

# Valószínűségszámítás

Survey statisztika mesterszak és földtudomány alapszak

Backhausz Ágnes

agnes@cs.elte.hu

2018/2019. őszi félév

# A valószínűségszámítás kurzus céljai

- **a statisztika megalapozása**: a véletlen mintavételből származó adatok elemzésére alkalmazott módszerekhez szükséges alapfogalmak ismertetése
- a valószínűségszámítás alapjai, szemlélete
- feladatmegoldási készség fejlesztése (gyakorlaton)
- az alkalmazási lehetőségek bemutatása

# A valószínűségszámítás kurzus céljai

- **a statisztika megalapozása**: a véletlen mintavételből származó adatok elemzésére alkalmazott módszerekhez szükséges alapfogalmak ismertetése
- a valószínűségszámítás alapjai, szemlélete
- feladatmegoldási készség fejlesztése (gyakorlaton)
- az alkalmazási lehetőségek bemutatása

Számonkérés: írásbeli vizsga; legalább elégséges gyakorlati jegyen a félév során beadható házi feladatokkal lehet javítani

tematika, mintafeladatsor, elméleti összefoglaló, gyakorló feladatok: [moodle.elte.hu](https://moodle.elte.hu)

# Ajánlott irodalom

- Denkinger: Valószínűségszámítás
- Prékopa: Valószínűségelmélet
- Ross: A first course in probability
- Solt: Valószínűségszámítás.
- Arató Miklós, Prokaj Vilmos és Zempléni András: Bevezetés a valószínűség-számításba és alkalmazásaiba: példákkal, szimulációkkal  
<http://elte.prompt.hu/sites/default/files/tananyagok/valszam/zempleni.pdf>
- Bognárné, Mogyoródi, Prékopa, Rényi, Szász: Valószínűségszámítási feladatgyűjtemény
- Fazekas: Valószínűségszámítás és statisztika jegyzet  
<https://gyires.inf.unideb.hu/KMITT/b21/valseg.pdf>

# A valószínűségszámításról és statisztikáról

## Célok:

- felmérésekből, kísérletekből származó adatok elemzése
- ismeretlen mennyiségek becslése a mérések alapján
- hipotézisek ellenőrzése vagy cáfolata
- véletlen folyamatok modellezése
- múltbeli adatok alapján a jövőbeli folyamatok előrejelzése

# A valószínűségszámításról és statisztikáról

## Célok:

- felmérésekből, kísérletekből származó adatok elemzése
- ismeretlen mennyiségek becslése a mérések alapján
- hipotézisek ellenőrzése vagy cáfolata
- véletlen folyamatok modellezése
- múltbeli adatok alapján a jövőbeli folyamatok előrejelzése

## Alkalmazási területek:

- statisztika a társadalomtudományokban: felmérések értékelése, elemzése
- statisztika a természettudományokban: mérések, kísérleti eredmények értelmezése
- előrejelzés: társadalmi, gazdasági, pénzügyi folyamatok
- biztosításmatematika

# A valószínűségszámításról

- a matematika egy területe
- axiomatikus felépítés (Kolmogorov, 1933)
- alkalmazható gyakorlati feladatokban (például: ha egy érmével 1000 dobásból 550 fej lett, és azt állítjuk, hogy az érme nem szabályos, 99,9% valószínűséggel helyes az állításunk)
- az alkalmazásnál **a modell kiválasztása, felépítése** kulcsfontosságú, ettől függ a végeredmény
- **mennyi a valószínűsége, hogy holnap Budapesten lesz csapadék?**

# A valószínűségszámításról

- a matematika egy területe
- axiomatikus felépítés (Kolmogorov, 1933)
- alkalmazható gyakorlati feladatokban (például: ha egy érmével 1000 dobásból 550 fej lett, és azt állítjuk, hogy az érme nem szabályos, 99,9% valószínűséggel helyes az állításunk)
- az alkalmazásnál **a modell kiválasztása, felépítése** kulcsfontosságú, ettől függ a végeredmény
- **mennyi a valószínűsége, hogy holnap Budapesten lesz csapadék?**  
egy megfelelő matematikai modellben van értelme a kérdésnek, de a válasz különböző modellekben különböző

# A valószínűségszámításról

- a matematika egy területe
- axiomatikus felépítés (Kolmogorov, 1933)
- alkalmazható gyakorlati feladatokban (például: ha egy érmével 1000 dobásból 550 fej lett, és azt állítjuk, hogy az érme nem szabályos, 99,9% valószínűséggel helyes az állításunk)
- az alkalmazásnál **a modell kiválasztása, felépítése** kulcsfontosságú, ettől függ a végeredmény
- **mennyi a valószínűsége, hogy holnap Budapesten lesz csapadék?**  
egy megfelelő matematikai modellben van értelme a kérdésnek, de a válasz különböző modellekben különböző
- cél: **minél jobb modell illesztése** a statisztika segítségével (jól illeszkedik a megfigyelt adatokra, egyszerű, interpretálható, de más szempontok is lehetségesek)

# A valószínűségszámítás történetéről

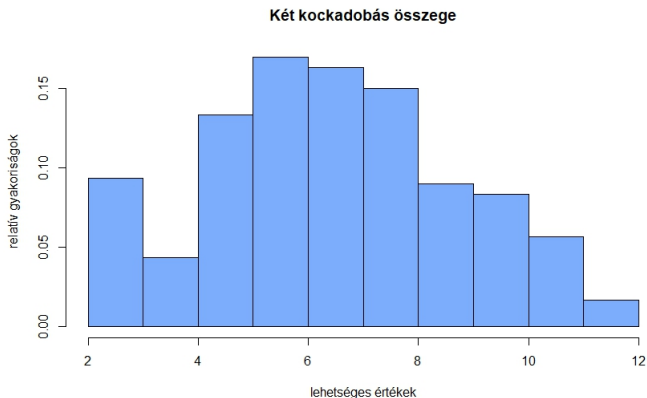
- **osztzkodási probléma**, 1494: egy félbehagyott játékban az aktuális állás alapján hogyan osszák el a tétet (megoldás: Pascal, 1656)
- Cardano könyve a kockajátékokról, 1564 (amit 1663-ban adtak ki)
- életjáradék-számítás, de Witt, Haley, 1671
- nagy számok törvénye, Jacob Bernoulli, 1713
- XIX. század első fele: de Moivre, Bayes, Gauss, Poisson, Buffon
- XIX. század vége: Csebisev, Markov, Ljapunov
- **axiomatikus felépítés**: Kolmogorov, 1933

# A valószínűségszámítás történetéről

## XX. századi alkalmazások és kezdetük

- sztochasztikus folyamatok (Wiener, 1923)
- matematikai statisztika (Fisher, 1925)
- játékelmélet (Neumann, 1928)
- információelmélet (Shannon, 1948)
- idősorok
- pénzügyi folyamatok (Black–Scholes, 1973)
- hierarchikus tanulási algoritmusok → mesterséges intelligencia

## Példa: két szabályos kockadobás összege



Kísérlet: két szabályos dobókockával dobva mennyi a dobott számok összege. Ezt 300-szor megismételve az egyes lehetséges értékek **relatív gyakorisága** (előfordulásuk aránya) látható az ábrán.

## Példa: két szabályos kockadobás

Két szabályos dobókockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7?

## Példa: két szabályos kockadobás

Két szabályos dobókockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7?

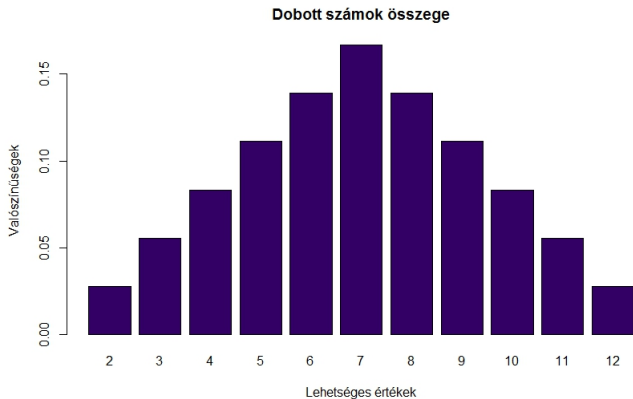
**A dobókockák, emberek, tárgyak stb. mindig különbözőek.**

- Mindkét dobás hatféle lehet:  $6 \cdot 6 = 36$ , vagyis 36 darab dobássorozat van.
- A dobássorozatok egyformán valószínűek: mindegyiknek  $1/36$  a valószínűsége.
- A kedvező dobássorozatok száma: 6.

11	12	13	14	15	<b>16</b>
21	22	23	24	<b>25</b>	26
31	32	33	<b>34</b>	35	36
41	42	<b>43</b>	44	45	46
51	<b>52</b>	53	54	55	56
<b>61</b>	62	63	64	65	66

Tehát  $\mathbb{P}(\text{az összeg } 7) = 6/36 = 1/6$ .

## Példa: két szabályos kockadobás



Az összeg lehetséges értékei és a valószínűségek

# Eseménytér

- **elemi esemény:** a kísérlet egy lehetséges kimenetele (például: **15** vagy **22**)
- **eseménytér:** az elemi események összessége, halmaza  
a példában az az alábbi 36 elemű halmaz:  $\{11, 12, \dots, 66\}$
- **esemény:** az eseménytér részhalmazai  
például: a dobott számok összege 7, azaz  $\{16, 25, 34, 43, 52, 61\}$   
vagy: a dobott számok összege legfeljebb 3, azaz  $\{11, 12, 21\}$

# Eseménytér

- **elemi esemény**: a kísérlet egy lehetséges kimenetele (például: **15** vagy **22**)
- **eseménytér**: az elemi események összessége, halmaza  
a példában az az alábbi 36 elemű halmaz:  $\{11, 12, \dots, 66\}$
- **esemény**: az eseménytér részhalmazai  
például: a dobott számok összege 7, azaz  $\{16, 25, 34, 43, 52, 61\}$   
vagy: a dobott számok összege legfeljebb 3, azaz  $\{11, 12, 21\}$

További példák:

- eseménytér: magyar állampolgárok; esemény: érettségivel rendelkezők
- eseménytér: magyar férfiak; esemény: 50 évesnél idősebbek
- két érmedobásnál az eseménytér  $\{FF, FI, IF, II\}$ , esemény: különbözőt dobunk, azaz  $\{FI, IF\}$
- egy érmével addig dobunk, amíg fejet nem kapunk, ekkor az eseménytér:  $\{F, IF, IIF, IIIF, \dots, \text{minden dobás írás}\}$

# Jelölések és műveletek eseményekkel

- $\Omega$  az eseménytér, ez a biztos esemény
- $\emptyset$  (üres halmaz) esemény neve: lehetetlen esemény
- az események összessége, halmaza:  $\mathcal{A}$  (minden eleme  $\Omega$  egy részhalmaza)

# Jelölések és műveletek eseményekkel

- $\Omega$  az eseménytér, ez a biztos esemény
- $\emptyset$  (üres halmaz) esemény neve: lehetetlen esemény
- az események összessége, halmaza:  $\mathcal{A}$  (minden eleme  $\Omega$  egy részhalmaza)
- $A, B \in \mathcal{A}$  események **uniója** azon elemi események halmaza, melyek  $A$  és  $B$  közül legalább az egyikben benne vannak
- $A, B \in \mathcal{A}$  események **metsete** azon elemi események halmaza, melyek  $A$ -ban és  $B$ -ben is benne vannak
- $A \in \mathcal{A}$  és  $B \in \mathcal{A}$  **kizáró események**, ha  $A \cap B = \emptyset$ , azaz nincs olyan elemi esemény, mely  $A$ -ban és  $B$ -ben is benne van
- $A \in \mathcal{A}$  esemény **ellentettje/komplementere**:  $\bar{A} = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$ , azaz azokból az elemi eseményekből áll, melyek nincsenek  $A$ -ban

# Műveletek eseményekkel

## Tulajdonságok

- $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ , ahol  $A \setminus B$  azon elemi eseményekből áll, melyek benne vannak  $A$ -ben de nincsenek benne  $B$ -ben (ez  $A$  és  $B$  **különbsége**)
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$  (de Morgan-azonosság)
- $\overline{\overline{A}} = A$  és  $\overline{\Omega} = \emptyset$

Példa: egy kockával dobunk,  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

- $A$ : páros számot dobunk
- $B$ : legalább 3-ast dobunk
- $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$  az  $A$  és  $B$  uniója
- $A \cap B = \{4, 6\}$  az  $A$  és  $B$  metszete
- $A \setminus B = \{2\}$  az  $A$  és  $B$  különbsége
- $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$  az  $A$  ellentettje/komplementere

# A valószínűség axiomatikus felépítése

$\Omega$ : eseménytér (a lehetséges kimenetek összessége)

$\mathcal{A}$ : az események halmaza

$\mathbb{P}$ : **valószínűség**, amire az alábbiak teljesülnek:

- **eseményekhez rendel nemnegatív számokat**, azaz  $A \in \mathcal{A}$  esetén  $\mathbb{P}(A) \geq 0$
- **additív**: ha  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$  események, és bármely kettő metszete üres, akkor

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) + \dots$$

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ , azaz a biztos esemény valószínűsége 1

Az  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  hármast **valószínűségi mezőnek** nevezzük.

## Véges valószínűségi mező

Tegyük fel, hogy véges sok lehetséges kimenetel van, vagyis  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ , továbbá  $\mathcal{A}$  az  $\Omega$  összes részhalmazából áll.

Jelölés:  $p_j = \mathbb{P}(\omega_j)$  a  $j$ . kimenetel valószínűsége. Ekkor az additivitás miatt

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = p_1 + p_2 + \dots + p_n = \sum_{j=1}^n p_j,$$

vagyis az elemi események valószínűségének összege 1. Továbbá

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{j:\omega_j \in A} p_j\right) = \sum_{j:\omega_j \in A} p_j,$$

ami azt jelenti, hogy minden esemény valószínűsége a benne lévő elemi események valószínűségének összege.

## Klasszikus valószínűségi mező

Legyen  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  véges valószínűségi mező (azaz  $\mathcal{A}$  az  $\Omega$  összes részhalmazából áll), melyre a fenti feltételeken kívül az is teljesül, hogy minden elemi esemény egyformán valószínű, azaz

$$\mathbb{P}(\omega_j) = p_j = \frac{1}{n} \quad \text{minden } j = 1, 2, \dots, n\text{-re.}$$

Ekkor  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ -t **klasszikus valószínűségi mezőnek** nevezzük. Ilyenkor tetszőleges  $A \in \mathcal{A}$  eseményre

$$\mathbb{P}(A) = \frac{k}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n},$$

ahol  $k$  az  $A$  elemeinek száma,  $n$  pedig az összes elemi esemény (lehetőség) száma.

## Klasszikus valószínűségi mező

Legyen  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  véges valószínűségi mező (azaz  $\mathcal{A}$  az  $\Omega$  összes részhalmazából áll), melyre a fenti feltételeken kívül az is teljesül, hogy minden elemi esemény egyformán valószínű, azaz

$$\mathbb{P}(\omega_j) = p_j = \frac{1}{n} \quad \text{minden } j = 1, 2, \dots, n\text{-re.}$$

Ekkor  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ -t **klasszikus valószínűségi mezőnek** nevezzük. Ilyenkor tetszőleges  $A \in \mathcal{A}$  eseményre

$$\mathbb{P}(A) = \frac{k}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n},$$

ahol  $k$  az  $A$  elemeinek száma,  $n$  pedig az összes elemi esemény (lehetőség) száma.

**Példa:** kétszer dobunk egy szabályos kockával,  $A$ : az összeg 7. Ekkor  $k = 6$  és  $n = 36$  alapján  $\mathbb{P}(A) = 1/6 = 1/36 + 1/36 + 1/36 + 1/36 + 1/36 + 1/36$ .

## Leszámlálások és jelölések

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1; \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 2 \cdot 1}.$$

- $n$  tárgyat  $n!$ -féleképpen lehet sorrendbe tenni.
- $n$  tárgy közül  $k$  darabot visszatevés nélkül  $n(n-1)\dots(n-k+1)$ -féleképpen lehet húzni, ha figyelembe vesszük a sorrendet: az első  $n$ -féle, a második  $n-1$ -féle lehet (akármi volt az első), a harmadik  $n-2$ -féle lehet (akármi volt az első kettő), és így tovább
- $n$  tárgy közül egy  $k$  darabból álló csoportot  $\binom{n}{k}$ -féleképpen lehet kiválasztani (itt a kiválasztás sorrendje nem számít)
- ha  $n$  egymás utáni kísérlet mindegyikénél  $k$  lehetőség van, akkor az összes lehetőség száma a sorrendet is figyelembe véve

$$n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^k.$$

Például egy kockadobás hatféle lehet, kettő 36-féle, három  $6 \cdot 6 \cdot 6$ -féle,  $n$  kockadobás  $6^n$ -féle.

## Házi feladat szeptember 18-ig

- a) Háromszor feldobunk egy szabályos dobókockát. Mennyi a valószínűsége, hogy 0 hatos lesz? Annak, hogy 1? Annak, hogy 2? És annak, hogy három?
- b) Ismételjük meg hússzor az alábbi kísérletet: feldobunk egy dobókockát háromszor, és megszámloljuk, hogy hány hatos lett. Legyen  $A_j$  az az esemény, hogy  $j$  darab hatost dobtunk ( $j = 0, 1, 2, 3$ ). Készítsünk hisztogramot, melyen az  $A_j$  események relatív gyakoriságát (vagyis bekövetkezésének arányát a húsz kísérletből) ábrázoljuk. Mennyi a legnagyobb eltérés  $A_j$  relatív gyakorisága és  $\mathbb{P}(A_j)$  között?