Diszkrét valószínűségi változó várható értéke (6. előadás)

Definíció (Várható érték, diszkrét eset)

Legyen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *olyan diszkrét valószínűségi változó, melynek eloszlása* $(x_1, p_1), (x_2, p_2), \ldots$, *azaz* $\mathbb{P}(X = x_i)$ *teljesül* $i = 1, 2, \ldots$ *esetén. Ekkor* X *várható értéke:*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot \mathbb{P}(X = x_i), \qquad \text{ha} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i < \infty.$$

Diszkrét valószínűségi változó várható értéke (6. előadás)

Definíció (Várható érték, diszkrét eset)

Legyen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *olyan diszkrét valószínűségi változó, melynek eloszlása* $(x_1, p_1), (x_2, p_2), \ldots,$ *azaz* $\mathbb{P}(X = x_i)$ *teljesül* $i = 1, 2, \ldots$ *esetén. Ekkor* X *várható értéke:*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot \mathbb{P}(X = x_i), \qquad \text{ha} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i < \infty.$$

Példa: három gyerek. Legyen X a fiúk száma a három gyerek közül. Ekkor

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Példa: szabályos kockadobás. Legyen Y egy szabályos dobókockával dobott szám. Ekkor

$$\mathbb{E}(Y) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3,5.$$

A várható érték tulajdonságai

- (összeg várható értéke) Ha X, Y valószínűségi változók, és $X, Y, X+Y$ várható értéke létezik, akkor

$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).$$

- (konstans kiemelése) Ha az X valószínűségi változó várható értéke létezik, és c tetszőleges valós szám, akkor

$$\mathbb{E}(c \cdot X) = c \cdot \mathbb{E}(X).$$

- (szorzat várható értéke független esetben) Ha az X és Y valószínűségi változók függetlenek, és $X, Y, X \cdot Y$ várható értéke létezik, akkor

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y).$$

- (függvény várható értéke) Ha $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy $\mathbb{E}(X)$ létezik, akkor

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)\mathbb{P}(X = x_i),$$

ahol az X lehetséges értékei $x_1, x_2, \ldots$.

Összeg várható értéke

Ha X, Y valószínűségi változók, és $X, Y, X+Y$ várható értéke létezik, akkor

$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).$$

Bizonyítás. Legyenek X lehetséges értékei $x_1, x_2, \ldots$, az Y lehetséges értékei $y_1, y_2, \ldots$. Ekkor az $X+Y$ lehetséges értékei $x_k + y_m$ alakúak, és

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X+Y) &= \sum_{k,m} (x_k + y_m)\mathbb{P}(X = x_k, Y = y_m) = \\
&= \sum_{k,m} x_k \mathbb{P}(X = x_k, Y = y_m) + \sum_{k,m} y_m \mathbb{P}(X = x_k, Y = y_m) = \\
&= \sum_{k} x_k \mathbb{P}(X = x_k) + \sum_{m} y_m \mathbb{P}(Y = y_m) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y),
\end{aligned}$$

ahol azt használtuk, hogy az $\{X = x_k, Y = y_m\}$ események kizáróak, uniójuk $\{X = x_k\}$, és hasonlóképpen a másik tagban az Y esetén.

Összeg várható értéke

Ha X, Y valószínűségi változók, és $X, Y, X+Y$ várható értéke létezik, akkor

$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).$$

Bizonyítás. Legyenek X lehetséges értékei $x_1, x_2, \ldots$, az Y lehetséges értékei $y_1, y_2, \ldots$. Ekkor az $X+Y$ lehetséges értékei $x_k + y_m$ alakúak, és

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X+Y) &= \sum_{k,m}(x_k + y_m)\mathbb{P}(X = x_k, Y = y_m) = \\
&= \sum_{k,m} x_k \mathbb{P}(X = x_k, Y = y_m) + \sum_{k,m} y_m \mathbb{P}(X = x_k, Y = y_m) = \\
&= \sum_{k} x_k \mathbb{P}(X = x_k) + \sum_{m} y_m \mathbb{P}(Y = y_m) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y),
\end{aligned}$$

ahol azt használtuk, hogy az $\{X = x_k, Y = y_m\}$ események kizáróak, uniójuk $\{X = x_k\}$, és hasonlóképpen a másik tagban az Y esetén.

Következmény: $\mathbb{E}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \ldots + \mathbb{E}(X_n)$.

Valószínűségi változó szórása

Lehetséges motiváció: nem mindegy, hogy a buszok ütemesen (szabályosan) tíz percenként érkeznek, vagy a követési idő várható értéke tíz perc, de hol öt, hol tizenöt percenként jönnek; egy mérőeszköztől a mérési hiba, vagyis a mérés bizonytalansága is fontos, például nem mindegy, hogy adott pontosság eléréséhez hány mérést kell átlagolni.

Definíció (Szórásnégyzet (variancia))

Legyen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}(X^2)$ létezik. Ekkor X szórásnégyzete:

$$D^2(X) = \mathbb{E}\Big((X - \mathbb{E}X)^2\Big).$$

Valószínűségi változó szórása

Lehetséges motiváció: nem mindegy, hogy a buszok ütemesen (szabályosan) tíz percenként érkeznek, vagy a követési idő várható értéke tíz perc, de hol öt, hol tizenöt percenként jönnek; egy mérőeszköztől a mérési hiba, vagyis a mérés bizonytalansága is fontos, például nem mindegy, hogy adott pontosság eléréséhez hány mérést kell átlagolni.

Definíció (Szórásnégyzet (variancia))

Legyen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *valószínűségi változó, melyre* $\mathbb{E}(X^2)$ *létezik. Ekkor* X *szórásnégyzete:*

$$D^2(X) = \mathbb{E}\Big((X - \mathbb{E}X)^2\Big).$$

Definíció (Szórás (standard deviation))

Legyen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *valószínűségi változó, melyre* $\mathbb{E}(X^2)$ *létezik. Ekkor* X *szórásnégyzete:*

$$D(X) = \sqrt{\mathbb{E}\Big((X - \mathbb{E}X)^2\Big)}.$$

A szórás kiszámítása

Állítás

Legyen X olyan diszkrét valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}(X^2)$ létezik. Ekkor

$$D^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \left[\mathbb{E}(X)\right]^2.$$

A szórás kiszámítása

Állítás

Legyen X olyan diszkrét valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}(X^2)$ létezik. Ekkor

$$D^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \big[\mathbb{E}(X)\big]^2.$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} D^2(X) &= \mathbb{E}\Big((X - \mathbb{E}X)^2\Big) = \mathbb{E}\Big(X^2 - 2X\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2\Big) = \\ &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}\big(2X\mathbb{E}(X)\big) + \mathbb{E}(X)^2 = \\ &= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - \big[\mathbb{E}(X)\big]^2, \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy összeg várható értéke a várható értékek összege, illetve hogy a konstans szorzó kiemelhető.

A szórás kiszámítása

Állítás

Legyen X olyan diszkrét valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}(X^2)$ létezik. Ekkor

$$D^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \left[\mathbb{E}(X)\right]^2.$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} D^2(X) &= \mathbb{E}\Big((X - \mathbb{E}X)^2\Big) = \mathbb{E}\Big(X^2 - 2X\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2\Big) = \\ &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}\big(2X\mathbb{E}(X)\big) + \mathbb{E}(X)^2 = \\ &= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - \left[\mathbb{E}(X)\right]^2, \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy összeg várható értéke a várható értékek összege, illetve hogy a konstans szorzó kiemelhető.

Megjegyzés: az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számok tapasztalati szórása

$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2}.$$

Diszkrét valószínűségi változó szórása

Állítás

Legyen X olyan diszkrét valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}(X^2)$ létezik. Ekkor

$$D^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \left[\mathbb{E}(X)\right]^2.$$

Állítás (A szórás kiszámítása egész értékek esetén)

Legyen X olyan diszkrét valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}(X^2)$ létezik, és melynek lehetséges értékei nemnegatív egészek. Ekkor

$$D^2(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \mathbb{P}(X = k) - \mathbb{E}(X)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \mathbb{P}(X = k) - \left[\sum_{k=0}^{\infty} k \mathbb{P}(X = k)\right]^2.$$

Diszkrét valószínűségi változó szórása

Legyen továbbra is X a fiúk száma három gyerek közül:

$$\mathbb{P}(X=0)=1/8; \quad \mathbb{P}(X=1)=3/8; \quad \mathbb{P}(X=2)=3/8; \quad \mathbb{P}(X=3)=1/8.$$

Diszkrét esetben így számolhatunk:

$$\mathbb{E}(X^2)=\sum_{k=0}^{3} k^2\mathbb{P}(X=k)=0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{3}{8}+4\cdot\frac{3}{8}+9\cdot\frac{1}{8}=\frac{24}{8}=3.$$

Ebből és a korábbi számolásból

$$D^2(X)=\mathbb{E}(X^2)-\big[\mathbb{E}(X)\big]^2=3-1,5^2=3-2,25=0,75=\frac{3}{4}.$$

Végül pedig a fiúk számának szórása:

$$D(X)=\sqrt{\frac{3}{4}}=0,866.$$

A kockadobás szórása

Legyen X egy szabályos dobókockával dobott szám. Ekkor

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{6} \cdot 1^2 + \frac{1}{6} \cdot 2^2 + \frac{1}{6} \cdot 3^2 + \frac{1}{6} \cdot 4^2 + \frac{1}{6} \cdot 5^2 + \frac{1}{6} \cdot 6^2 = \frac{91}{6}.$$

Másrészt

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = \frac{7}{2}.$$

Ebből

$$D^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 2,92.$$

A kockadobás szórása: $D(X) = \sqrt{2,92} = 1,71.$

Általában n oldalú dobókocka esetén: $D(X) = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}.$

A szórásnégyzet tulajdonságai

- (nemnegativitás) $D^2(X) \geq 0$ és $D(X) \geq 0$ mindig teljesül
- (szorzás és eltolás) ha a, b valós számok, X véges szórású valószínűségi változó, akkor

$$D^2(aX + b) = a^2 D^2(X) \quad \Rightarrow \quad D(aX + b) = |a| D(X).$$

A szórásnégyzet tulajdonságai

- (nemnegativitás) $D^2(X) \geq 0$ és $D(X) \geq 0$ mindig teljesül
- (szorzás és eltolás) ha a, b valós számok, X véges szórású valószínűségi változó, akkor

$$D^2(aX + b) = a^2 D^2(X) \quad \Rightarrow \quad D(aX + b) = |a| D(X).$$

- (összeg szórása független esetben) ha az X, Y valószínűségi változók függetlenek és szórásuk létezik, akkor

$$D^2(X + Y) = D^2(X) + D^2(Y) \quad \Rightarrow \quad D(X + Y) = \sqrt{D^2(X) + D^2(Y)}.$$

- van olyan valószínűségi változó, melynek várható értéke véges, de a szórása nem létezik (például: $\mathbb{P}(X = k) = c/k^3$ megfelelő c-vel)

A várható érték és szórás kiszámítása

Példa. Legyen X olyan valószínűségi változó, melynek várható értéke 4, szórása 1, az Y valószínűségi változó várható értéke 6, szórása pedig 2. Tegyük fel továbbá, hogy X és Y **függetlenek**. Ekkor

- $\mathbb{E}(X + Y) =$

A várható érték és szórás kiszámítása

Példa. Legyen X olyan valószínűségi változó, melynek várható értéke 4, szórása 1, az Y valószínűségi változó várható értéke 6, szórása pedig 2. Tegyük fel továbbá, hogy X és Y **függetlenek**. Ekkor

- $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 10;$
- $\mathbb{E}(X - Y) =$

A várható érték és szórás kiszámítása

Példa. Legyen X olyan valószínűségi változó, melynek várható értéke 4, szórása 1, az Y valószínűségi változó várható értéke 6, szórása pedig 2. Tegyük fel továbbá, hogy X és Y **függetlenek**. Ekkor

- $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 10;$
- $\mathbb{E}(X-Y) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y) = -2;$
- $\mathbb{E}(2X+3Y) =$

A várható érték és szórás kiszámítása

Példa. Legyen X olyan valószínűségi változó, melynek várható értéke 4, szórása 1, az Y valószínűségi változó várható értéke 6, szórása pedig 2. Tegyük fel továbbá, hogy X és Y **függetlenek**. Ekkor

- $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 10;$
- $\mathbb{E}(X-Y) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y) = -2;$
- $\mathbb{E}(2X+3Y) = 2\mathbb{E}(X) + 3\mathbb{E}(Y) = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 = 26;$
- $\mathbb{E}(2X-3Y) =$

A várható érték és szórás kiszámítása

Példa. Legyen X olyan valószínűségi változó, melynek várható értéke 4, szórása 1, az Y valószínűségi változó várható értéke 6, szórása pedig 2. Tegyük fel továbbá, hogy X és Y **függetlenek**. Ekkor

- $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 10$;
- $\mathbb{E}(X-Y) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y) = -2$;
- $\mathbb{E}(2X+3Y) = 2\mathbb{E}(X) + 3\mathbb{E}(Y) = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 = 26$;
- $\mathbb{E}(2X-3Y) = 2\mathbb{E}(X) - 3\mathbb{E}(Y) = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 6 = -10$;
- $D(X+Y) =$

A várható érték és szórás kiszámítása

Példa. Legyen X olyan valószínűségi változó, melynek várható értéke 4, szórása 1, az Y valószínűségi változó várható értéke 6, szórása pedig 2. Tegyük fel továbbá, hogy X és Y **függetlenek**. Ekkor

- $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 10;$
- $\mathbb{E}(X-Y) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y) = -2;$
- $\mathbb{E}(2X+3Y) = 2\mathbb{E}(X) + 3\mathbb{E}(Y) = 2\cdot 4 + 3\cdot 6 = 26;$
- $\mathbb{E}(2X-3Y) = 2\mathbb{E}(X) - 3\mathbb{E}(Y) = 2\cdot 4 - 3\cdot 6 = -10;$
- $D(X+Y) = \sqrt{D^2(X) + D^2(Y)} = \sqrt{1+2^2} = \sqrt{5};$
- $D(X-Y) =$

A várható érték és szórás kiszámítása

Példa. Legyen X olyan valószínűségi változó, melynek várható értéke 4, szórása 1, az Y valószínűségi változó várható értéke 6, szórása pedig 2. Tegyük fel továbbá, hogy X és Y **függetlenek**. Ekkor

- $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 10;$
- $\mathbb{E}(X-Y) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y) = -2;$
- $\mathbb{E}(2X+3Y) = 2\mathbb{E}(X) + 3\mathbb{E}(Y) = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 = 26;$
- $\mathbb{E}(2X-3Y) = 2\mathbb{E}(X) - 3\mathbb{E}(Y) = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 6 = -10;$
- $D(X+Y) = \sqrt{D^2(X) + D^2(Y)} = \sqrt{1+2^2} = \sqrt{5};$
- $D(X-Y) = \sqrt{D^2(X) + (-1)^2 D^2(Y)} = \sqrt{1+2^2} = \sqrt{5};$
- $D(2X+3Y) =$

A várható érték és szórás kiszámítása

Példa. Legyen X olyan valószínűségi változó, melynek várható értéke 4, szórása 1, az Y valószínűségi változó várható értéke 6, szórása pedig 2. Tegyük fel továbbá, hogy X és Y **függetlenek**. Ekkor

- $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 10;$
- $\mathbb{E}(X-Y) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y) = -2;$
- $\mathbb{E}(2X+3Y) = 2\mathbb{E}(X) + 3\mathbb{E}(Y) = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 = 26;$
- $\mathbb{E}(2X-3Y) = 2\mathbb{E}(X) - 3\mathbb{E}(Y) = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 6 = -10;$
- $D(X+Y) = \sqrt{D^2(X) + D^2(Y)} = \sqrt{1+2^2} = \sqrt{5};$
- $D(X-Y) = \sqrt{D^2(X) + (-1)^2 D^2(Y)} = \sqrt{1+2^2} = \sqrt{5};$
- $D(2X+3Y) = \sqrt{2^2 D^2(X) + 3^2 D^2(Y)} = \sqrt{4 \cdot 1 + 9 \cdot 4} = \sqrt{40};$
- $D(2X-3Y) =$

A várható érték és szórás kiszámítása

Példa. Legyen X olyan valószínűségi változó, melynek várható értéke 4, szórása 1, az Y valószínűségi változó várható értéke 6, szórása pedig 2. Tegyük fel továbbá, hogy X és Y **függetlenek**. Ekkor

- $\mathbb{E}(X+Y)=\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)=10$;
- $\mathbb{E}(X-Y)=\mathbb{E}(X)-\mathbb{E}(Y)=-2$;
- $\mathbb{E}(2X+3Y)=2\mathbb{E}(X)+3\mathbb{E}(Y)=2\cdot 4+3\cdot 6=26$;
- $\mathbb{E}(2X-3Y)=2\mathbb{E}(X)-3\mathbb{E}(Y)=2\cdot 4-3\cdot 6=-10$;
- $D(X+Y)=\sqrt{D^2(X)+D^2(Y)}=\sqrt{1+2^2}=\sqrt{5}$;
- $D(X-Y)=\sqrt{D^2(X)+(-1)^2D^2(Y)}=\sqrt{1+2^2}=\sqrt{5}$;
- $D(2X+3Y)=\sqrt{2^2D^2(X)+3^2D^2(Y)}=\sqrt{4\cdot 1+9\cdot 4}=\sqrt{40}$;
- $D(2X-3Y)=\sqrt{2^2D^2(X)+(-3)^2D^2(Y)}=\sqrt{4\cdot 1+9\cdot 4}=\sqrt{40}$.

A binomiális eloszlás várható értéke és szórása

Állítás

Ha az X valószínűségi változó binomiális eloszlású n renddel és p paraméterrel, azaz

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n),$$

akkor

$$\mathbb{E}(X) = np; \qquad D(X) = \sqrt{np(1-p)}.$$

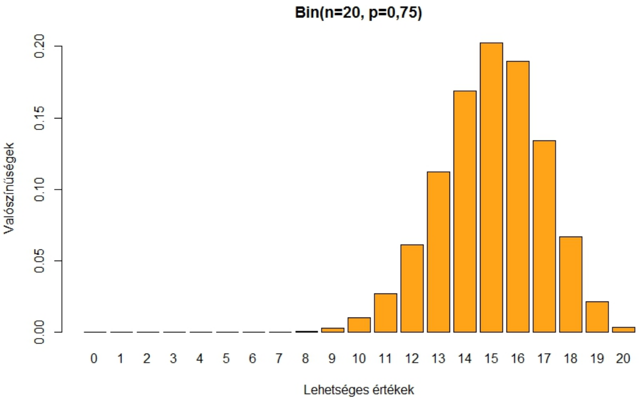
Példa. Egy kérdőív egy kérdésére $n = 1000$ megkérdezett közül mindenki a többiektől függetlenül $p = 0,65$ valószínűséggel válaszol. Ekkor a válaszadók számának (melyet jelöljünk X-szel) a várható értéke:

$$\mathbb{E}(X) = np = 1000 \cdot 0,65 = 650,$$

míg a szórása:

$$D(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{1000 \cdot 0,65 \cdot 0,35} = 15,08.$$

Példa: binomiális eloszlás



Binomiális eloszlás, $n = 20$, $p = 0,75$, várható értéke 15, szórása $1,94$.

Hipergeometriai eloszlás várható értéke és szórása

Állítás

Ha az X valószínűségi változó hipergeometriai eloszlású M, N, n paraméterekkel, azaz

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n),$$

akkor

$$\mathbb{E}(X) = \frac{M}{N}n; \qquad D(X) = \sqrt{n\frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}}.$$

Hipergeometriai eloszlás várható értéke és szórása

Állítás

Ha az X valószínűségi változó hipergeometriai eloszlású M, N, n paraméterekkel, azaz

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \qquad (k = 0, 1, \dots, n),$$

akkor

$$\mathbb{E}(X) = \frac{M}{N}n; \qquad D(X) = \sqrt{n\frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}}.$$

Példa. Egy 100000 fős város lakói közül 6000-en támogatnak egy bizonyos pártot. 1500 embert megkérdezve a pártot támogatók számának

- várható értéke $\frac{M}{N}n = \frac{6000}{100000} \cdot 1500 = 90$ akár visszatevéses, akár visszatevés nélküli esetben
- szórása visszatevéses esetben $(n = 1500, p = 0,06$-vel$)$: $9,2$, visszatevés nélküli esetben $9,07$ (ekkor $N = 100000$, $M = 6000$, $n = 1500$).

Poisson-eloszlás várható értéke és szórása

Állítás

Ha az X valószínűségi változó Poisson-eloszlású $\lambda > 0$ paraméterrel, azaz

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

akkor

$$\mathbb{E}(X) = \lambda; \qquad D(X) = \sqrt{\lambda}.$$

Poisson-eloszlás várható értéke és szórása

Állítás

Ha az X valószínűségi változó Poisson-eloszlású $\lambda > 0$ paraméterrel, azaz

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

akkor

$$\mathbb{E}(X) = \lambda; \qquad D(X) = \sqrt{\lambda}.$$

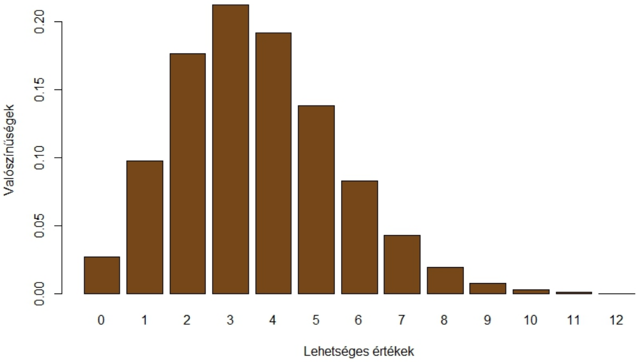
Példa. Tegyük fel, hogy egy városban a naponta történő autóbalesetek száma Poisson-eloszlású, és várható értéke $3,61$. Ekkor az autóbalesetek számának szórása:

$$D(X) = \sqrt{3,61} = 1,9,$$

továbbá annak valószínűsége, hogy pontosan 5 baleset lesz:

$$\mathbb{P}(X = 5) = \frac{3,61^5}{5!} e^{-5} = 0,14.$$

Példa: Poisson-eloszlás



Poisson-eloszlás, $\lambda = 3,61$, $k = 12$-ig, várható értéke $3,61$, szórása $\sqrt{3,61} = 1,9$

Geometriai eloszlás várható értéke és szórása

Állítás

Ha az X valószínűségi változó geometriai eloszlású p paraméterrel, azaz

$$\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1} p \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

akkor

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}; \qquad D(X) = \sqrt{\frac{1 - p}{p^2}}.$$

Geometriai eloszlás várható értéke és szórása

Állítás

Ha az X valószínűségi változó geometriai eloszlású p paraméterrel, azaz

$$\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1}p \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

akkor

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}; \qquad D(X) = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}}.$$

Példa. Tegyük fel, hogy egy adott pártot mindenki a többiektől függetlenül $p = 0,06$ valószínűséggel támogat. Jelölje X, hogy hány embert kell megkérdezni, míg az első olyan embert megtaláljuk, aki ezt a pártot támogatná. Ekkor

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{0,06} = 16,67; \qquad D(X) = \sqrt{\frac{0,94}{0,06^2}} = 16,16.$$

Nevezetes diszkrét eloszlások várható értéke és szórása

- Ha X binomiális eloszlású n renddel és p paraméterrel:

$$\mathbb{E}(X) = np; \qquad D(X) = \sqrt{np(1-p)}.$$

- Ha X hipergeometriai eloszlású N, M, n paraméterekkel:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{M}{N}n; \qquad D(X) = \sqrt{n\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}}.$$

- Ha X Poisson-eloszlású λ paraméterrel:

$$\mathbb{E}(X) = \lambda; \qquad D(X) = \sqrt{\lambda};$$

- Ha X geometriai eloszlású p paraméterrel:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}; \qquad D(X) = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}}.$$

Házi feladat november 6-ig

Számítógép segítségével (például R-ben) generáljunk 1000 elemű mintát

(a) binomiális eloszlásból tetszőlegesen választott $n \geq 100$ és $0,2 < p < 0,8$ esetén (tehát n és p szabadon választható, viszont a megoldás során végig ugyanaz legyen);

(b) Poisson-eloszlásból, melynek várható értéke megegyezik az (a)-ban használt binomiális eloszlás várható értékével.

Mennyi ennek a két eloszlásnak a várható értéke, illetve a szórása?

Mennyi a mintaátlag a minta első 10, 100, illetve 1000 eleméből? Mennyi ennek különbsége a várható értéktől?

Mennyi a minta első 10, 100, 1000 elemének tapasztalati szórása (vagy korrigált tapasztalati szórása)? Mennyi ennek különbsége az eloszlások szórásától?

Házi feladat október 9-ig: megoldás

Tegyük fel, hogy Annát minden nap a többitől függetlenül $0,001$ valószínűséggel éri közlekedési baleset.

(a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy decemberben pontosan két baleset éri?

$$\binom{31}{2} \cdot 0,001^2 \cdot 0,999^{29} = 0,00045.$$

$n = 31$ független kísérlet, $p = 0,001$ valószínűséggel sikerült, a sikeresek (vagyis a balesetek) száma binomiális eloszlású, $k = 2$ a kérdés.

(b) Feltéve, hogy decemberben pontosan két baleset éri, mennyi a valószínűsége, hogy az egyik december első hetében, a másik pedig december utolsó hetében következik be?

$$\frac{7 \cdot 7 \cdot 0,001^2 \cdot 0,999^{29}}{\binom{31}{2} \cdot 0,001^2 \cdot 0,999^{29}} = \frac{49}{\binom{31}{2}} = 0,105.$$

Házi feladat október 9-ig: megoldás

Tegyük fel, hogy Annát minden nap a többitől függetlenül $0,001$ valószínűséggel éri közlekedési baleset.

(a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy decemberben pontosan két baleset éri?

$$\binom{31}{2} \cdot 0,001^2 \cdot 0,999^{29} = 0,00045.$$

(b) Feltéve, hogy decemberben pontosan két baleset éri, mennyi a valószínűsége, hogy az egyik december első hetében, a másik pedig december utolsó hetében következik be?

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 0,001^2 \cdot 0,999^{29}}{\binom{31}{2} \cdot 0,001^2 \cdot 0,999^{29}} = \frac{49}{\binom{31}{2}} = 0,105.$$

A: egy baleset az első, egy az utolsó héten, B: összesen két baleset. A nevezőt már az (a)-ban kiszámoltuk. $A \cap B$ ugyanaz, mint A. Ebben az esetben az első baleset 7-féle napon lehet az első héten, ettől függetlenül a második 7-féle napon az utolsó héten, és ha már tudjuk, hogy melyik két nap van a két baleset, annak valószínűsége, hogy ezeken a napokon baleset éri, a többin pedig nem, $0,001^2 \cdot 0,999^{29}$, hiszen a napok függetlenek egymástól.

Házi feladat október 9-ig: megoldás

Tegyük fel, hogy Annát minden nap a többitől függetlenül $0,001$ valószínűséggel éri közlekedési baleset.

(a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy decemberben pontosan két baleset éri?

$$\binom{31}{2} \cdot 0,001^2 \cdot 0,999^{29} = 0,00045.$$

(b) Feltéve, hogy decemberben pontosan két baleset éri, mennyi a valószínűsége, hogy az egyik december első hetében, a másik pedig december utolsó hetében következik be?

(c) Feltéve, hogy decemberben egy baleset éri, mennyi a valószínűsége, hogy az pont szilveszter napján lesz? $0,999^{30} \cdot 0,001/(31 \cdot 0,999^{30} \cdot 0,001) = 1/31$, a (b)-hez hasonlóan.

(d) Minek nagyobb a valószínűsége: decemberben pontosan két baleset éri, illetve hogy mostantól az első balesete fél éven belül bekövetkezik?

Az első valószínűség: $0,00045$ az (a) szerint.

A másodiknál a komplementer valószínűségét számoljuk: $1 - 0,999^{183} = 0,167 > 0,00045$, vagyis a második a nagyobb.