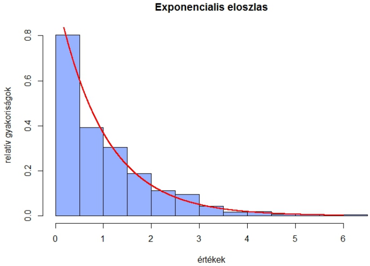
# Exponenciális eloszlás (10. előadás)

## Definíció (Exponenciális eloszlás)

*Legyen* $\lambda > 0$ *valós szám. Azt mondjuk, hogy az* $X$ *valószínűségi változó exponenciális eloszlású* $\lambda$ *paraméterrel, ha sűrűségfüggvénye*

$$f(s) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda s}, & \text{ha } s > 0; \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$




Exp(1) sűrűségfüggvénye és 500 elemű minta hisztogramja

# Az exponenciális eloszlás tulajdonságai

## Állítás

*Legyen $X$ exponenciális eloszlású $\lambda > 0$ paraméterrel. Ekkor a következők teljesülnek.*

(i) *$X$ eloszlásfüggvénye:*

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(X < t) = \int_{-\infty}^{t} f(s)ds = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & \textit{ha } t > 0; \\ 0 & \textit{különben.} \end{cases}$$

(ii) *$X$ várható értéke: $\mathbb{E}(X) = 1/\lambda$, szórása: $D(X) = 1/\lambda$.*

(iii) **Örökifjú tulajdonság.** *Legyenek $s, t$ pozitív számok. Ekkor*

$$\mathbb{P}(X \geq s + t | X \geq s) = \mathbb{P}(X \geq t).$$

**Példa.** Radioaktív részecske bomlási ideje, kiszolgálási vagy feldolgozási idő.

# Exponenciális eloszlás: példa

Egy boltban egy vevő kiszolgálásának ideje legyen az $X$ valószínűségi változó, és tegüyk fel, hogy ez percben számolva 3 várható értékű exponenciális eloszlású valószínűségi változó.

Mennyi a valószínűsége, hogy a vevőt legalább 5 percig tart kiszolgálni?

# Exponenciális eloszlás: példa

Egy boltban egy vevő kiszolgálásának ideje legyen az $X$ valószínűségi változó, és tegüyk fel, hogy ez percben számolva 3 várható értékű exponenciális eloszlású valószínűségi változó.

Mennyi a valószínűsége, hogy a vevőt legalább 5 percig tart kiszolgálni?

Mivel exponenciális eloszlás esetén $\mathbb{E}(X) = 1/\lambda$, most $\lambda = 1/3$ lesz. Az exponenciális eloszlás eloszlásfüggvénye alapján

$$\mathbb{P}(X \geq 5) = 1 - \mathbb{P}(X < 5) = 1 - F(5) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t} = e^{-5/3} = 0,189.$$

# Exponenciális eloszlás: példa

Egy boltban egy vevő kiszolgálásának ideje legyen az $X$ valószínűségi változó, és tegüyk fel, hogy ez percben számolva 3 várható értékű exponenciális eloszlású valószínűségi változó.

Mennyi a valószínűsége, hogy a vevőt legalább 5 percig tart kiszolgálni?

Mivel exponenciális eloszlás esetén $\mathbb{E}(X) = 1/\lambda$, most $\lambda = 1/3$ lesz. Az exponenciális eloszlás eloszlásfüggvénye alapján

$$\mathbb{P}(X \geq 5) = 1 - \mathbb{P}(X < 5) = 1 - F(5) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t} = e^{-5/3} = 0,189.$$

Mennyi a valószínűsége, hogy a vevő kiszolgálása legalább 2, de legfeljebb 4 percig tart?

# Exponenciális eloszlás: példa

Egy boltban egy vevő kiszolgálásának ideje legyen az $X$ valószínűségi változó, és tegüyk fel, hogy ez percben számolva 3 várható értékű exponenciális eloszlású valószínűségi változó.

Mennyi a valószínűsége, hogy a vevőt legalább 5 percig tart kiszolgálni?

Mivel exponenciális eloszlás esetén $\mathbb{E}(X) = 1/\lambda$, most $\lambda = 1/3$ lesz. Az exponenciális eloszlás eloszlásfüggvénye alapján

$$\mathbb{P}(X \geq 5) = 1 - \mathbb{P}(X < 5) = 1 - F(5) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t} = e^{-5/3} = 0,189.$$

Mennyi a valószínűsége, hogy a vevő kiszolgálása legalább 2, de legfeljebb 4 percig tart?

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(2 \leq X \leq 4) &= \mathbb{P}(X \leq 4) - \mathbb{P}(X \leq 2) = F(4) - F(2) = \\ &= (1 - e^{-4/3}) - (1 - e^{-2/3}) = e^{-2/3} - e^{-4/3} = 0,25.\end{aligned}$$

# Az exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonsága

## Állítás

*Legyen $X$ exponenciális eloszlású valószínűségi változó, $s, t$ pozitív számok. Ekkor*

$$\mathbb{P}(X \geq s+t | X \geq s) = \mathbb{P}(X \geq t).$$

*Bizonyítás.* A feltételes valószínűség definícióját és az exponenciális eloszlás eloszlásfüggvényének alakját felhasználva

$$\mathbb{P}(X \geq s+t | X \geq s) = \frac{\mathbb{P}(\{X \geq s+t\} \cap \{X \geq s\})}{\mathbb{P}(X \geq s)} = \frac{1-\mathbb{P}(X < s+t)}{1-\mathbb{P}(X < s)} =$$

$$= \frac{1-F(s+t)}{1-F(s)} = \frac{1-(1-e^{-\lambda(s+t)})}{1-(1-e^{-\lambda s})} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} =$$

$$= e^{-\lambda t} = 1-(1-e^{-\lambda t}) = 1-F(t) = \mathbb{P}(X \geq t).$$

# Valószínűségi vektorváltozó

## Definíció

*Az*

$$\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$$

*függvény* **valószínűségi vektorváltozó**, *ha* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *valószínűségi változók.*

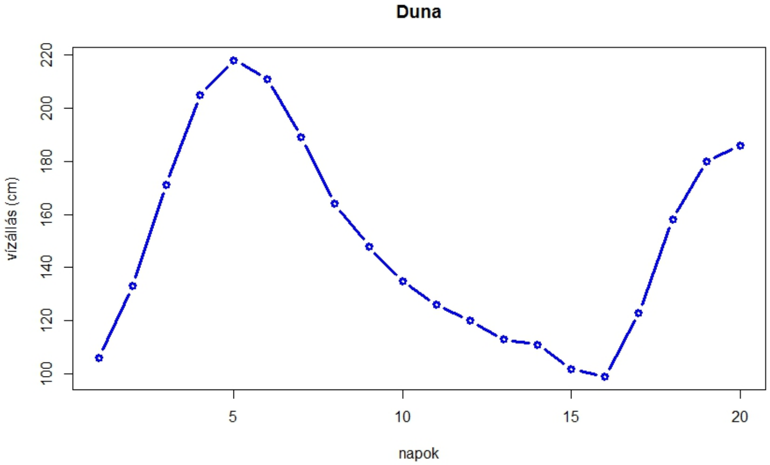
*Ha* $\underline{X}$ *valószínűségi vektorváltozó, akkor az* $X_i$ *valószínűségi változó eloszlását az* $\underline{X}$ $i$. **peremeloszlásának** *nevezzük.*

*Az* $\underline{X}$ *valószínűségi vektorváltozó* **diszkrét**, *ha értékkészlete véges vagy megszámlálhatóan végtelen.*

**Példa.** 1000 embert megkérdezünk a havi jövedelméről. Legyen $X_i$ az $i$. megkérdezett jövedelme. Ekkor $(X_1, X_2, \ldots, X_{1000})$ valószínűségi vektorváltozó.

$Y_i$: a Duna vízállása az $i$. napon $(i = 1, 2, \ldots, 20)$.

# Valószínűségi vektorváltozó: példa




$X_1 = 106, X_2 = 133, \ldots, X_{20} = 186$ (az adatok forrása: Országos Vízjelző Szolgálat)

# Együttes eloszlásfüggvény

## Definíció

*Az* $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ *valószínűségi vektorváltozó együttes eloszlásfüggvénye az* $F : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ *függvény, melyre*

$$F(\underline{t}) = F(t_1, \ldots, t_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq t_1, X_2 \leq t_2, \ldots, X_n \leq t_n), \ \textit{ha} \ (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Például: egy véletlenszerűen választott embert megkérdezünk a havi jövedelméről ($X_1$), a havi kiadásairól ($X_2$), és az életkoráról ($X_3$). Ekkor $(X_1, X_2, X_3)$ valószínűségi vektorváltozó, és ha eloszlásfüggvénye $F$, akkor például

$$F(200000, 150000, 40) = \mathbb{P}(X_1 \leq 200000, X_2 \leq 1500000, X_3 \leq 40)$$

annak valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott ember havi jövedelme legfeljebb 200000 (forint), havi kiadása legfeljebb 150000 (forint), életkora pedig legfeljebb 40 (év).

# Együttes sűrűségfüggvény

## Definíció

*Az* $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ *valószínűségi vektorváltozó abszolút folytonos, ha van olyan* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *függvény, melyre*

$$F(t_1, \ldots, t_n) = \int_{-\infty}^{t_1} \cdots \int_{-\infty}^{t_n} f(s_1, \ldots, s_n) ds_1 \ldots ds_n.$$

*teljesül minden* $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ *esetén. Ilyenkor az* $f$ *függvényt az* $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ **együttes sűrűségfüggvényének** *nevezzük.*

# Együttes sűrűségfüggvény

## Definíció

*Az $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ valószínűségi vektorváltozó abszolút folytonos, ha van olyan $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény, melyre*

$$F(t_1, \ldots, t_n) = \int_{-\infty}^{t_1} \cdots \int_{-\infty}^{t_n} f(s_1, \ldots, s_n) ds_1 \ldots ds_n.$$

*teljesül minden $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ esetén. Ilyenkor az $f$ függvényt az $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$* **együttes sűrűségfüggvényének** *nevezzük.*

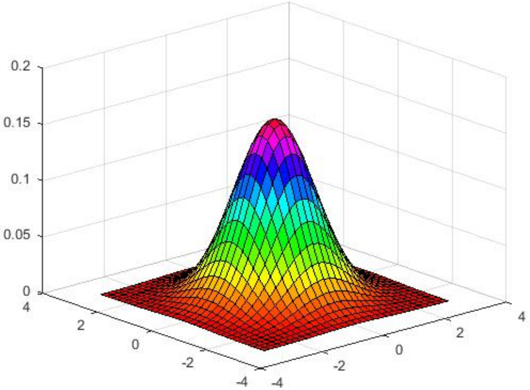
Tegyük fel, hogy az $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ valószínűségi vektorváltozó együttes sűrűségfüggvénye $f$. Ekkor egy $A \subseteq \mathbb{R}^n$ halmazra

$$\mathbb{P}((X_1, X_2, \ldots, X_n) \in A) = \int_A f(t_1, t_2, \ldots, t_n)\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_n.$$

Következmény:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1, t_2, \ldots, t_n)\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_n = 1.$$

# Kétdimenziós normális eloszlás




Két független standard normális eloszlás együttes sűrűségfüggvénye

# Peremeloszlások sűrűségfüggvénye

Tegyük fel, hogy az $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ valószínűségi vektorváltozó együttes sűrűségfüggvénye $f$. Hogyan kapható meg például az első peremeloszlás, azaz $X_1$ sűrűségfüggvénye?

# Peremeloszlások sűrűségfüggvénye

Tegyük fel, hogy az $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ valószínűségi vektorváltozó együttes sűrűségfüggvénye $f$. Hogyan kapható meg például az első peremeloszlás, azaz $X_1$ sűrűségfüggvénye?

## Állítás

*Tegyük fel, hogy az $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye $f$. Ekkor az $X_j$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye (melyet $f_j$-vel jelölünk), azaz a $j$. peremsűrűségfüggvény így kapható meg $f$-ből:*

$$f_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f(s_1, \ldots, s_{j-1}, t, s_{j+1}, \ldots, s_n) ds_1 \ldots ds_{j-1} ds_{j+1} \ldots ds_n.$$

Speciálisan $n = 2$-re:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy; \qquad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx.$$

# Függetlenség

## Definíció (Véges eset)

*Azt mondjuk, hogy az* $X_1, \dots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ *valószínűségi változók* **függetlenek**, *ha*

$$\mathbb{P}(X_1 \le t_1, X_2 \le t_2, \dots, X_n \le t_n) = \mathbb{P}(X_1 \le t_1) \cdot \mathbb{P}(X_2 \le t_2) \dots \mathbb{P}(X_n \le t_n)$$

*teljesül tetszőleges* $t_1, t_2, \dots, t_n$ *valós számokra, azaz*

$$F(t_1, t_2, \dots, t_n) = F_1(t_1) \cdot F_2(t_2) \cdot \dots F_n(t_n),$$

*ahol* $F_j$ *az* $X_j$ *valószínűségi változó eloszlásfüggvénye.*

## Definíció (Végtelen eset)

*Az* $X_1, X_2, X_3 \dots$ *valószínűségi változók függetlenek, ha közülük bármely véges sokat kiválasztva független valószínűségi változókat kapunk.*

# Függetlenség és együttes sűrűségfüggvény

## Állítás (Függetlenség és sűrűségfüggvény)

*Legyen az* $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ *valószínűségi vektorváltozó együttes sűrűségfüggvénye* $f$, *továbbá az* $X_j$ *valószínűségi változó sűrűségfüggvénye* $f_j$ *minden* $j = 1, 2, \ldots, n$ *esetén. Ezekkel a jelölésekkel:* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *pontosan akkor függetlenek, ha*

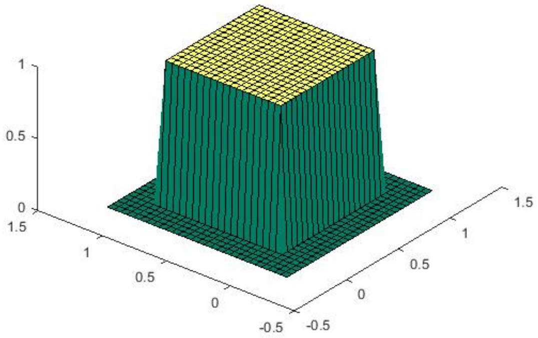
$$f(t_1, \ldots, t_n) = f_1(t_1) \cdot f_2(t_2) \ldots f_n(t_n)$$

*teljesül bármely* $t_1, t_2, \ldots, t_n$ *valós számokra.*

Például: ha $X_1, X_2$ független standard normális eloszlású valószínűségi változók, akkor együttes sűrűségfüggvényük

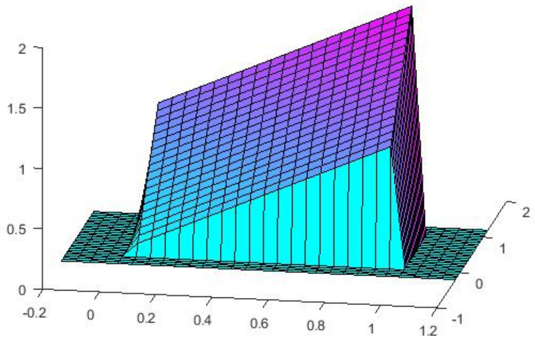
$$f(t_1, t_2) = f_1(t_1) f_2(t_2) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left( -\frac{t_1^2}{2} \right) \right) \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left( -\frac{t_2^2}{2} \right) \right)$$
$$= \frac{1}{2\pi} \exp\left( -\frac{t_1^2 + t_2^2}{2} \right).$$

# Egyenletes eloszlás a négyzeten




A $[0,1] \times [0,1]$ négyzeten egyenletes eloszlás (két független, $[0,1]$-en egyenletes eloszlás) együttes sűrűségfüggvénye

# Együttes sűrűségfüggvény: példa




A $[0, 1] \times [0, 1]$ négyzeten $x + y$ alakú együttes sűrűségfüggvény

# Együttes sűrűségfüggvény: példa

Tegyük fel, hogy az $(X, Y)$ valószínűségi vektorváltozó együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1 \text{ és } 0 \leq y \leq 1; \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Számítsuk ki $X$ és $Y$ korrelációs együtthatóját:

$$R(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{D(X)D(Y)} = \frac{\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)}{D(X)D(Y)}.$$

# Együttes sűrűségfüggvény: példa

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & \text{ha } 0 \le x \le 1 \text{ és } 0 \le y \le 1; \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

## Állítás

*Legyen az $(X, Y)$ valószínűségi vektorváltozó együttes sűrűségfüggvénye $f$. Ekkor*

$$\mathbb{E}(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f(x,y)\,dy\,dx.$$

# Együttes sűrűségfüggvény: példa

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1 \text{ és } 0 \leq y \leq 1; \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

## Állítás

*Legyen az $(X,Y)$ valószínűségi vektorváltozó együttes sűrűségfüggvénye $f$. Ekkor*

$$\mathbb{E}(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f(x,y)\,dy\,dx.$$

$$\mathbb{E}(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\cdot f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^1 xy(x+y)dydx =$$
$$= \int_0^1\int_0^1 x^2ydydx + \int_0^1\int_0^1 xy^2dydx = \int_0^1 \frac{x^2}{2}dx + \int_0^1 \frac{x}{3}dx = \frac{1}{6}+\frac{1}{6} = \frac{1}{3},$$

felhasználva, hogy $\int_0^1 x^k dx = [x^{k+1}/(k+1)]_{x=0}^1 = 1/(k+1)$.

# Együttes sűrűségfüggvény: példa

Az $(X, Y)$ együttes sűrűségfüggvénye:

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1 \text{ és } 0 \leq y \leq 1; \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Az $X$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_0^1 x + ydy = x + \frac{1}{2},$$

ha $0 \leq x \leq 1$, és 0 különben. Ezért

# Együttes sűrűségfüggvény: példa

Az $(X, Y)$ együttes sűrűségfüggvénye:

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y, & \text{ha } 0 \le x \le 1 \text{ és } 0 \le y \le 1; \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Az $X$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_0^1 x + ydy = x + \frac{1}{2},$$

ha $0 \le x \le 1$, és 0 különben. Ezért

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf_1(x)dx = \int_0^1 x \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)dx = \int_0^1 x^2 + \frac{x}{2}dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}.$$

# Együttes sűrűségfüggvény: példa

Az $X$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_0^1 x + ydy = x + \frac{1}{2},$$

ha $0 \leq x \leq 1$, és 0 különben. Ezért

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf_1(x)dx = \int_0^1 x \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) dx = \int_0^1 x^2 + \frac{x}{2} dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}.$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x)dx = \int_0^1 x^2 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) dx = \int_0^1 x^3 + \frac{x^2}{2} dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}.$$

# Együttes sűrűségfüggvény: példa

Az $X$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_0^1 x + ydy = x + \frac{1}{2},$$

ha $0 \leq x \leq 1$, és 0 különben. Ezért

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf_1(x)dx = \int_0^1 x \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)dx = \int_0^1 x^2 + \frac{x}{2}dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}.$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x)dx = \int_0^1 x^2 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)dx = \int_0^1 x^3 + \frac{x^2}{2}dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}.$$

A szimmetria miatt hasonlóképpen:

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{7}{12}; \qquad \mathbb{E}(Y^2) = \frac{5}{12}.$$

# Együttes sűrűségfüggvény: példa

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, & \text{ha } 0\le x\le 1 \text{ és } 0\le y\le 1;\\ 0 & \text{különben.}\end{cases}$$

$$\mathbb{E}(XY)=\frac{1}{3};\qquad \mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(Y)=\frac{7}{12};\qquad \mathbb{E}(X^2)=\mathbb{E}(Y^2)=\frac{5}{12}.$$

Az $X$ és $Y$ korrelációs együtthatója:

$$R(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{D(X)D(Y)}=\frac{\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)}{D(X)D(Y)}=$$

$$=\frac{1/3-(7/12)^2}{\sqrt{5/12-(7/12)^2}\cdot\sqrt{5/12-(7/12)^2}}=\frac{1/3-(7/12)^2}{5/12-(7/12)^2}=-0,091.$$

Nagyon gyenge negatív korreláció van a két valószínűségi változó között.

# Házi feladat december 4-ig

Legyen az $(X, Y)$ valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye (megfelelő $c$ számmal)

$$f(x,y) = \begin{cases} cx(x+y), & \text{ha } 0 \leq x \leq 1 \text{ és } 0 \leq y \leq 1; \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Határozzuk meg $c$ értékét, és számítsuk ki $X$ és $Y$ korrelációs együtthatóját.

# Házi feladat november 20-ig

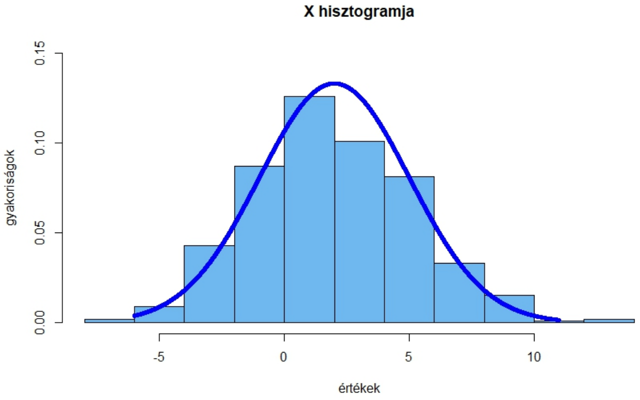
Számítógép (például R) segítségével generáljunk két független, $n = 500$ elemű mintát, az első (ezek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ valószínűségi változók) eloszlása legyen normális eloszlás 2 várható értékkel és 3 szórással, a második minta (ezek az $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ valószínűségi változók) tetszőlegesen választott, de nullától eltérő $m$ várható értékkel és tetszőlegesen választott, de 1-től eltérő $\sigma$ szórással.

1. Készítsünk hisztogramot az $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ mintából. Mennyi ennek a mintának az átlaga és a korrigált tapasztalati szórása?
2. Készítsünk hisztogramot az $(X_1 + Y_1, X_2 + Y_2, \ldots, X_n + Y_n)$ mintából. Mennyi ennek a mintának az átlaga és a korrigált tapasztalati szórása? Mennyi az $X_1 + Y_1$ valószínűségi változó várható értéke, illetve szórása?
3. Készítsünk hisztogramot az $(X_1 - 2Y_1, X_2 - 2Y_2, \ldots, X_n - 2Y_n)$ mintából. Mennyi ennek a mintának az átlaga és a korrigált tapasztalati szórása? Mennyi az $X_1 - 2Y_1$ valószínűségi változó várható értéke, illetve szórása?

# Házi feladat november 20-ig: megoldás

```
> x=rnorm(n=500,m=2, sd=3)
> y=rnorm(n=500, m=8, sd=4)
> felo=seq(-6,11,1/1000)
> sf=dnorm(felo, m=2, sd=3)
> hist(x, col="#6eb7ef", main="X hisztogramja", xlab="értékek",
ylab="gyakoriságok", freq=FALSE, ylim=c(0,0.15))
> lines(felo,sf,col="blue",lwd=5)
```

# Házi feladat november 20-ig: megoldás




$n = 500$ elemű minta hisztogramja $m = 2, \sigma = 3$ szórású normális eloszlásból, és ennek sűrűségfüggvénye; mintaátlag (mean): $\overline{X} = 1,937$, korrigált tapasztalati szórás (sd): $s_n^* = 3,21$

# Házi feladat november 20-ig: megoldás

$X \sim N(2, 3^2)$ és $Y \sim N(8, 4^2)$ függetlenek, ekkor $X + Y \sim N(10, 5^2)$, az összeg is normális eloszlású, és

$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 2 + 8 = 10;$$
$$D^2(X+Y) = D^2(X) + D^2(Y) = 9 + 16 = 25.$$

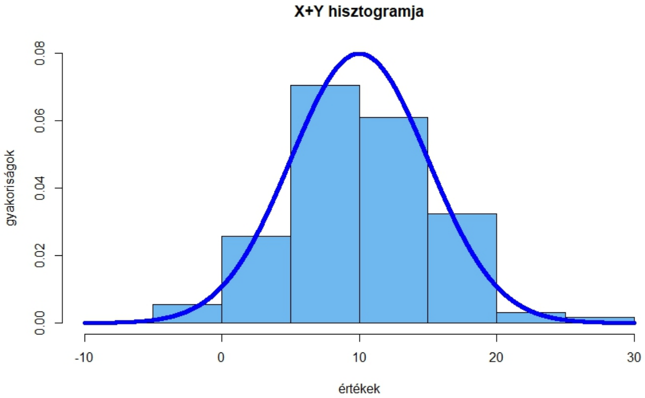
# Házi feladat november 20-ig: megoldás

$X \sim N(2, 3^2)$ és $Y \sim N(8, 4^2)$ függetlenek, ekkor $X + Y \sim N(10, 5^2)$, az összeg is normális eloszlású, és

$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 2 + 8 = 10;$$
$$D^2(X+Y) = D^2(X) + D^2(Y) = 9 + 16 = 25.$$

```
> x=rnorm(n=500,m=2, sd=3)

> y=rnorm(n=500, m=8, sd=4)

> osszeg=x+y

> felo=seq(-10, 30, 1/1000)

> sf=dnorm(felo, m=10, sd=5)

> hist(osszeg, col="#6eb7ef", main="X+Y hisztogramja", xlab="értékek",

ylab="gyakoriságok", freq=FALSE, ylim=c(0,0.08))

> lines(felo,sf,col="blue",lwd=5)
```

# Házi feladat november 20-ig: megoldás




A két $n = 500$ elemű minta összegének hisztogramja és az $N(10, 5^2)$ normális eloszlás sűrűségfüggvénye; mintaátlag (mean): $\overline{X} = 10,16$, korrigált tapasztalati szórás (sd): $s_n^* = 5,33$

# Házi feladat november 20-ig: megoldás

$X \sim N(2, 3^2)$ és $Y \sim N(8, 4^2)$ függetlenek, ekkor $X - 2Y \sim N(-14, 73)$, az összeg is normális eloszlású, és

$$\mathbb{E}(X - 2Y) = \mathbb{E}(X) - 2\mathbb{E}(Y) = 2 - 2 \cdot 8 = -14;$$
$$D^2(X - 2Y) = D^2(X) + D^2(-2Y) = 9 + (-2)^2 \cdot 16 = 73.$$

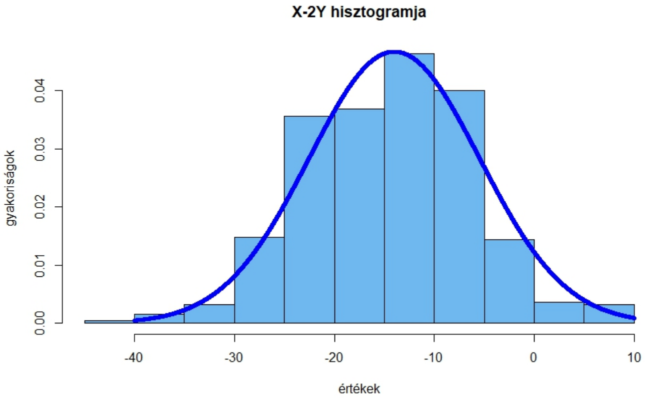
# Házi feladat november 20-ig: megoldás

$X \sim N(2, 3^2)$ és $Y \sim N(8, 4^2)$ függetlenek, ekkor $X - 2Y \sim N(-14, 73)$, az összeg is normális eloszlású, és

$$\mathbb{E}(X - 2Y) = \mathbb{E}(X) - 2\mathbb{E}(Y) = 2 - 2 \cdot 8 = -14;$$
$$D^2(X - 2Y) = D^2(X) + D^2(-2Y) = 9 + (-2)^2 \cdot 16 = 73.$$

```
> x=rnorm(n=500,m=2, sd=3)

> y=rnorm(n=500, m=8, sd=4)

> linkomb=x-2*y

> hist(linkomb, col="#6eb7ef", main="X-2Y hisztogramja", xlab="értékek",
ylab="gyakoriságok", freq=FALSE)

> felo=seq(-40, 10,0.002)

> sf=dnorm(felo, m=-14, sd=sqrt(73))

> lines(felo,sf,col="blue",lwd=5)
```

# Házi feladat november 20-ig: megoldás




Az $X - 2Y$ minta hisztogramja és az $N(-14, 73)$ normális eloszlás sűrűségfüggvénye; mintaátlag (mean): $\overline{X} = -14,51$, korrigált tapasztalati szórás (sd): $s_n^* = 8,37$