Halmazok és részhalmazok (2. előadás)

Legyen $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ egy véges halmaz.

Az Ω elemei: $a_1 \in \Omega$, $a_2 \in \Omega$, stb.

Az Ω részhalmazai: $A \subseteq \Omega$ részhalmaza Ω-nak, ha A egy olyan halmaz, melynek minden eleme Ω-nak is eleme. Például: $A = \{a_2, a_3, a_5\} \subseteq \Omega$.

Például: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, ekkor $A = \{2, 4\} \subseteq \Omega$ részhalmaza Ω-nak, de $B = \{2, 4, 6\}$ nem részhalmaza Ω-nak.

Az $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ részhalmazai: $\emptyset$ (üres halmaz, ez minden halmaznak a részhalmaza), $\{1\}, \{2\}, \ldots, \{5\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \ldots, \{1, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Összesen $2^5 = 32$ részhalmaza van: mind az öt elemről külön-külön eldönthetjük, hogy bekerüljön-e a részhalmazba.

Általában, egy n elemű halmaznak 2^n részhalmaza van. Például egy egyeleműnek 2 (az üres és saját maga), egy kételeműnek 4, egy háromeleműnek 8, és így tovább.

Leszámlálások és jelölések

$$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots 2\cdot 1; \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k(k-1)\ldots 2\cdot 1}.$$

- n tárgyat $n!$-féleképpen lehet sorrendbe tenni.
- n tárgy közül k darabot visszatevés nélkül $n(n-1)\ldots(n-k+1)$-féleképpen lehet húzni, ha figyelembe vesszük a sorrendet: az első n-féle, a második $n-1$-féle lehet (akármi volt az első), a harmadik $n-2$-féle lehet (akármi volt az első kettő), és így tovább
- n tárgy közül egy k darabból álló csoportot $\binom{n}{k}$-féleképpen lehet kiválasztani (itt a kiválasztás sorrendje nem számít)
- ha n egymás utáni kísérlet mindegyikénél k lehetőség van, akkor az összes lehetőség száma a sorrendet is figyelembe véve

$$n\cdot n\cdot\ldots\cdot n = n^k.$$

Például egy kockadobás hatféle lehet, kettő 36-féle, három $6\cdot 6\cdot 6$-féle, n kockadobás 6^n-féle.

Tulajdonságok

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}; \quad \binom{n}{0} = 1; \binom{n}{1} = n; \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\binom{n}{N} = 0, \text{ ha } N > n.$$

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ általánosítása a **binomiális tétel**:

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{k}x^k y^{n-k} + \ldots + nxy^{n-1} + y^n.$$

Következmény $x = y = 1$-re:

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{k} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}.$$

Ez éppen egy n elemű halmaz részhalmazainak száma, a jobb oldalon aszerint csoportosítva, hogy hány elemük van.

Multinomiális/polinomiális tétel

- $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$
- $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

Multinomiális/polinomiális tétel

- $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$
- $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
- általánosan:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n = \sum \frac{n!}{i_1! \cdot i_2! \cdot \ldots \cdot i_k!} \cdot x_1^{i_1} \cdot x_2^{i_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{i_k},$$

ahol összegzünk az összes olyan $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ pozitív egészekből álló sorozatra, melyre $i_1 + i_2 + \ldots + i_k = n$.

Példa: visszatevés nélküli mintavétel

Egy osztályban 8 lány és 25 fiú van. Egy felméréshez véletlenszerűen kiválasztanak egy hatfős csapatot közülük (minden hatfős csoportot azonos valószínűséggel választanak). Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott csapatban pontosan két lány van?

Példa: visszatevés nélküli mintavétel

Egy osztályban 8 lány és 25 fiú van. Egy felméréshez véletlenszerűen kiválasztanak egy hatfős csapatot közülük (minden hatfős csoportot azonos valószínűséggel választanak). Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott csapatban pontosan két lány van?

$$\mathbb{P}(\text{pontosan két lány}) = \frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{25}{4}}{\binom{33}{6}} = 0,319.$$

Példa: visszatevés nélküli mintavétel

Egy osztályban 8 lány és 25 fiú van. Egy felméréshez véletlenszerűen kiválasztanak egy hatfős csapatot közülük (minden hatfős csoportot azonos valószínűséggel választanak). Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott csapatban pontosan két lány van?

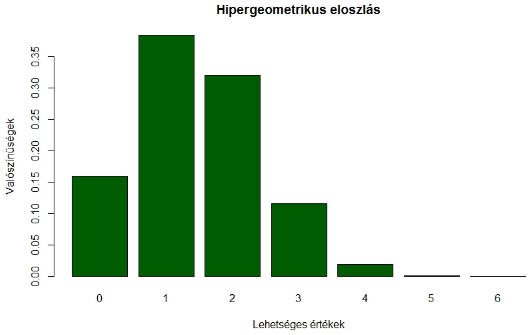
$$\mathbb{P}(\text{pontosan két lány}) = \frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{25}{4}}{\binom{33}{6}} = 0,319.$$

Emlékeztető: n dolog közül k különbözőt $\binom{n}{k}$-féleképpen lehet kiválasztani, ha a sorrend nem számít. Ezért $\binom{33}{6}$-féleképpen választhatjuk ki a hatfős csapatot. Ezek a lehetőségek egyformán valószínűek, ez egy **klasszikus valószínűségi mező**. Másrészt, $\binom{8}{2}$-féleképpen dönthetjük el, hogy melyik két lány kerüljön, és $\binom{25}{4}$-féleképpen azt, hogy melyik négy fiú. Mivel a lányok bármilyen választásához a fiúk tetszőleges választása megfelelő, a kedvező esetek számát a két érték szorzata adja.

Példa: visszatevés nélküli mintavétel

8 lány, 25 fiú, hatfős csapatot választanak.

$$\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ lány}) = \frac{\binom{8}{k} \cdot \binom{25}{6-k}}{\binom{33}{6}}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, 6.$$



A lány csapattagok számának eloszlása: lehetséges értékek és valószínűségek

Visszatevés nélküli mintavétel

Egy osztályban 8 lány és 25 fiú van. Egy felméréshez véletlenszerűen kiválasztanak egy hatfős csapatot közülük (minden hatfős csoportot azonos valószínűséggel választanak). Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott csapatban pontosan k lány van?

Visszatevés nélküli mintavétel

Egy osztályban 8 lány és 25 fiú van. Egy felméréshez véletlenszerűen kiválasztanak egy hatfős csapatot közülük (minden hatfős csoportot azonos valószínűséggel választanak). Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott csapatban pontosan k lány van?

$$\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ lány}) = \frac{\binom{8}{k} \cdot \binom{25}{6-k}}{\binom{33}{6}} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, 6).$$

Visszatevés nélküli mintavétel

Egy osztályban 8 lány és 25 fiú van. Egy felméréshez véletlenszerűen kiválasztanak egy hatfős csapatot közülük (minden hatfős csoportot azonos valószínűséggel választanak). Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott csapatban pontosan k lány van?

$$\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ lány}) = \frac{\binom{8}{k} \cdot \binom{25}{6-k}}{\binom{33}{6}} \qquad (k = 0, 1, 2, \dots, 6).$$

Egy dobozban N golyó van, közülük M fekete, a többi fehér. **Visszatevés nélkül** kihúznak n darabot (minden húzásnál minden, még a dobozban lévő golyót azonos valószínűséggel választva). Tegyük fel, hogy $n \leq M$ és $n \leq N - M$. Annak valószínűsége, hogy pontosan k darab fekete golyót húznak ki:

$$\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ fekete}) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \qquad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Megjegyzés: a kihúzott fekete golyók száma **hipergeometrikus eloszlású.**

Visszatevéses mintavétel

Egy osztályban 14 lány és 22 fiú van. A tanár minden fizikaórán kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet). Mennyi annak valószínűsége, hogy hat egymás utáni fizikaórából pontosan két olyan van, amikor lány felel?

Visszatevéses mintavétel

Egy osztályban 14 lány és 22 fiú van. A tanár minden fizikaórán kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet). Mennyi annak valószínűsége, hogy hat egymás utáni fizikaórából pontosan két olyan van, amikor lány felel?

$$\mathbb{P}(\text{pontosan két lány}) = \binom{6}{2} \frac{14^2 \cdot 22^4}{36^6} = 0,316.$$

Visszatevéses mintavétel

Egy osztályban 14 lány és 22 fiú van. A tanár minden fizikaórán kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet). Mennyi annak valószínűsége, hogy hat egymás utáni fizikaórából pontosan két olyan van, amikor lány felel?

$$\mathbb{P}(\text{pontosan két lány}) = \binom{6}{2}\frac{14^2 \cdot 22^4}{36^6} = 0,316.$$

A hat óra mindegyikén 36-féleképpen lehet a felelőt kiválasztani, így 36^6 lehetőség van összesen, amik egyformán valószínűek (ez is **klasszikus valószínűségi mező**). Ezután megszámoljuk, hogy hány jó eset van. $\binom{6}{2}$-féleképpen választhatjuk ki, hogy melyik két fizikaórán fog lány felelni. Ezen a két órán 14, a többi 4 órán 22 lehetőség van a felelő kiválasztására. Bármelyik választás bármelyikkel kombinálható, ezért jelenik meg a fenti szorzat.

Visszatevéses mintavétel

Egy osztályban 14 lány és 22 fiú van. A tanár minden fizikaórán kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet). Mennyi annak valószínűsége, hogy hat fizikaórából pontosan k olyan van, amikor lány felel?

Visszatevéses mintavétel

Egy osztályban 14 lány és 22 fiú van. A tanár minden fizikaórán kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet). Mennyi annak valószínűsége, hogy hat fizikaórából pontosan k olyan van, amikor lány felel?

$$\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ lány}) = \binom{6}{k} \frac{14^k \cdot 22^{6-k}}{36^6} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, 6).$$

Visszatevéses mintavétel

Egy osztályban 14 lány és 22 fiú van. A tanár minden fizikaórán kiválaszt egy felelőt, minden alkalommal mindenkit azonos valószínűséggel választva (egy diák többször is felelhet). Mennyi annak valószínűsége, hogy hat fizikaórából pontosan k olyan van, amikor lány felel?

$$\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ lány}) = \binom{6}{k} \frac{14^k \cdot 22^{6-k}}{36^6} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, 6).$$

Egy dobozban N golyó van, közülük M fekete, a többi fehér. **Visszatevéssel** kihúznak n darabot (minden húzásnál mind az N golyót azonos valószínűséggel választva). Annak valószínűsége, hogy pontosan k húzásnál jön fekete:

$$\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ fekete}) = \binom{n}{k} \frac{M^k \cdot (N-M)^{n-k}}{N^n} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Megjegyzés: a kihúzott fekete golyók száma **binomiális eloszlású**.

Feltételes valószínűség

Példa: Gábornak három gyereke van. Feltéve, hogy pontosan egy fia van, mennyi a valószínűsége, hogy a középső gyermeke fiú?

Feltételes valószínűség

Példa: Gábornak három gyereke van. Feltéve, hogy pontosan egy fia van, mennyi a valószínűsége, hogy a középső gyermeke fiú?

A: a középső gyerek fiú; B: pontosan egy fiú van.

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\text{a középső fiú}) = \frac{1}{2}.$$

A $\mathbb{P}(A|B)$ feltételes valószínűséget így számolhatjuk ki:

$$\mathbb{P}(\text{a középső fiú}|\text{egy fiú van}) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(LFL)}{\mathbb{P}(FLL, LFL, LLF)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}} = 1/3.$$

Feltételes valószínűség

Példa: Gábornak három gyereke van. Feltéve, hogy pontosan egy fia van, mennyi a valószínűsége, hogy a középső gyermeke fiú?

A: a középső gyerek fiú; B: pontosan egy fiú van.

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\text{a középső fiú}) = \frac{1}{2}.$$

A $\mathbb{P}(A|B)$ feltételes valószínűséget így számolhatjuk ki:

$$\mathbb{P}(\text{a középső fiú}|\text{egy fiú van}) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(LFL)}{\mathbb{P}(FLL, LFL, LLF)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}} = 1/3.$$

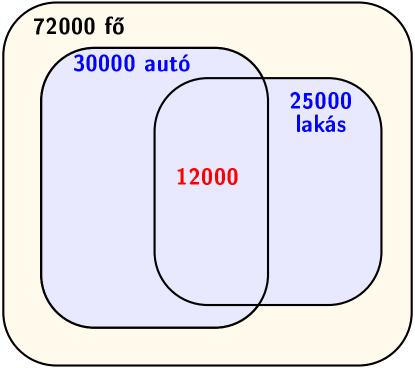
Definíció (Feltételes valószínűség)

Legyenek $A, B \in \mathcal{A}$ események, és tegyük fel, hogy $\mathbb{P}(B) > 0$. Az A esemény B-re vonatkozó feltételes valószínűsége:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

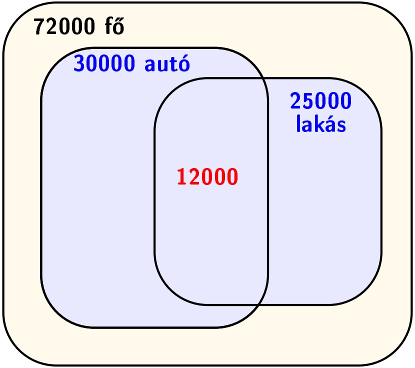
Feltételes valószínűség: példa

Egy 72000 fős városban harmincezer embernek van autója, huszonötezernek lakása, tizenkét ezernek mindkettő. Egy véletlenszerűen választott lakosról tudjuk, hogy van autója. Erre vonatkozóan mennyi a feltételes valószínűsége, hogy az illetőnak van lakása?



Feltételes valószínűség: példa

Egy 72000 fős városban harmincezer embernek van autója, huszonötezernek lakása, tizenkét ezernek mindkettő. Egy véletlenszerűen választott lakosról tudjuk, hogy van autója. Erre vonatkozóan mennyi a feltételes valószínűsége, hogy az illetőnak van lakása?



$$\mathbb{P}(L|A) = \frac{\mathbb{P}(L \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{12000/72000}{30000/72000} = \frac{12000}{30000} = 40\% > \mathbb{P}(L) = \frac{25000}{72000} = 34,7\%.$$

Bayes-tétel: példa

Példa. Tegyük fel, hogy egy város lakosságának 36%-a rendelkezik diplomával, 42%-a érettségivel (mint legmagasabb végzettség), a többiek egyikkel sem. A diplomások 23%-a, az érettségizettek 21%-a, az érettségivel nem rendelkezők 10%-ának van saját autója.

- Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott lakos saját autóval rendelkezik?
- A város egyik lakosa elárulja, hogy van saját autója. Ez alapján mennyi a feltételes valószínűsége, hogy az illető diplomával rendelkezik?

Bayes-tétel: példa

Példa. Tegyük fel, hogy egy város lakosságának 36%-a rendelkezik diplomával, 42%-a érettségivel (mint legmagasabb végzettség), a többiek egyikkel sem. A diplomások 23%-a, az érettségizettek 21%-a, az érettségivel nem rendelkezők 10%-ának van saját autója.

A: autó; B_1: diploma; B_2: érettségi; B_3: nem érettségizett

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A \cap B_1) + \mathbb{P}(A \cap B_2) + \mathbb{P}(A \cap B_3) = \\ &= \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3)\mathbb{P}(B_3) = \\ &= 0,23 \cdot 0,36 + 0,21 \cdot 0,42 + 0,1 \cdot 0,22 = 19,3\%.\end{aligned}$$

Vagyis egy véletlenszerűen választott lakos $19,3\%$ valószínűséggel rendelkezik saját autóval.

Bayes-tétel: példa

Példa. Tegyük fel, hogy egy város lakosságának 36%-a rendelkezik diplomával, 42%-a érettségivel (mint legmagasabb végzettség), a többiek egyikkel sem. A diplomások 23%-a, az érettségizettek 21%-a, az érettségivel nem rendelkezők 10%-ának van saját autója.

A: autó; B_1: diploma; B_2: érettségi; B_3: nem érettségizett

$$\mathbb{P}(B_1|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1)}{\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3)\mathbb{P}(B_3)} =$$
$$= \frac{0,23 \cdot 0,36}{0,23 \cdot 0,36 + 0,21 \cdot 0,42 + 0,1 \cdot 0,22} = 42,9\%.$$

Vagyis egy autóval rendelkező lakosnak 42,9% valószínűséggel van diplomája. Ez nagyobb a diplomások arányánál (36%), hiszen a diplomások között nagyobb az autósok aránya, mint a teljes népességben.

Teljes eseményrendszer

Definíció (Teljes eseményrendszer)

A $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{A}$ *(véges vagy megszámlálható sok) esemény együttesét teljes eseményrendszernek nevezzük, ha*

(i) $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$, *azaz minden elemi esemény szerepel valamelyik eseményben;*

(ii) $B_i \cap B_j = \emptyset$ *teljesül minden* $1 \leq i < j$*-re, azaz páronként kizáróak, semelyik elemi esemény nem szerepel egyszerre két eseményben is;*

(iii) $\mathbb{P}(B_i) > 0$ *minden* $i = 1, 2, \ldots$*-re, azaz mindegyiknek pozitív a valószínűsége.*

Teljes eseményrendszer

Definíció (Teljes eseményrendszer)

A $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{A}$ *(véges vagy megszámlálható sok) esemény együttesét teljes eseményrendszernek nevezzük, ha*

(i) $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$, *azaz minden elemi esemény szerepel valamelyik eseményben;*

(ii) $B_i \cap B_j = \emptyset$ *teljesül minden* $1 \leq i < j$*-re, azaz páronként kizáróak, semelyik elemi esemény nem szerepel egyszerre két eseményben is;*

(iii) $\mathbb{P}(B_i) > 0$ *minden* $i = 1, 2, \ldots$*-re, azaz mindegyiknek pozitív a valószínűsége.*

Tétel (Teljes valószínűség tétele)

Legyen $A \in \mathcal{A}$ *tetszőleges esemény,* $B_1, B_2, \ldots$ *pedig teljes eseményrendszer. Ekkor*

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3)\mathbb{P}(B_3) + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i).$$

Bayes-tétel

Tétel (Teljes valószínűség tétele)

Legyen $A \in \mathcal{A}$ tetszőleges esemény, $B_1, B_2, \ldots$ pedig teljes eseményrendszer. Ekkor

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3)\mathbb{P}(B_3) + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i).$$

Tétel (Bayes-tétel)

Legyen $A \in \mathcal{A}$ olyan esemény, melyre $\mathbb{P}(A) > 0$, $B_1, B_2, \ldots$ pedig teljes eseményrendszer. Ekkor minden $k = 1, 2, \ldots$-re teljesül, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_k|A) &= \frac{\mathbb{P}(A|B_k)\mathbb{P}(B_k)}{\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3)\mathbb{P}(B_3) + \ldots} = \\ &= \frac{\mathbb{P}(A|B_k)\mathbb{P}(B_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}.\end{aligned}$$

Bayes-tétel: példa

Példa. Hanna sátorozni megy Sopronba. Az alábbi táblázat mutatja, hogy adott mennyiségű csapadék esetén mennyi valószínűséggel ázik be a sátra, illetve az előrejelzés szerint mennyi az adott csapadékmennyiség valószínűsége.

csapadék (mm)	0 (B_1)	$0-5$ (B_2)	$5-10$ (B_3)	10-nél több (B_4)
beázás valószínűsége	0	15%	35%	60%
előrejelzés	40%	10%	30%	20%

- Mennyi annak valószínűsége, hogy holnap beázik Hanna sátra?
- Másnap Hanna a beázott sátorról küld képeket. Mennyi annak valószínűsége, hogy Sopronban több mint 10 mm eső esett ezen a napon?

Bayes-tétel: példa

Példa. Hanna sátorozni megy Sopronba. Az alábbi táblázat mutatja, hogy adott mennyiségű csapadék esetén mennyi valószínűséggel ázik be a sátra, illetve az előrejelzés szerint mennyi az adott csapadékmennyiség valószínűsége.

csapadék (mm)	0 (B_1)	$0-5$ (B_2)	$5-10$ (B_3)	10-nél több (B_4)
beázás valószínűsége	0	15%	35%	60%
előrejelzés	40%	10%	30%	20%

A: Hanna sátra beázik. A B_1, B_2, B_3, B_4 teljes eseményrendszer, mert ezek közül pontosan az egyik következik be (a B_2-t úgy értve, hogy van csapadék, de nem több 5 mm-nél). Alkalmazhatjuk a teljes valószínűség tételét:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A|B_3)\mathbb{P}(B_3) + \mathbb{P}(A|B_4)\mathbb{P}(B_4)$$
$$= 0 \cdot 0,3 + 0,15 \cdot 0,1 + 0,35 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,2 = 0,24 = 24\%.$$

Vagyis Hanna sátra 24% valószínűséggel ázik be.

Bayes-tétel: példa

Példa. Hanna sátorozni megy Sopronba. Az alábbi táblázat mutatja, hogy adott mennyiségű csapadék esetén mennyi valószínűséggel ázik be a sátra, illetve az előrejelzés szerint mennyi az adott csapadékmennyiség valószínűsége.

csapadék (mm)	0 (B_1)	$0-5$ (B_2)	$5-10$ (B_3)	10-nél több (B_4)
beázás valószínűsége	0	15%	35%	60%
előrejelzés	40%	10%	30%	20%

Már láttuk, hogy $\mathbb{P}(A) > 0$, B_1, B_2, B_3, B_4 pedig továbbra is teljes eseményrendszer, így alkalmazhatjuk Bayes tételét:

$$\mathbb{P}(B_4|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_4)\mathbb{P}(B_4)}{\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \ldots + \mathbb{P}(A|B_4)\mathbb{P}(B_4)} =$$
$$= \frac{0,6 \cdot 0,2}{0 \cdot 0,3 + 0,15 \cdot 0,1 + 0,35 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,2} = \frac{0,12}{0,24} = 50\%.$$

Vagyis feltéve, hogy beázott a sátor, 50% valószínűséggel volt 10 mm-nél több csapadék.

Házi feladat szeptember 25-ig

Legalább tizenöt ismerősről jegyezzük fel a nemüket, és azt, hogy bal– vagy jobbkezesek e. Készítsünk táblázatot az eredményekről a négy lehetőség (balkezes férfi stb.) gyakoriságával, majd becsüljük meg az alábbi valószínűségeket a relatív gyakoriságok segítségével:

1. annak valószínűsége, hogy valaki balkezes
2. annak valószínűsége, hogy valaki balkezes, feltéve, hogy férfi
3. annak valószínűsége, hogy valaki jobbkezes, feltéve, hogy nő
4. annak valószínűsége, hogy valaki férfi, feltéve, hogy balkezes
5. annak valószínűsége, hogy valaki férfi, feltéve, hogy jobbkezes
6. annak valószínűsége, hogy valaki a „nő” és a „jobbkezes” tulajdonságok közül legalább az egyikkel rendelkezeik