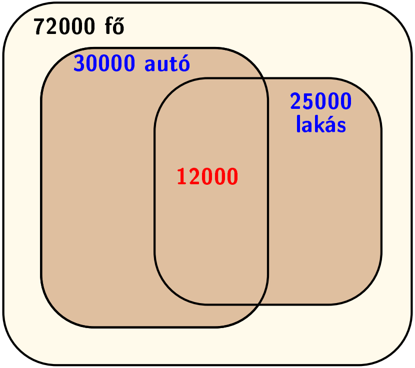
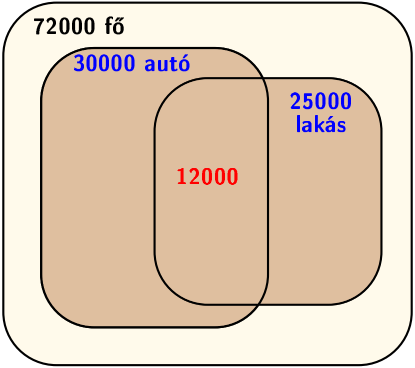
Unió valószínűsége: példa (3. előadás)

Egy 72000 fős városban harmincezer embernek van autója, huszonötezernek lakása, tizenkétezernek mindkettő. Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott lakos az autó és a lakás közül legalább az egyikkel rendelkezik?



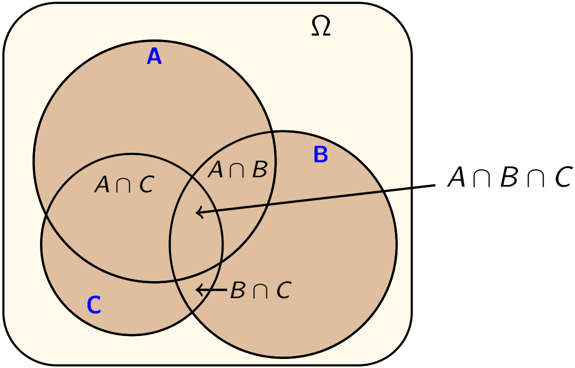
Unió valószínűsége: példa (3. előadás)

Egy 72000 fős városban harmincezer embernek van autója, huszonötezernek lakása, tizenkétezernek mindkettő. Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott lakos az autó és a lakás közül legalább az egyikkel rendelkezik?

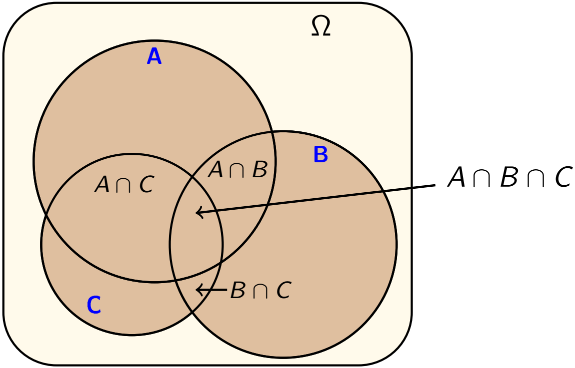


$$\mathbb{P}(A \cup L) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(L) - \mathbb{P}(A \cap L) = \frac{30000}{72000} + \frac{25000}{72000} - \frac{12000}{72000} = \frac{43000}{72000} = 0,59.$$

Szitaformula



Szitaformula



$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

A valószínűség tulajdonságai

- Különbség valószínűsége:

$$\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B),$$

mert $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$, ahol ez utóbbi kizáró események uniója, az additivitás használható.

A valószínűség tulajdonságai

- Különbség valószínűsége:

$$\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B),$$

mert $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$, ahol ez utóbbi kizáró események uniója, az additivitás használható.

- **Szitaformula** két eseményre (annak valószínűségét számítjuk ki, hogy A és B közül legalább az egyik bekövetkezik):

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B),$$

mert $A \cup B = B \cup (A \setminus B)$, ahol ez utóbbi kizáró események uniója, az additivitás használható, ezért

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \setminus B),$$

ezután pedig a $\mathbb{P}(A \setminus B)$ kiszámítására az első egyenletet használhatjuk.

Szitaformula

Szitaformula két eseményre:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B),$$

Szitaformula három eseményre:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \\ - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

Szitaformula

Szitaformula két eseményre:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B),$$

Szitaformula három eseményre:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \\ - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

Szitaformula általánosan: az $A_1, \dots, A_n$ események uniójának (vagyis annak, hogy legalább az egyik bekövetkezik) a valószínűsége:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \ldots + \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \\ - \ldots - \mathbb{P}(A_{n-1} \cap A_n) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \ldots\end{aligned}$$

Szitaformula

Annak valószínűsége, hogy az $A_1, A_2, \dots, A_n$ események közül legalább az egyik bekövetkezik:

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \dots + \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \\ - \dots - \mathbb{P}(A_{n-1} \cap A_n) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \dots$$

Vagyis:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \\ &+ \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) - \\ &- \dots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}).\end{aligned}$$

Végtelen eseménytterek

Ω, az összes lehetőség halmaza lehet **véges**, de lehet **végtelen**, például: az atomok száma a világegyetemben sokmilliárd év múlva, a hőmérséklet értéke egy adott időpontban vagy egy ember testmagassága, kerekítés nélkül

Ha az Ω eseménytér végtelen, legtöbbször Ω-nak nem minden részhalmaza esemény, hanem csak bizonyos részhalmazok.

$\mathcal{A}$: az események összessége, halmaza, ennek az alábbi feltételeket kell teljesítenie:

- ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, akkor
$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A},$$
azaz megszámlálható sok esemény uniója (ami azt jelenti, hogy legalább az egyik bekövetkezik) is esemény
- ha $A \in \mathcal{A}$, akkor $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$, azaz egy esemény komplementere/ellentett eseménye (ami azt jelenti, hogy A nem következik be) is esemény

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Definíció

Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *hármas* **Kolmogorov-féle valószínűségi mező**, *ha*

- Ω *nem üres halmaz;*
- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, *azaz minden* $A \in \mathcal{A}$*-ra* $A \subseteq \Omega$ *úgy, hogy*
  - (i) $\Omega \in \mathcal{A}$;
  - (ii) *ha* $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, *akkor* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ *(azaz megszámlálható sok* $\mathcal{A}$*-beli elem uniója is* $\mathcal{A}$*-beli);*
  - (iii) *ha* $A \in \mathcal{A}$, *akkor* $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ *(azaz* $\mathcal{A}$*-beli halmazok komplementere is* $\mathcal{A}$*-beli.*
- $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$ *függvény, melyre*
  - (i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
  - (ii) *ha* $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ *és minden* $1 \leq i < j$*-re* $A_i \cap A_j = \emptyset$, *akkor*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Függetlenség: példa

Két szabályos dobókockával dobunk.

11	12	13	14	15	**16**
21	22	23	24	25	**26**
31	32	33	34	35	**36**
41	42	43	44	45	**46**
51	52	53	54	55	**56**
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**

A: az első dobás hatos; **B**: a második dobás hatos; $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$: mindkét dobás hatos

Függetlenség: példa

Két szabályos dobókockával dobunk.

11	12	13	14	15	**16**
21	22	23	24	25	**26**
31	32	33	34	35	**36**
41	42	43	44	45	**46**
51	52	53	54	55	**56**
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**

A: az első dobás hatos; **B**: a második dobás hatos; **A ∩ B**: mindkét dobás hatos

$$\frac{1}{36} = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}.$$

Az A és B események **függetlenek**.

Függetlenség: példa

Két szabályos dobókockával dobunk.

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	**46**
51	52	53	54	**55**	56
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**

A: az első dobás hatos; **C**: az összeg 10; $\mathbf{A} \cap \mathbf{C}$: az első dobás hatos, a második négyes

Függetlenség: példa

Két szabályos dobókockával dobunk.

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	**46**
51	52	53	54	**55**	56
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**

A: az első dobás hatos; **C**: az összeg 10; **A ∩ C**: az első dobás hatos, a második négyes

$$\frac{1}{36} = \mathbb{P}(A \cap C) \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{12}.$$

Az A és C események **nem függetlenek**.

Függetlenség: példa

Két szabályos dobókockával dobunk.

11	12	13	14	15	**16**
21	22	23	24	**25**	26
31	32	33	**34**	35	36
41	42	**43**	44	45	46
51	**52**	53	54	55	56
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**

A: az első dobás hatos; **D**: az összeg 7; $\mathbf{A} \cap \mathbf{D}$: az első dobás hatos, a második egyes

Függetlenség: példa

Két szabályos dobókockával dobunk.

11	12	13	14	15	**16**
21	22	23	24	**25**	26
31	32	33	**34**	35	36
41	42	**43**	44	45	46
51	**52**	53	54	55	56
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**

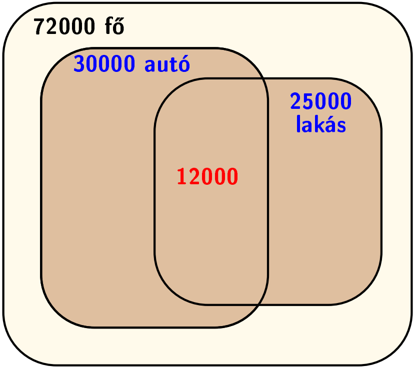
A: az első dobás hatos; **D**: az összeg 7; **A ∩ D**: az első dobás hatos, a második egyes

$$\frac{1}{36} = \mathbb{P}(A \cap D) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(D) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}.$$

Az A és D események **függetlenek**.

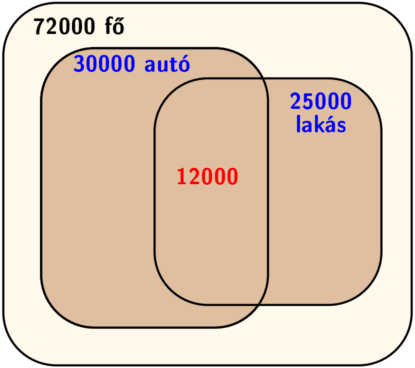
Függetlenség: példa

Egy 72000 fős városban harmincezer embernek van autója, huszonötezernek lakása, tizenkétezernek mindkettő. Igaz-e, hogy az, hogy egy véletlenszerűen választott lakos rendelkezik autóval, illetve lakással, független egymástól?



Függetlenség: példa

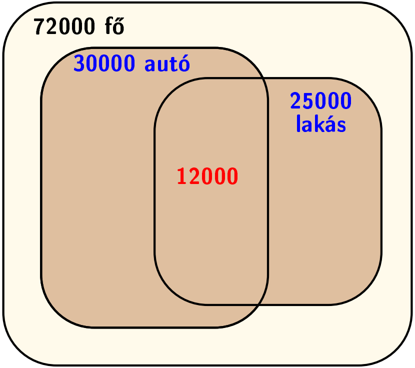
Egy 72000 fős városban harmincezer embernek van autója, huszonötezernek lakása, tizenkétezernek mindkettő. Igaz-e, hogy az, hogy egy véletlenszerűen választott lakos rendelkezik autóval, illetve lakással, független egymástól?



$$16,7\% = \frac{12000}{72000} = \mathbb{P}(A \cap L) \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(L) = \frac{30000}{72000} \cdot \frac{25000}{72000} = 14,5\%.$$

Függetlenség: példa

Egy 72000 fős városban harmincezer embernek van autója, huszonötezernek lakása, tizenkétezernek mindkettő. Igaz-e, hogy az, hogy egy véletlenszerűen választott lakos rendelkezik autóval, illetve lakással, független egymástól?



$16,7\% = \mathbb{P}(A \cap L) \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(L) = 14,5\% \Rightarrow$ nem független a két esemény.

Események függetlensége

Definíció

Az $A, B \in \mathcal{A}$ események **függetlenek**, *ha*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Ha $A, B \in \mathcal{A}$ események, és $\mathbb{P}(B) > 0$ teljesül: A és B pontosan akkor függetlenek, ha $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$, hiszen

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Események függetlensége

Definíció

Az $A, B \in \mathcal{A}$ események **függetlenek**, *ha*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Ha $A, B \in \mathcal{A}$ események, és $\mathbb{P}(B) > 0$ teljesül: A és B pontosan akkor függetlenek, ha $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$, hiszen

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Példa. Húzunk egy lapot egy magyarkártya-csomagból , mindet azonos valószínűséggel (32 lap, 8 piros, 4 ász). A: piros, B: ász.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{4}; \qquad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{8}; \qquad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{32}.$$

Tehát A és B függetlenek.

Függetlenség

Definíció (Függetlenség)

Az $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ *véges sok esemény* **független**, *ha minden* $1 \leq k \leq n$*-re és* $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ *indexsorozatra*

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2}) \ldots \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

Az $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ *végtelen sok esemény független, ha tetszőlegesen kiválasztva véges sokat közülük független eseményeket kapunk.*

Függetlenség

Definíció (Függetlenség)

Az $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ véges sok esemény **független**, *ha minden $1 \leq k \leq n$-re és $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ indexsorozatra*

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2}) \ldots \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

Az $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ végtelen sok esemény független, ha tetszőlegesen kiválasztva véges sokat közülük független eseményeket kapunk.

Definíció (Páronkénti függetlenség)

Az $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ események **páronként függetlenek**, *ha minden $1 \leq i < j$ esetén A_i és A_j függetlenek, azaz*

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j).$$

Páronkénti függetlenség

Ha az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események függetlenek, akkor páronként függetlenek. De: a páronkénti függetlenségből nem következik a függetlenség; a fenti definícióban nem elég a páronkénti szorzatokat megvizsgálni.

Példa. Szabályos dobókockával kétszer dobunk. Legyen

A: az első dobás páros. B: a második dobás páros. C: a két dobás összege páros.

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = 1/2.$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = 1/4.$$

Ugyanakkor, ha az első és a második dobás páros, akkor a két dobás összege is biztosan páros, így

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 1/4 \neq 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C).$$

Tehát: A, B, C páronként függetlenek, de nem függetlenek.

Házi feladat október 2-ig

Egy szabályos dobókockával dobunk háromszor egymás után. Tekinstük az alábbi eseményeket:

A: legalább két hatos dobás van

B: a dobott számok összege hárommal osztható

C: a dobott számok összege több 15-nél

(a) Független-e A és B?

(b) Függetlenek-e az A, B és C események?

(c) Egy dobókockával ismételjük meg ezt a kísérletet (három kockadobás) húszszor. Mennyi az A, B, C, $A \cap B$, $A \cap B \cap C$ események relatív gyakorisága?

Függetlenség: tulajdonságok és példák

- holnap Budapesten és New Yorkban is lesz csapadék:

Függetlenség: tulajdonságok és példák

- holnap Budapesten és New Yorkban is lesz csapadék: függetlenek
- holnap Budapesten és Budaörsön is lesz csapadék:

Függetlenség: tulajdonságok és példák

- holnap Budapesten és New Yorkban is lesz csapadék: függetlenek
- holnap Budapesten és Budaörsön is lesz csapadék: nem függetlenek
- egy véletlenszerűen választott ember Budapesten lakik, illetve kék a szeme:

Függetlenség: tulajdonságok és példák

- holnap Budapesten és New Yorkban is lesz csapadék: függetlenek
- holnap Budapesten és Budaörsön is lesz csapadék: nem függetlenek
- egy véletlenszerűen választott ember Budapesten lakik, illetve kék a szeme: függetlenek
- egy véletlenszerűen választott magyar ember Budapesten lakik, illetve diplomás:

Függetlenség: tulajdonságok és példák

- holnap Budapesten és New Yorkban is lesz csapadék: függetlenek
- holnap Budapesten és Budaörsön is lesz csapadék: nem függetlenek
- egy véletlenszerűen választott ember Budapesten lakik, illetve kék a szeme: függetlenek
- egy véletlenszerűen választott magyar ember Budapesten lakik, illetve diplomás: nem függetlenek

Függetlenség: tulajdonságok és példák

- holnap Budapesten és New Yorkban is lesz csapadék: függetlenek
- holnap Budapesten és Budaörsön is lesz csapadék: nem függetlenek
- egy véletlenszerűen választott ember Budapesten lakik, illetve kék a szeme: függetlenek
- egy véletlenszerűen választott magyar ember Budapesten lakik, illetve diplomás: nem függetlenek

Tulajdonságok

- egymás utáni kísérletek eredménye független, ha a korábbiak nem befolyásolják a későbbieket
- visszatevéses mintavételnél a kapott eredmények függetlenek, visszatevés nélkülinél nem függetlenek
- ha A és B kizáróak ($A \cap B = \emptyset$, azaz nem következhetnek be egyszerre) és függetlenek is, akkor A vagy B valószínűsége 0

Valószínűségi változók

események (egy kísérlet eredményéhez igen vagy nem tartozik):

- holnap lesz csapadék Budapesten
- egy véletlenszerűen választott magyar ember Budapesten lakik
- egy véletlenszerűen választott magyar ember 500000 forintnál többet keres

Valószínűségi változók

események (egy kísérlet eredményéhez igen vagy nem tartozik):

- holnap lesz csapadék Budapesten
- egy véletlenszerűen választott magyar ember Budapesten lakik
- egy véletlenszerűen választott magyar ember 500000 forintnál többet keres

valószínűségi változók (egy kísérlet eredményéhez egy szám tartozik):

- a holnap lehulló csapadék mennyisége
- egy véletlenszerűen választott magyar ember lakcímének irányítószáma
- egy véletlenszerűen választott magyar ember bruttó keresete

Valószínűségi változók

események (egy kísérlet eredményéhez igen vagy nem tartozik):

- holnap lesz csapadék Budapesten
- egy véletlenszerűen választott magyar ember Budapesten lakik
- egy véletlenszerűen választott magyar ember 500000 forintnál többet keres

valószínűségi változók (egy kísérlet eredményéhez egy szám tartozik):

- a holnap lehulló csapadék mennyisége
- egy véletlenszerűen választott magyar ember lakcímének irányítószáma
- egy véletlenszerűen választott magyar ember bruttó keresete

kérdések valószínűségi változókról: mennyi a valószínűsége, hogy holnap legfeljebb 5 mm csapadék esik, mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott magyar ember legfeljebb bruttó 500000 forintot keres

Valószínűségi változó

Definíció (Valószínűségi változó)

Egy $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *függvény* **valószínűségi változó**, *ha tetszőleges* t *valós számra*

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\} \in \mathcal{A},$$

vagyis tetszőleges t *valós számra a* $\mathbb{P}(X \leq t)$ *valószínűség értelmes.*

Valószínűségi változó

Definíció (Valószínűségi változó)

Egy $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *függvény* **valószínűségi változó**, *ha tetszőleges* t *valós számra*

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\} \in \mathcal{A},$$

vagyis tetszőleges t *valós számra a* $\mathbb{P}(X \leq t)$ *valószínűség értelmes.*

Példa. Valakinek három gyereke születik. Legyen X a fiúk száma. Ekkor

$$\Omega = \{FFF, FFL, FLF, FLL, LFF, LFL, LLF, LLL\};$$

$$X(LLL) = 0; \qquad X(LLF) = X(LFL) = X(FLL) = 1;$$

$$X(FFL) = X(FLF) = X(LFF) = 2; \qquad X(FFF) = 3.$$

Ekkor $\mathbb{P}(X = 0) = 1/8, \mathbb{P}(X = 1) = 3/8, \mathbb{P}(X = 2) = 3/8, \mathbb{P}(X = 3) = 1/8$.