunk.**

Hat golyó esetén **a lehetséges párok száma**:

$$\frac{6 \cdot 5}{2} = \binom{6}{2} = 15.$$

Az olyan párok száma, amikor csak piros golyót húzunk: 1, hiszen összesen 2 piros golyó van.

$$\mathbb{P}(A_0) = \mathbb{P}(\text{két piros golyó}) = \frac{1}{15} = 6,7\%.$$

Házi feladat szeptember 18-ig: megoldás

Négy kék, **két piros** golyó, **kettőt húzunk** visszatevés nélkül.

Legyen A_j az az esemény, hogy j darab kék golyót húzunk ($j = 0, 1, 2$).

Hat golyó esetén **a lehetséges párok száma**: $\frac{6 \cdot 5}{2} = \binom{6}{2} = 15$.

Házi feladat szeptember 18-ig: megoldás

Négy kék, **két piros** golyó, **kettőt húzunk** visszatevés nélkül.

Legyen A_j az az esemény, hogy j darab kék golyót húzunk ($j = 0, 1, 2$).

Hat golyó esetén **a lehetséges párok száma**: $\frac{6\cdot5}{2} = \binom{6}{2} = 15$.

Az olyan párok száma, amikor csak piros golyót húzunk: 1, hiszen összesen két piros golyó van.

$$\mathbb{P}(A_0) = \mathbb{P}(\text{két piros golyó}) = \frac{1}{15} = 6,7\%.$$

Az olyan párok száma, amikor egy kék és egy piros golyót húzunk:

Házi feladat szeptember 18-ig: megoldás

Négy kék, **két piros** golyó, **kettőt húzunk** visszatevés nélkül.

Legyen A_j az az esemény, hogy j darab kék golyót húzunk ($j = 0, 1, 2$).

Hat golyó esetén **a lehetséges párok száma**: $\frac{6 \cdot 5}{2} = \binom{6}{2} = 15$.

Az olyan párok száma, amikor csak piros golyót húzunk: 1, hiszen összesen két piros golyó van.

$$\mathbb{P}(A_0) = \mathbb{P}(\text{két piros golyó}) = \frac{1}{15} = 6,7\%.$$

Az olyan párok száma, amikor egy kék és egy piros golyót húzunk: $\mathbf{4} \cdot \mathbf{2} = 8$, hiszen mind a négy kék golyó mindkét kékkel választható. Ezért

$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(\text{egy kék, egy piros golyó}) = \frac{2 \cdot 4}{15} = \frac{8}{15} = 53,3\%.$$

Házi feladat szeptember 18-ig: megoldás

Négy kék, **két piros** golyó, **kettőt húzunk** visszatevés nélkül. Legyen A_j az az esemény, hogy j darab kék golyót húzunk ($j = 0, 1, 2$). Hat golyó esetén **a lehetséges párok száma**: $\frac{6 \cdot 5}{2} = \binom{6}{2} = 15$.

Házi feladat szeptember 18-ig: megoldás

Négy kék, **két piros** golyó, **kettőt húzunk** visszatevés nélkül. Legyen A_j az az esemény, hogy j darab kék golyót húzunk ($j = 0, 1, 2$). Hat golyó esetén **a lehetséges párok száma**: $\frac{6 \cdot 5}{2} = \binom{6}{2} = 15$.

$$\mathbb{P}(A_0) = \mathbb{P}(\text{két piros golyó}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{15}} = 6,7\%.$$

$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(\text{egy kék, egy piros golyó}) = \frac{\mathbf{2 \cdot 4}}{\mathbf{15}} = \frac{8}{15} = 53,3\%.$$

Az olyan párok száma, amikor két kék golyót húzunk: $\frac{4 \cdot 3}{2} = \binom{4}{2} = 6$, ezért

$$\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(\text{két kék golyó}) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{6}{15} = 40\%.$$

Természetesen A_0, A_1, A_2 közül pontosan az egyik következik be, így

$$\mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{15} + \frac{8}{15} + \frac{6}{15} = 1.$$

Házi feladat szeptember 18-ig: megoldás

```
> x<-c(1,1,1,1,0,0)
```

kék: 1, piros: 0

```
> sample(x,2, replace=FALSE)
```

visszatevés nélkül két elemet sorsolunk

```
[1] 1 1
```

```
> sum(sample(x,2, replace=FALSE))
```

a kékek száma = az összeg

```
[1] 2
```

Házi feladat szeptember 18-ig: megoldás

```
> x<-c(1,1,1,1,0,0)
```

kék: 1, piros: 0

```
> sample(x,2, replace=FALSE)
```

visszatevés nélkül két elemet sorsolunk

```
[1] 1 1
> sum(sample(x,2, replace=FALSE))
```

a kékek száma = az összeg

```
[1] 2
> eredmeny<-rep(0,100)
```

100 darab csupa 0, majd 100 ismétlés

```
> for (k in 1:100) {eredmeny[k] = sum(sample(x,2, replace=FALSE))}
> eredmeny
```

a 100 sorsolás eredménye, majd hisztogram

```
[1] 2 1 2 1 0 2 2 1 ...
```

Házi feladat szeptember 18-ig: megoldás

```
> x<-c(1,1,1,1,0,0)
```
kék: 1, piros: 0

```
> sample(x,2, replace=FALSE)
```
visszatevés nélkül két elemet sorsolunk

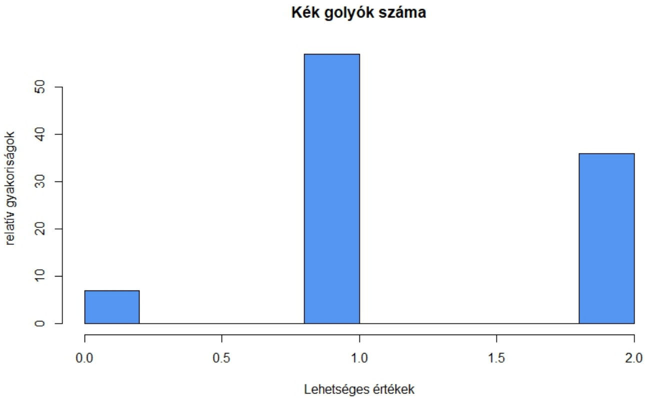
```
[1] 1 1
> sum(sample(x,2, replace=FALSE))
```
a kékek száma = az összeg

```
[1] 2
> eredmeny<-rep(0,100)
```
100 darab csupa 0, majd 100 ismétlés

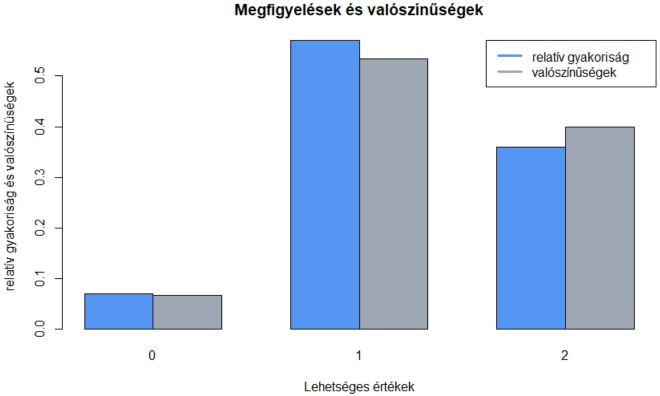
```
> for (k in 1:100) {eredmeny[k] = sum(sample(x,2, replace=FALSE))}
> eredmeny
```
a 100 sorsolás eredménye, majd hisztogram

```
[1] 2 1 2 1 0 2 2 1 ...
> hist(eredmeny, col=”#5596f2”, main=”Kék golyók száma”, xlab=
”Lehetséges értékek”, ylab=”relatív gyakoriságok”)
```

Házi feladat szeptember 18-ig: megoldás



Házi feladat szeptember 18-ig: megoldás



A relatív gyakoriságok százelemű mintából és a valószínűségek $(1/15, 8/15, 6/15)$.
A legnagyobb különbség: **4%**.

Leszámlálások és jelölések

$$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots 2\cdot 1; \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k(k-1)\ldots 2\cdot 1}.$$

- n tárgyat $n!$-féleképpen lehet sorrendbe tenni.
- n tárgy közül k darabot visszatevés nélkül $n(n-1)\ldots(n-k+1)$-féleképpen lehet húzni, ha figyelembe vesszük a sorrendet: az első n-féle, a második $n-1$-féle lehet (akármi volt az első), a harmadik $n-2$-féle lehet (akármi volt az első kettő), és így tovább
- n tárgy közül egy k darabból álló csoportot $\binom{n}{k}$-féleképpen lehet kiválasztani (itt a kiválasztás sorrendje nem számít)
- ha n egymás utáni kísérlet mindegyikénél k lehetőség van, akkor az összes lehetőség száma a sorrendet is figyelembe véve

  $$n\cdot n\cdot\ldots\cdot n = n^k.$$

  Például egy kockadobás hatféle lehet, kettő 36-féle, három $6\cdot 6\cdot 6$-féle, n kockadobás 6^n-féle.

Tulajdonságok

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}; \quad \binom{n}{0} = 1; \binom{n}{1} = n; \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\binom{n}{N} = 0, \text{ ha } N > n.$$

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ általánosítása a **binomiális tétel**:

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{k}x^k y^{n-k} + \ldots + nxy^{n-1} + y^n.$$

Következmény $x = y = 1$-re:

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{k} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}.$$

Multinomiális/polinomiális tétel

- $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$
- $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

Multinomiális/polinomiális tétel

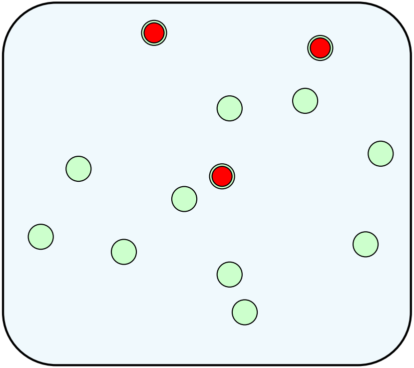
- $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$
- $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
- általánosan:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n = \sum \frac{n!}{i_1! \cdot i_2! \cdot \ldots \cdot i_k!} \cdot x_1^{i_1} \cdot x_2^{i_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{i_k},$$

ahol összegzünk az összes olyan $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ pozitív egészekből álló sorozat-ra, melyre $i_1 + i_2 + \ldots + i_k = n$.

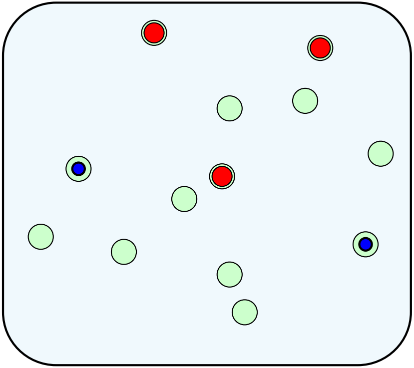
Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Egy vízilabdacsapat **13 tagja** közül **három játékos** doppingol.
A doppingtesztre kiválasztanak **két különböző** játékost,
minden lehetséges párt azonos valószínűséggel választva.



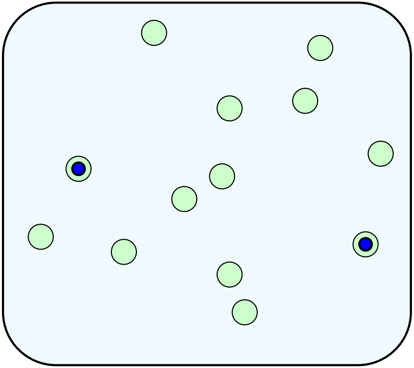
Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Egy vízilabdacsapat **13 tagja** közül **három játékos** doppingol.
A doppingtesztre kiválasztanak **két különböző** játékost,
minden lehetséges párt azonos valószínűséggel választva.
Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott játékosok közül
egy sem doppingol?



Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Hányféleképpen lehet **13 játékos** közül **két különbözőt** választani?



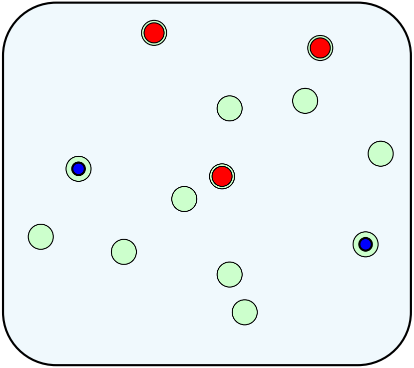
Visszatevés nélküli mintavétel: példa

első második

$$\frac{13 \cdot 12}{2} = \binom{13}{2} = 78$$

a sorrend nem számít

$\binom{13}{2} = 78$
egyformán
valószínű
eset van

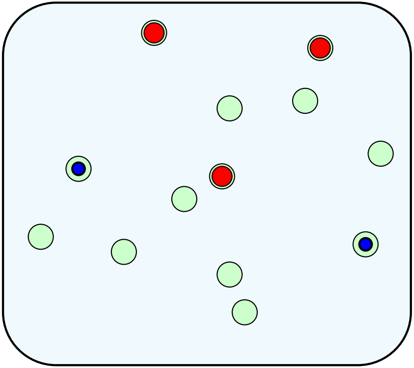


Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Hányféleképpen lehet **13-3=10 nem doppingoló játékos** közül **két különbözőt** választani?

$$\frac{10 \cdot 9}{2} = \binom{10}{2} = 45$$

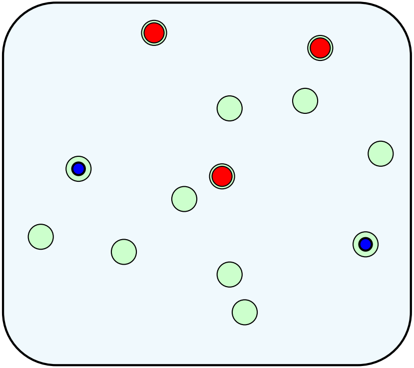
$\binom{13}{2} = 78$ egyformán valószínű eset van



Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Annak valószínűsége, hogy a **két játékos egyike sem** doppingol:

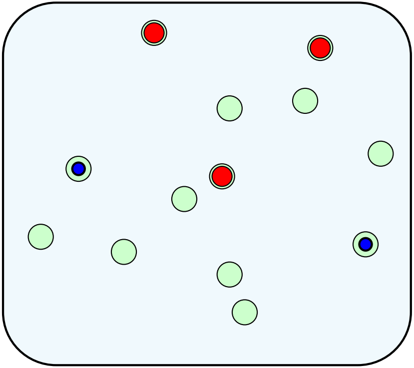
$\binom{13}{2} = 78$
egyformán
valószínű
eset van



Visszatevés nélküli mintavétel: példa

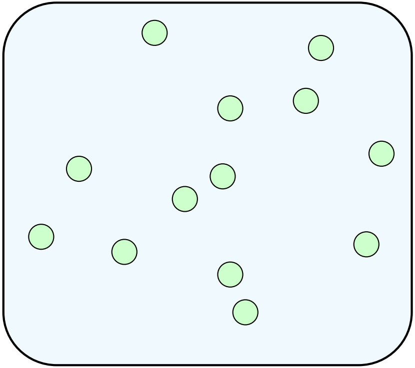
$$\begin{array}{rc} \textbf{egyik sem doppingol} \longrightarrow \\ \text{összes eset} \longrightarrow \end{array} \frac{\binom{10}{2}}{\binom{13}{2}} = \frac{45}{78} = \mathbf{57,7\%}.$$

$\binom{13}{2} = 78$
egyformán
valószínű
eset van



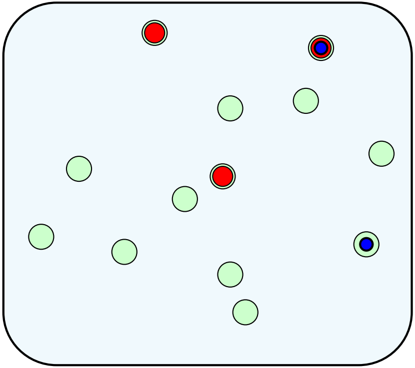
Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Egy vízilabdacsapat **13 tagja** közül **három játékos** doppingol.
A doppingtesztre kiválasztanak **két különböző** játékost,
minden lehetséges párt azonos valószínűséggel választva.



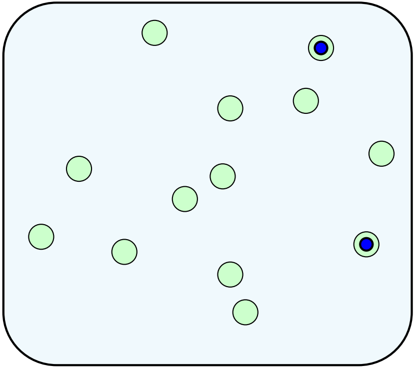
Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Egy vízilabdacsapat **13 tagja** közül **három játékos** doppingol.
A doppingtesztre kiválasztanak **két különböző** játékost,
minden lehetséges párt azonos valószínűséggel választva.
Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott játékosok közül
pontosan egy doppingol?



Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Hányféleképpen lehet **13 játékos** közül **két különbözőt** választani?

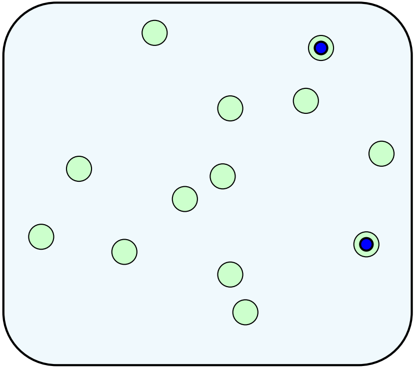


Visszatevés nélküli mintavétel: példa

első második

$$\frac{13\cdot 12}{2} = \binom{13}{2} = 78$$

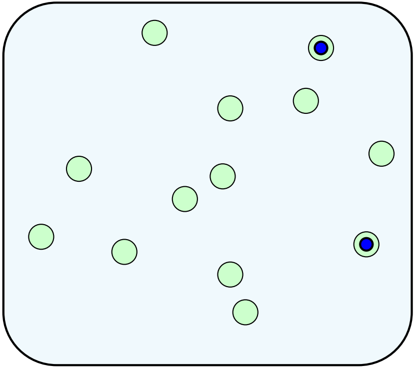
a sorrend nem számít



Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Hányféleképpen lehet **egy doppingoló** és **egy nem doppingoló** játékost választani?

$\binom{13}{2} = 78$ egyformán valószínű eset van

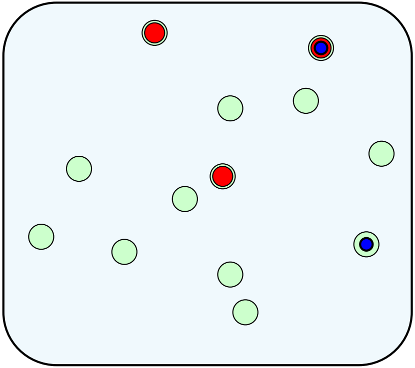


Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Hányféleképpen lehet **egy doppingoló** és **egy nem doppingoló** játékost választani?

$$3 \cdot 10 = 30$$

$\binom{13}{2} = 78$
egyformán
valószínű
eset van



Visszatevés nélküli mintavétel: példa

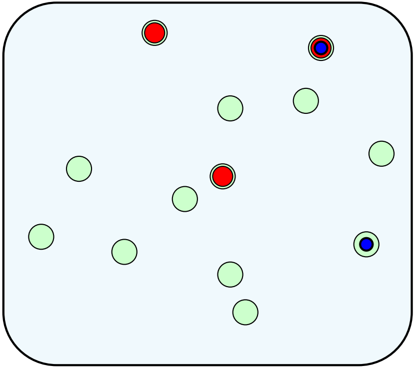
Hányféleképpen lehet **egy doppingoló** és **egy nem doppingoló** játékost választani?

$$3 \cdot 10 = 30$$

a doppingoló **háromféle**, a másik **tízféle** lehet

ezek mind különböző esetek

$\binom{13}{2} = 78$ egyformán valószínű eset van



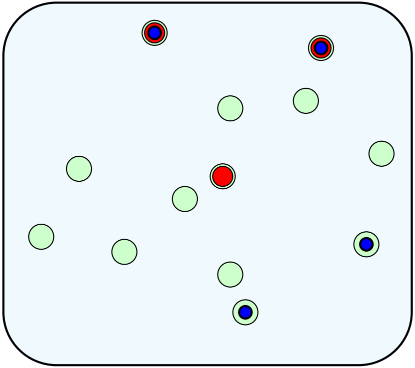
Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Annak valószínűsége, hogy a **két játékos** közül

pontosan egy doppingol:

$$\begin{array}{rcl} \textbf{egyik igen, másik nem} & \longrightarrow & \dfrac{3 \cdot 10}{\binom{13}{2}} = \dfrac{30}{78} = \mathbf{38,5\%}. \\ \text{összes eset} & \longrightarrow & \end{array}$$

$\binom{13}{2} = 78$
egyformán
valószínű
eset van



Visszatevés nélküli mintavétel: példa

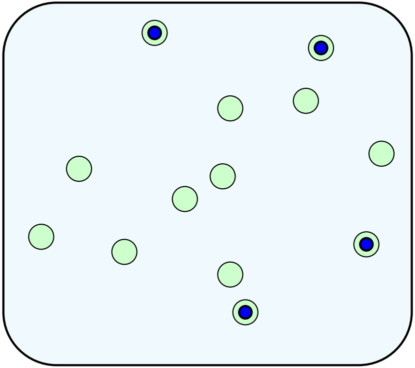
Annak valószínűsége, hogy a **két játékos** közül

pontosan egy doppingol:

$$\begin{array}{lll} \textbf{egyik igen, másik nem} & \longrightarrow & \dfrac{3 \cdot 10}{\binom{13}{2}} = \dfrac{30}{78} = \mathbf{38,5\%}. \\ \text{összes eset} & \longrightarrow & \end{array}$$

mindkettő doppingol: $100 - 57,7 - 38,5 = 3,8\%$

$\binom{13}{2} = 78$ egyformán valószínű eset van



Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Egy vízilabdacsapat N **tagja** közül

Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Egy vízilabdacsapat N **tagja** közül M **játékos** doppingol.

Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Egy vízilabdacsapat N **tagja** közül M **játékos** doppingol.

A doppingtesztre kiválasztanak n **különböző** játékost,

minden lehetséges csoportot azonos valószínűséggel választva.

Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Egy vízilabdacsapat N **tagja** közül M **játékos** doppingol.

A doppingtesztre kiválasztanak n **különböző** játékost,

minden lehetséges csoportot azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott játékosok közül

pontosan k doppingol?

Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Hányféleképpen lehet N **játékos** közül n **különbözőt** választani?

Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Hányféleképpen lehet N **játékos** közül n **különbözőt** választani?

első második $n.$

$$\frac{N\cdot(N-1)\cdot\ldots\cdot(N-n+1)}{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1} = \frac{N!}{n!(N-n)!} = \binom{N}{n}$$

a sorrend nem számít

Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Hányféleképpen lehet N **játékos** közül n **különbözőt** választani?

$$\frac{\overset{\text{első}}{N}\cdot(\overset{\text{második}}{N-1})\cdot\ldots\cdot(\overset{n.}{N-n+1})}{\underbrace{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1}_{\text{a sorrend nem számít}}} = \frac{N!}{n!(N-n)!} = \binom{N}{n}$$

Hányféleképpen lehet k **doppingoló** és $n-k$ **nem doppingoló** játékost választani, ha összesen M **doppingoló** és $N-M$ **nem doppingoló** játékos van?

Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Hányféleképpen lehet N **játékos** közül n **különbözőt** választani?

$$\frac{\overset{\text{első}}{N}\cdot(\overset{\text{második}}{N-1})\cdot\ldots\cdot(\overset{n.}{N-n+1})}{\underbrace{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1}_{\text{a sorrend nem számít}}}=\frac{N!}{n!(N-n)!}=\binom{N}{n}$$

Hányféleképpen lehet k **doppingoló** és $n-k$ **nem doppingoló** játékost választani, ha összesen M **doppingoló** és $N-M$ **nem doppingoló** játékos van?

$$\underbrace{\binom{M}{k}}_{\text{doppingolók}}\cdot\underbrace{\binom{N-M}{n-k}}_{\text{nem doppingolók}}$$

Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Hányféleképpen lehet N **játékos** közül n **különbözőt** választani?

$$\frac{\overset{\text{első}}{N}\cdot(\overset{\text{második}}{N-1})\cdot\ldots\cdot(\overset{n.}{N-n+1})}{\underbrace{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot1}_{\text{a sorrend nem számít}}} = \frac{N!}{n!(N-n)!} = \binom{N}{n}$$

Hányféleképpen lehet k **doppingoló** és $n-k$ **nem doppingoló** játékost választani, ha összesen M **doppingoló** és $N-M$ **nem doppingoló** játékos van?

$$\underbrace{\binom{M}{k}}_{\text{doppingolók}} \cdot \underbrace{\binom{N-M}{n-k}}_{\text{nem doppingolók}}$$

bármelyik csoport bármelyikkel párosítható és különböző esetet ad, ezért lehet szorozni

Visszatevés nélküli mintavétel: példa

Hányféleképpen lehet N **játékos** közül n **különbözőt** választani?

első második $n.$

$$\frac{N\cdot(N-1)\cdot\ldots\cdot(N-n+1)}{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot1} = \frac{N!}{n!(N-n)!} = \binom{N}{n}$$

a sorrend nem számít

Hányféleképpen lehet k **doppingoló** és $n-k$ **nem doppingoló** játékost választani, ha összesen M **doppingoló** és $N-M$ **nem doppingoló** játékos van?

$$\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}$$

doppingolók nem doppingolók

bármelyik csoport bármelyikkel párosítható és különböző esetet ad, ezért lehet szorozni

$$\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ játékos doppingol az } n \text{ közül}) = \frac{\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Visszatevés nélküli mintavétel

- Egy dobozban N golyó van, közülük M **fekete**, a többi **fehér**.

Visszatevés nélküli mintavétel

- Egy dobozban N golyó van, közülük M **fekete**, a többi **fehér**.
- **Visszatevés nélkül** kihúznak n darabot (minden húzásnál minden, még a dobozban lévő golyót azonos valószínűséggel választva).

Visszatevés nélküli mintavétel

- Egy dobozban N golyó van, közülük M **fekete**, a többi **fehér**.
- **Visszatevés nélkül** kihúznak n darabot (minden húzásnál minden, még a dobozban lévő golyót azonos valószínűséggel választva).
- Tegyük fel, hogy $n \leq M$ és $n \leq N - M$. Annak valószínűsége, hogy pontosan k darab fekete golyót húznak ki:

Visszatevés nélküli mintavétel

- Egy dobozban N golyó van, közülük M **fekete**, a többi **fehér**.
- **Visszatevés nélkül** kihúznak n darabot (minden húzásnál minden, még a dobozban lévő golyót azonos valószínűséggel választva).
- Tegyük fel, hogy $n \le M$ és $n \le N - M$. Annak valószínűsége, hogy pontosan k darab fekete golyót húznak ki:

$$\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ fekete}) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Megjegyzés: a kihúzott fekete golyók száma **hipergeometrikus eloszlású.**

Mivel az $\binom{N}{n}$ lehetséges eset mindegyike egyformán valószínű, a **klasszikus valószínűségi mező** modelljét használtuk.

Példa: visszatevés nélküli mintavétel

Egy osztályba **8 lány** és **25 fiú** jár.

Példa: visszatevés nélküli mintavétel

Egy osztályba **8 lány** és **25 fiú** jár.

Egy felméréshez véletlenszerűen kiválasztanak egy **hatfős csapatot**

Példa: visszatevés nélküli mintavétel

Egy osztályba **8 lány** és **25 fiú** jár.

Egy felméréshez véletlenszerűen kiválasztanak egy **hatfős csapatot** úgy, hogy minden hatfős csoportot azonos valószínűséggel választanak.

Példa: visszatevés nélküli mintavétel

Egy osztályba **8 lány** és **25 fiú** jár.
Egy felméréshez véletlenszerűen kiválasztanak egy **hatfős csapatot** úgy, hogy minden hatfős csoportot azonos valószínűséggel választanak.

Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott csapatban **pontosan két lány** van?

Példa: visszatevés nélküli mintavétel

$N = 33$ a diákok száma

Egy osztályba **8 lány** és **25 fiú** jár.

Egy felméréshez véletlenszerűen kiválasztanak egy **hatfős csapatot** úgy, hogy minden hatfős csoportot azonos valószínűséggel választanak.

Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott csapatban **pontosan két lány** van?

Példa: visszatevés nélküli mintavétel

$M = 8$ a lányok száma

$N = 33$ a diákok száma

Egy osztályba **8 lány** és **25 fiú** jár.

Egy felméréshez véletlenszerűen kiválasztanak egy **hatfős csapatot** úgy, hogy minden hatfős csoportot azonos valószínűséggel választanak.

Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott csapatban **pontosan két lány** van?

Példa: visszatevés nélküli mintavétel

$M = 8$ a lányok száma

$N = 33$ a diákok száma

$n = 6$ a minta nagysága

Egy osztályba **8 lány** és **25 fiú** jár.

Egy felméréshez véletlenszerűen kiválasztanak egy **hatfős csapatot** úgy, hogy minden hatfős csoportot azonos valószínűséggel választanak.

Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott csapatban **pontosan két lány** van?

Példa: visszatevés nélküli mintavétel

$\boxed{M = 8 \text{ a lányok száma}}$

$\boxed{N = 33 \text{ a diákok száma}}$

Egy osztályba **8 lány** és **25 fiú** jár.

$\boxed{n = 6 \text{ a minta nagysága}}$

Egy felméréshez véletlenszerűen kiválasztanak egy **hatfős csapatot** úgy, hogy minden hatfős csoportot azonos valószínűséggel választanak.

Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott csapatban

$\boxed{k = 2 \text{ a kérdés}}$ $\longleftarrow$ **pontosan két lány** van?

Példa: visszatevés nélküli mintavétel

$M = 8$ a lányok száma

$N = 33$ a diákok száma

$n = 6$ a minta nagysága

Egy osztályba **8 lány** és **25 fiú** jár.

Egy felméréshez véletlenszerűen kiválasztanak egy **hatfős csapatot** úgy, hogy minden hatfős csoportot azonos valószínűséggel választanak.

Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott csapatban

$k = 2$ a kérdés $\longleftarrow$ **pontosan két lány** van?

$$\boxed{\mathbb{P}(\text{pontosan két lány}) = \frac{\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{8}{2}\cdot\binom{25}{4}}{\binom{33}{6}} = \mathbf{31,9\%}.}$$

Példa: visszatevés nélküli mintavétel

$M = 8$ a lányok száma

$N = 33$ a diákok száma

$n = 6$ a minta nagysága

Egy osztályba **8 lány** és **25 fiú** jár.

Egy felméréshez véletlenszerűen kiválasztanak egy **hatfős csapatot** úgy, hogy minden hatfős csoportot azonos valószínűséggel választanak.

Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott csapatban

$k = 2$ a kérdés $\longleftarrow$ **pontosan két lány** van?

lányok kiválasztása

fiúk kiválasztása

$$\boxed{\mathbb{P}(\text{pontosan két lány}) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{25}{4}}{\binom{33}{6}} = \mathbf{31,9\%}.}$$

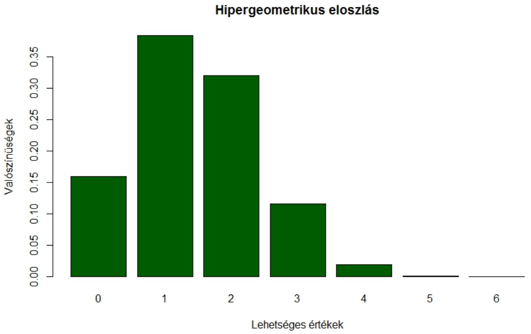
szorzás: bármely két lány bármely négy fiúval választható

összes eset

Példa: visszatevés nélküli mintavétel

8 lány, 25 fiú, hatfős csapatot választanak.

$$\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ lány}) = \frac{\binom{8}{k} \cdot \binom{25}{6-k}}{\binom{33}{6}}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, 6.$$



A lány csapattagok számának eloszlása: lehetséges értékek és valószínűségek

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van.

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van. Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik, minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét azonos valószínűséggel választva.

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van.
Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik,
minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét
azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt**
pontosan négyszer iszik kék bögréből?

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van.
Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik,
minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét
azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt**
pontosan négyszer iszik kék bögréből?

az **összes lehetőség** száma:

5

az első napon ötféle lehetőség van

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van. Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik, minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt**
pontosan négyszer iszik kék bögréből?

az **összes lehetőség** száma:

5 5

az első két napon $5 \cdot 5 = 25$-féle lehetőség van
bármelyik bögre bármelyikkel választható, lehet szorozni
a bögrék különbözők
ezek az esetek egyformán valószínűek

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van.
Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik,
minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét
azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt**
pontosan négyszer iszik kék bögréből?

az **összes lehetőség** száma:

5 5 5

az első három napon $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$-féle lehetőség van
bármelyik bögre bármelyikkel választható, lehet szorozni
a bögrék különbözők
ezek az esetek egyformán valószínűek

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van.
Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik,
minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét
azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt**
pontosan négyszer iszik kék bögréből?

az **összes lehetőség** száma:

$$5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \longrightarrow \boxed{5^7}$$

összesen 5^7 egyformán valószínű lehetőség van egy hét alatt
bármelyik bögre bármelyikkel választható, lehet szorozni
a bögrék különbözők
ezek az esetek egyformán valószínűek

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van.
Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik,
minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét
azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt**
pontosan négyszer iszik kék bögréből?

5^7 egyformán valószínű lehetőség

jó lehetőség például, amikor első négy nap iszik kék bögréből:

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van.
Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik,
minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét
azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt**
pontosan négyszer iszik kék bögréből?

5^7 egyformán valószínű lehetőség

jó lehetőség például, amikor első négy nap iszik kék bögréből:

3 3 3 3 2 2 2

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van.
Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik,
minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét
azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt**
pontosan négyszer iszik kék bögréből?

5^7 egyformán valószínű lehetőség

jó lehetőség például, amikor első négy nap iszik kék bögréből:

$$3 \quad 3 \quad 3 \quad 3 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \longrightarrow \boxed{3^4 \cdot 2^3}$$

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 3^4 \cdot 2^3$ ilyen lehetőség van

bármelyik bögre bármelyikkel választható, lehet szorozni

a bögrék különbözők

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van.
Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik,
minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét
azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt**
pontosan négyszer iszik kék bögréből?

5^7 egyformán valószínű lehetőség

egy másik jó sorrend, ha az $1., 3., 4., 6.$ napon iszik kék bögréből:

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van.
Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik,
minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét
azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt**
pontosan négyszer iszik kék bögréből?

5^7 egyformán valószínű lehetőség

egy másik jó sorrend, ha az $1., 3., 4., 6.$ napon iszik kék bögréből:

3 2 3 3 2 3 2

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van.
Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik,
minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét
azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt**
pontosan négyszer iszik kék bögréből?

5^7 egyformán valószínű lehetőség

egy másik jó sorrend, ha az $1., 3., 4., 6.$ napon iszik kék bögréből:

$$3 \quad 2 \quad 3 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \quad 2 \longrightarrow \boxed{3^4 \cdot 2^3}$$

$3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 3^4 \cdot 2^3$ ilyen lehetőség van

bármelyik bögre bármelyikkel választható, lehet szorozni

a bögrék különbözők

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van. Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik, minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt pontosan négyszer iszik kék bögréből?**

5^7 egyformán valószínű lehetőség

jó lehetőségek száma:

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van.
Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik,
minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét
azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt**
pontosan négyszer iszik kék bögréből?

5^7 egyformán valószínű lehetőség

jó lehetőségek száma:

színezések száma

lehetőségek száma adott színezésnél

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van.
Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik,
minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét
azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt**
pontosan négyszer iszik kék bögréből?

5^7 egyformán valószínű lehetőség

jó lehetőségek száma:

színezések száma $\times$ lehetőségek száma adott színezésnél

$\boxed{\binom{7}{4}} \times \boxed{3^4 \cdot 2^3} = 35 \cdot 3^4 \cdot 2^3$

ennyiféleképpen választhatjuk ki a négy kék napot a hétből

minden színezéshez ugyanannyi lehetőség tartozik

Visszatevéses mintavétel: példa

Péternek **három kék** és **két zöld** kávésbögréje van.
Minden reggel egy véletlenszerűen választott bögréből iszik, minden nap a korábbiakat elfelejtve és mind az öt bögrét azonos valószínűséggel választva.

Mennyi a valószínűsége, hogy **egy hét alatt pontosan négyszer iszik kék bögréből?**

5^7 egyformán valószínű lehetőség

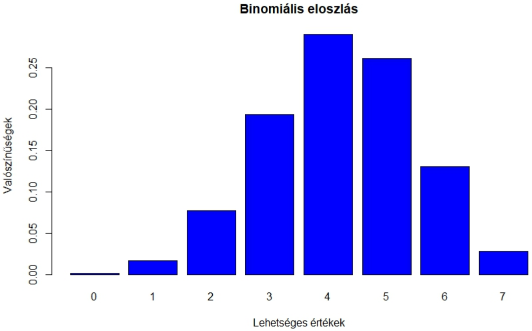
$$\boxed{\mathbb{P}(\text{pontosan négyszer iszik kék bögréből}) = \frac{\binom{7}{4}\cdot 3^4\cdot 2^3}{5^7},}$$

azaz $\frac{35\cdot 81\cdot 8}{78125} = \mathbf{29,03}\%$.

Példa: visszatevéses mintavétel

3 kék, 2 zöld bögre, Péter hét napon át találomra választ.

$$\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ kék}) = \frac{\binom{7}{4} \cdot 3^4 \cdot 2^3}{5^7}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, 7.$$



A kék bögrés napok száma: lehetséges értékek és valószínűségek

Visszatevéses mintavétel

- Egy dobozban N golyó van, közülük M fekete, a többi fehér.
- **Visszatevéssel** kihúznak n darabot, minden húzásnál a korábbiakat elfelejtve mind az N golyót azonos valószínűséggel választva.
- Annak valószínűsége, hogy az n húzás közül pontosan k-nál jön fekete:

Visszatevéses mintavétel

- Egy dobozban N golyó van, közülük M fekete, a többi fehér.
- **Visszatevéssel** kihúznak n darabot, minden húzásnál a korábbiakat elfelejtve mind az N golyót azonos valószínűséggel választva.
- Annak valószínűsége, hogy az n húzás közül pontosan k-nál jön fekete:

$$\boxed{\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ fekete}) = \binom{n}{k} \frac{M^k \cdot (N-M)^{n-k}}{N^n} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n).}$$

Visszatevéses mintavétel

- Egy dobozban N golyó van, közülük M fekete, a többi fehér.
- **Visszatevéssel** kihúznak n darabot, minden húzásnál a korábbiakat elfelejtve mind az N golyót azonos valószínűséggel választva.
- Annak valószínűsége, hogy az n húzás közül pontosan k-nál jön fekete:

melyik feketéket húztunk (k húzás)

melyik k húzás fekete

melyik fehéreket húztuk ($n-k$ húzás)

$$\boxed{\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ fekete}) = \binom{n}{k}\frac{M^k \cdot (N-M)^{n-k}}{N^n} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n).}$$

összes lehetőség

Visszatevéses mintavétel

- Egy dobozban N golyó van, közülük M fekete, a többi fehér.
- **Visszatevéssel** kihúznak n darabot, minden húzásnál a korábbiakat elfelejtve mind az N golyót azonos valószínűséggel választva.
- Annak valószínűsége, hogy az n húzás közül pontosan k-nál jön fekete:

melyik feketéket húztunk (k húzás)

melyik k húzás fekete

melyik fehéreket húztuk ($n-k$ húzás)

$$\boxed{\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ fekete}) = \binom{n}{k}\frac{M^k\cdot(N-M)^{n-k}}{N^n} \qquad (k=0,1,2,\dots,n).}$$

összes lehetőség

Megjegyzés: a kihúzott fekete golyók száma **binomiális eloszlású**.
Mivel az N^n eset egyformán valószínű volt, ez is **klasszikus valószínűségi mező**.

Visszatevéses mintavétel: példa

Egy osztályba **14 lány** és **22 fiú** jár.

Visszatevéses mintavétel: példa

Egy osztályba **14 lány** és **22 fiú** jár.

A tanár minden fizikaórán kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal a korábbiakat elfelejtve, és mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet).

Visszatevéses mintavétel: példa

Egy osztályba **14 lány** és **22 fiú** jár.
A tanár minden fizikaórán kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal a korábbiakat elfelejtve, és mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet).

Visszatevéses mintavétel: példa

Egy osztályba **14 lány** és **22 fiú** jár.
A tanár minden fizikaórán kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal a korábbiakat elfelejtve, és mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet).

Mennyi a valószínűsége, hogy **hat egymást követő órán pontosan két lány** felel?

Visszatevéses mintavétel: példa

Egy osztályba **14 lány** és **22 fiú** jár. → $\boxed{N = 36 \text{ a diákok száma}}$

A tanár minden fizikaórán kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal a korábbiakat elfelejtve, és mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet).

Mennyi a valószínűsége, hogy **hat egymást követő órán** **pontosan két lány** felel?

Visszatevéses mintavétel: példa

$\boxed{M = 14 \text{ a lányok száma}}$

Egy osztályba **14 lány** és **22 fiú** jár. $\longrightarrow$ $\boxed{N = 36 \text{ a diákok száma}}$

A tanár minden fizikaórán kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal a korábbiakat elfelejtve, és mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet).

Mennyi a valószínűsége, hogy **hat egymást követő órán** **pontosan két lány** felel?

Visszatevéses mintavétel: példa

$M = 14$ a lányok száma

$N = 36$ a diákok száma

Egy osztályba **14 lány** és **22 fiú** jár.

A tanár minden fizikaórán kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal a korábbiakat elfelejtve, és mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet).

$n = 6$ a minta nagysága

Mennyi a valószínűsége, hogy **hat egymást követő órán** **pontosan két lány** felel?

Visszatevéses mintavétel: példa

$\boxed{M = 14 \text{ a lányok száma}}$

Egy osztályba **14 lány** és **22 fiú** jár. $\longrightarrow$ $\boxed{N = 36 \text{ a diákok száma}}$

A tanár minden fizikaórán kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal a korábbiakat elfelejtve, és mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet).

$\boxed{n = 6 \text{ a minta nagysága}}$

Mennyi a valószínűsége, hogy **hat egymást követő órán**

$\boxed{k = 2 \text{ a kérdés}}$ $\longleftarrow$ **pontosan két lány** felel?

Visszatevéses mintavétel: példa

$M = 14$ a lányok száma

Egy osztályba **14 lány** és **22 fiú** jár. $\longrightarrow$ $N = 36$ a diákok száma

A tanár minden fizikaórán kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal a korábbiakat elfelejtve, és mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet).

$n = 6$ a minta nagysága

Mennyi a valószínűsége, hogy **hat egymást követő órán** **pontosan két lány** felel?

$k = 2$ a kérdés $\longleftarrow$

$$\boxed{\mathbb{P}(\text{pontosan két lány}) = \binom{n}{k}\frac{M^k \cdot (N-M)^{n-k}}{N^n} = \binom{6}{2}\frac{14^2 \cdot 22^4}{36^6} = \mathbf{31,6}\%.}$$

Visszatevéses mintavétel: példa

$M = 14$ a lányok száma

Egy osztályba **14 lány** és **22 fiú** jár.

$N = 36$ a diákok száma

A tanár minden fizikaórán kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal a korábbiakat elfelejtve, és mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet).

$n = 6$ a minta nagysága

Mennyi a valószínűsége, hogy **hat egymást követő órán** **pontosan két lány** felel?

$k = 2$ a kérdés

lányok kiválasztása fiúk kiválasztása

$$\mathbb{P}(\text{pontosan két lány}) = \binom{n}{k} \frac{M^k \cdot (N-M)^{n-k}}{N^n} = \binom{6}{2} \frac{14^2 \cdot 22^4}{36^6} = \mathbf{31,6\%}.$$

összes eset

melyik két órán felel lány

szorzás: bármely felelő bármely másikkal választható

Házi feladat szeptember 25., 10:15-ig

Tegyük fel, hogy egy város 20000 választópolgára közül 3467-en támogatnak egy adott pártot.

1. Mennyi a valószínűsége, hogy 2000 véletlenszerűen választott embert megkérdezve pontosan 348 lesz közülük, aki támogatja ezt a pártot, ha az embereket véletlenszerűen, egyenletesen választjuk úgy, hogy a már megkérdezetteket nem sorsoljuk ki újra?
2. Mennyi ugyanez a valószínűség, ha a mintát úgy választjuk, hogy minden sorsolásnál mind a 20000 választópolgár közül választunk, a korábbi választásokat elfelejtve? Mennyi a különbsége ennek és az előző valószínűségnek?
3. **Szorgalmi feladat:** készítsünk szimulációt, ami elvégzi (a)-beli kísérletet 100-szor, és készítsünk hisztogramot az egyes kísérleteknél a támogatók számából.
4. **Szorgalmi feladat:** Készítsük el ugyanezt a (b)-beli kísérletre. Hasonlítsuk össze a két hisztogramot.

Segítség a következő oldalon

Néhány hasznos *R* parancs

Az *R*-ben

- 100 darab 0: rep(0,100);
- az a és b vektorok összeillesztése: c(a,b);
- az *a* vektorból *n* elemű minta visszatevés nélkül: sample(a, size=n)
- az *a* vektorból *n* elemű minta visszatevéssel: sample(a, size=n, replace=T)