Centrális határeloszlástétel (12. előadás)

Tétel (Centrális határeloszlástétel)

Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ **független azonos eloszlású** *valószínűségi változók, melyekre* $\mathbb{E}(X_1) = m$ *és* $D(X_1) = \sigma < \infty$*, azaz* **szórásuk véges***. Ekkor tetszőleges* t *valós számra*

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - n \cdot m}{\sigma\sqrt{n}} \leq t\right) \to \mathbb{P}(Z \leq t) \qquad (n \to \infty),$$

ahol Z *standard normális eloszlású, azaz*

$$\mathbb{P}(Z \leq t) = \Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

Ezt úgy is fogalmazhatjuk, hogy

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - n \cdot m}{\sigma\sqrt{n}} \to N(0,1)$$

teljesül $n \to \infty$ esetén eloszlásban. Azonos eloszlású: $\mathbb{P}(X_i \leq t) = P(X_j \leq t)$ minden i, j párra és t valós számra

Házi feladat december 11-ig

Válasszunk egy tetszőleges véges szórású eloszlást, illetve $n \geq 100$ egészt. Legyen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független azonos eloszlású minta a kiválasztott eloszlásból. Az eloszlás várható értéke legyen m, szórása pedig σ.

Tekintsünk az

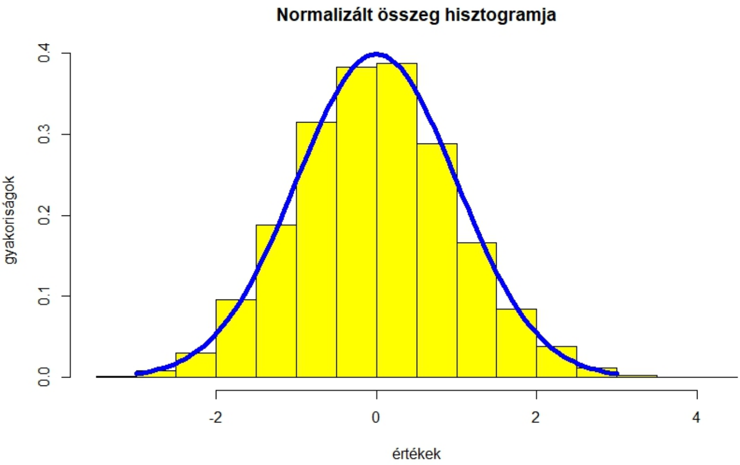
$$Y_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}$$

mennyiséget.

Ezt a kísérletet ismételjük meg 100-szor, és készítsünk hisztogramot a kapott értékekből.

A hisztogramot hasonlítsuk össze a standard normális eloszlás sűrűségfüggvényével.

Házi feladat december 11-ig

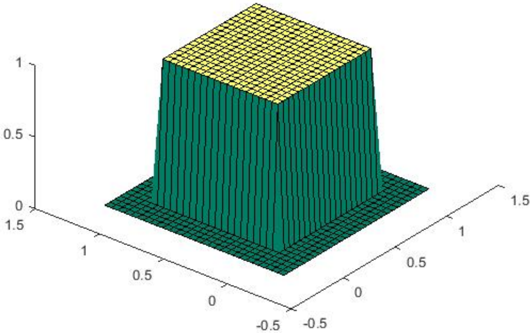


Az $Y_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}$ normalizált összegek hisztogramja $k = 10000$ ismétlésből, $\lambda = 3$ paraméterű exponenciális eloszlásból kiindulva (várható érték és szórás is 1/3)

Házi feladat december 11-ig

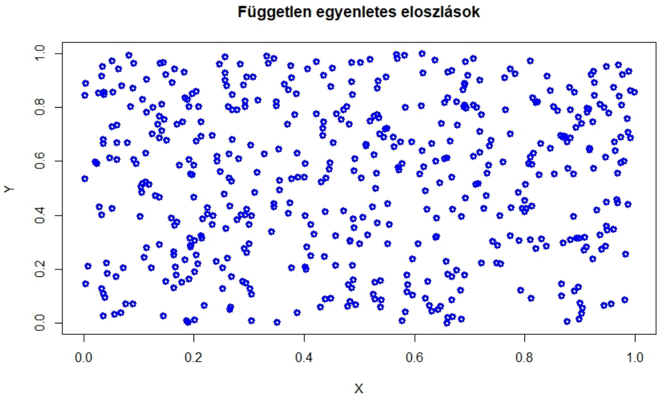
```
k=10000

eredmeny<-rep(0,k)

for (j in 1:k)

{

minta<-rexp(300, rate=3)

eredmeny[j]<-sum(minta)

}

norm<-(eredmeny-300/3)/(1/3)/sqrt(300)

hist(norm, col="yellow", main="Normalizált összeg hisztogramja",

xlab="értékek", ylab="gyakoriságok", freq=F)

curve(dnorm(x), from=-3, to=3, lwd="5", col="blue", add=T)
```

Kétdimenziós egyenletes eloszlás



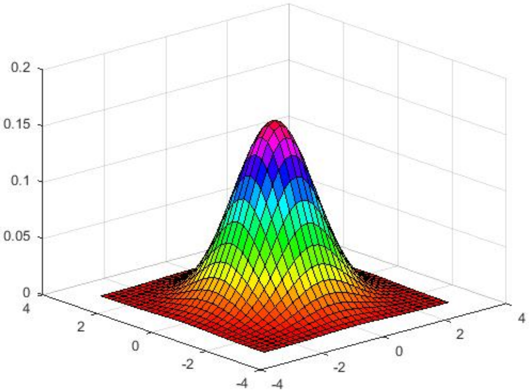
(X, Y) együttes sűrűségfüggvénye, ahol X és Y függetlenek és a $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlásúak

Kétdimenziós egyenletes eloszlás



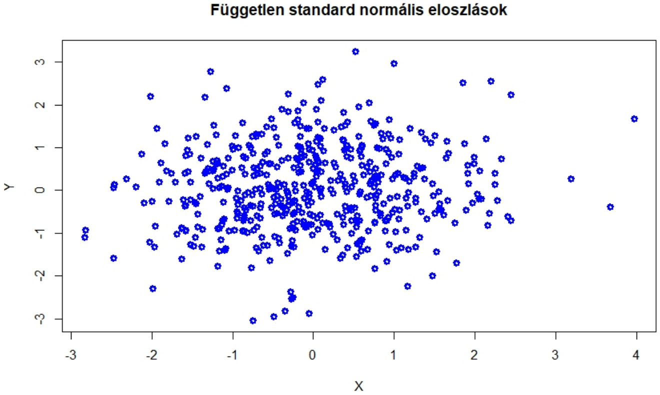
500 darab véletlen pont a síkon, melyek koordinátái függetlenek és a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlásúak (az együttes sűrűségfüggvény az előző ábrán látható).

Kétdimenziós normális eloszlás



Két független standard normális eloszlás együttes sűrűségfüggvénye Azaz: (X, Z) együttes sűrűségfüggvénye, ahol X, Z függetlenek, $N(0, 1)$ eloszlásúak

Kétdimenziós normális eloszlás



500 darab véletlen pont a síkon, melyek koordinátái független standard nomális eloszlásúak. Ahol nagyobb az együttes sűrűségfüggvény (előző ábra), oda több pont esik.

Együttes eloszlás: példa

Kétszer dobunk szabályos kockával. Legyen X az első dobás, Y pedig a dobott számok közül a nagyobb. Ekkor az (X, Y) valószínűségi vektorváltozó együttes eloszlása:

X/Y	1	2	3	4	5	6	összesen
1	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/6$
2	0	$1/18$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/6$
3	0	0	$1/12$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/6$
4	0	0	0	$1/9$	$1/36$	$1/36$	$1/6$
5	0	0	0	0	$5/36$	$1/36$	$1/6$
6	0	0	0	0	0	$1/6$	$1/6$
összesen	$1/36$	$1/12$	$5/36$	$7/36$	$1/4$	$11/36$	1

A peremeloszlások:

X: $(1, 1/6), (2, 1/6), (3, 1/6), \ldots, (6, 1/6)$

Y: $(1, 1/36), (2, 1/12), \ldots, (6, 11/36)$

Peremeloszlások sűrűségfüggvénye

Tegyük fel, hogy az $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ valószínűségi vektorváltozó **együttes sűrűségfüggvénye** f. Hogyan kapható meg például az **első peremeloszlás, azaz X_1 sűrűségfüggvénye**?

Peremeloszlások sűrűségfüggvénye

Tegyük fel, hogy az $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ valószínűségi vektorváltozó **együttes sűrűségfüggvénye** f. Hogyan kapható meg például az **első peremeloszlás, azaz X_1 sűrűségfüggvénye**?

Az X_j valószínűségi változó sűrűségfüggvénye (melyet f_j-vel jelölünk), azaz a j. peremsűrűségfüggvény így kapható meg f-ből:

$$f_j(t) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(s_1, \ldots, s_{j-1}, t, s_{j+1}, \ldots, s_n) ds_1 \ldots ds_{j-1} ds_{j+1} \ldots ds_n.$$

Speciálisan $n = 2$-re:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy; \qquad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx.$$

Feltételes eloszlás

Legyen X diszkrét valószínűségi változó, lehetséges értékei $x_1, x_2, \ldots$, a hozzájuk tartozó valószínűségek: $\mathbb{P}(X = x_k) = p_k$. Legyen A pozitív valószínűségű esemény. Ekkor az X-nek az A eseményre vonatkozó feltételes eloszlása:

$$q_k = \mathbb{P}(X = x_k | A) = \frac{\mathbb{P}(\{X = x_k\} \cap A)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Ekkor

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbb{P}(\{X = x_k\} \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = 1,$$

azaz a (q_k) sorozat is valószínűségeloszlás.

Másrészt az $\{X = x_k\}, \ k = 1, 2, \ldots$ események teljes eseményrendszert alkotnak.

Feltételes eloszlás

Legyen X diszkrét valószínűségi változó, lehetséges értékei $x_1, x_2, \ldots$, a hozzájuk tartozó valószínűségek: $\mathbb{P}(X = x_k) = p_k$. Legyen A pozitív valószínűségű esemény. Ekkor az X-nek az A eseményre vonatkozó feltételes eloszlása:

$$q_k = \mathbb{P}(X = x_k | A) = \frac{\mathbb{P}(\{X = x_k\} \cap A)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Ekkor

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbb{P}(\{X = x_k\} \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = 1,$$

azaz a (q_k) sorozat is valószínűségeloszlás.

Másrészt az $\{X = x_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$ események teljes eseményrendszert alkotnak.

Feltételes várható érték:

$$\mathbb{E}(X|A) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q_k = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}(X = x_k | A).$$

Együttes eloszlás: példa

Kétszer dobunk szabályos kockával. Legyen X az első dobás, Y pedig a dobott számok közül a nagyobb. Ekkor az (X, Y) valószínűségi vektorváltozó együttes eloszlása:

X/Y	1	2	3	4	5	6	összesen
1	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/6$
2	0	$1/18$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/6$
3	0	0	$1/12$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/6$
4	0	0	0	$1/9$	$1/36$	$1/36$	$1/6$
5	0	0	0	0	$5/36$	$1/36$	$1/6$
6	0	0	0	0	0	$1/6$	$1/6$
összesen	$1/36$	$1/12$	$5/36$	$7/36$	$1/4$	$11/36$	1

Legyen $A = \{Y = 3\}$ a feltétel.

Ekkor X feltételes eloszlása:

$$q_1 = \mathbb{P}(X = 1 | Y = 3) = \frac{1/36}{5/36} = \frac{1}{5} = q_2; \qquad q_3 = \frac{1/12}{5/36} = \frac{3}{5}.$$

Együttes eloszlás: példa

Kétszer dobunk szabályos kockával. Legyen X az első dobás, Y pedig a dobott számok közül a nagyobb. Ekkor az (X, Y) valószínűségi vektorváltozó együttes eloszlása:

X/Y	1	2	3	4	5	6	összesen
1	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/6$
2	0	$1/18$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/6$
3	0	0	$1/12$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/6$
4	0	0	0	$1/9$	$1/36$	$1/36$	$1/6$
5	0	0	0	0	$5/36$	$1/36$	$1/6$
6	0	0	0	0	0	$1/6$	$1/6$
összesen	$1/36$	$1/12$	$5/36$	$7/36$	$1/4$	$11/36$	1

Legyen $A = \{Y = 3\}$ a feltétel. Ekkor X feltételes várható értéke:

$$\mathbb{E}(X|Y=3) = \sum_{k=1}^{3} \mathbb{P}(X=k|Y=3)\cdot k = \frac{1}{5}\cdot 1 + \frac{1}{5}\cdot 2 + \frac{3}{5}\cdot 3 = \frac{12}{5} = 2,4.$$

Feltételes sűrűségfüggvény és várható érték

Legyen az (X, Y) valószínűségi vektorváltozó együttes sűrűségfüggvénye a f. Az X, illetve Y sűrűségfüggvénye:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy; \qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx.$$

Definíció

Az X valószínűségi változónak az $Y = y$ feltételre vonatkozó **feltételes sűrűségfüggvénye** *adott y valós számra:*

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y).}$$

A $g(X)$ mennyiség **feltételes várható értéke** *az $Y = y$ feltétel mellett:*

$$\mathbb{E}(g(X)|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X|Y=y}(x)dx.$$

Feltételes várható érték: példa

Legyenek X és Z független standard normális eloszlású valószínűségi változók. Ekkor az $(X, X+Z)$ együttes sűrűségfüggvénye:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{2x^2 - 2xy + y^2}{2} \right).$$

Az $X+Z$ valószínűségi változó normális eloszlású $m = 0$ várható értékkel és $\sigma = 2$ szórásnégyzettel, így

$$f_{X+Z}(y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{4} \right).$$

Mennyi lehet az $\mathbb{E}(X|X+Z=y)$ feltételes várható érték?

Feltételes várható érték: példa

Legyenek X és Z független standard normális eloszlású valószínűségi változók. Ekkor az $(X, X+Z)$ együttes sűrűségfüggvénye:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{2x^2 - 2xy + y^2}{2} \right).$$

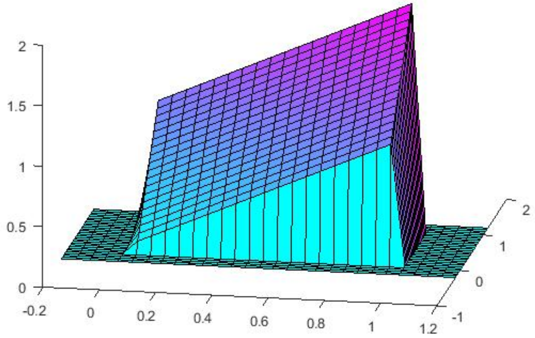
Az $X+Z$ valószínűségi változó normális eloszlású $m = 0$ várható értékkel és $\sigma = 2$ szórásnégyzettel, így

$$f_{X+Z}(y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{4} \right).$$

Mennyi lehet az $\mathbb{E}(X|X+Z=y)$ feltételes várható érték?

$$\mathbb{E}(X|X+Z=y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{f(x,y)}{f_{X+Z}(y)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} x \exp\left(-\frac{2x^2 - 2xy + y^2/2}{2} \right) dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{(x - y/2)^2}{2 \cdot 1/2} \right) dx = \frac{y}{2}.$$

Együttes sűrűségfüggvény: példa



A $[0,1] \times [0,1]$ négyzeten $x + y$ alakú együttes sűrűségfüggvény

Együttes sűrűségfüggvény: példa

Tegyük fel, hogy az (X, Y) valószínűségi vektorváltozó együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & \text{ha } 0 \le x \le 1 \text{ és } 0 \le y \le 1; \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Számítsuk ki X és Y korrelációs együtthatóját:

$$R(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{D(X)D(Y)} = \frac{\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)}{D(X)D(Y)}.$$

Együttes sűrűségfüggvény: példa

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1 \text{ és } 0 \leq y \leq 1; \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Állítás

Legyen az (X, Y) valószínűségi vektorváltozó együttes sűrűségfüggvénye f. Ekkor

$$\mathbb{E}(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f(x,y) \, dy \, dx.$$

Együttes sűrűségfüggvény: példa

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & \text{ha } 0 \le x \le 1 \text{ és } 0 \le y \le 1; \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Állítás

Legyen az (X,Y) valószínűségi vektorváltozó együttes sűrűségfüggvénye f. Ekkor

$$\mathbb{E}(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f(x,y)\,dy\,dx.$$

$$\mathbb{E}(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\cdot f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^1 xy(x+y)dydx =$$

$$= \int_0^1\int_0^1 x^2ydydx + \int_0^1\int_0^1 xy^2dydx = \int_0^1 \frac{x^2}{2}dx + \int_0^1 \frac{x}{3}dx = \frac{1}{6}+\frac{1}{6} = \frac{1}{3},$$

felhasználva, hogy $\int_0^1 x^k dx = [x^{k+1}/(k+1)]_{x=0}^1 = 1/(k+1)$.

Együttes sűrűségfüggvény: példa

Az (X, Y) együttes sűrűségfüggvénye:

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & \text{ha } 0 \le x \le 1 \text{ és } 0 \le y \le 1; \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_0^1 x + y\, dy = x + \frac{1}{2},$$

ha $0 \le x \le 1$, és 0 különben. Ezért

Együttes sűrűségfüggvény: példa

Az (X, Y) együttes sűrűségfüggvénye:

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & \text{ha } 0 \le x \le 1 \text{ és } 0 \le y \le 1; \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_0^1 x + y\,dy = x + \frac{1}{2},$$

ha $0 \le x \le 1$, és 0 különben. Ezért

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x)dx = \int_0^1 x \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)dx = \int_0^1 x^2 + \frac{x}{2}dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}.$$

Együttes sűrűségfüggvény: példa

Az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_0^1 x + ydy = x + \frac{1}{2},$$

ha $0 \leq x \leq 1$, és 0 különben. Ezért

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf_1(x)dx = \int_0^1 x \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)dx = \int_0^1 x^2 + \frac{x}{2}dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}.$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x)dx = \int_0^1 x^2 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)dx = \int_0^1 x^3 + \frac{x^2}{2}dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}.$$

Együttes sűrűségfüggvény: példa

Az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_0^1 x + ydy = x + \frac{1}{2},$$

ha $0 \le x \le 1$, és 0 különben. Ezért

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf_1(x)dx = \int_0^1 x \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) dx = \int_0^1 x^2 + \frac{x}{2}dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}.$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x)dx = \int_0^1 x^2 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) dx = \int_0^1 x^3 + \frac{x^2}{2}dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}.$$

A szimmetria miatt hasonlóképpen:

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{7}{12}; \qquad \mathbb{E}(Y^2) = \frac{5}{12}.$$

Együttes sűrűségfüggvény: példa

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1 \text{ és } 0 \leq y \leq 1; \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(XY) = \frac{1}{3}; \qquad \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \frac{7}{12}; \qquad \mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(Y^2) = \frac{5}{12}.$$

Az X és Y korrelációs együtthatója:

$$R(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{D(X)D(Y)} = \frac{\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)}{D(X)D(Y)} =$$

$$= \frac{1/3 - (7/12)^2}{\sqrt{5/12 - (7/12)^2} \cdot \sqrt{5/12 - (7/12)^2}} = \frac{1/3 - (7/12)^2}{5/12 - (7/12)^2} = -0,091.$$

Nagyon gyenge negatív korreláció van a két valószínűségi változó között.