

## Hipotézisvizsgálat (8. előadás)

Legyen  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  paraméteres statisztikai mező, azaz  $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$  valamilyen  $\Theta$  paraméterterrel. A paraméterteret bontsuk fel két diszjunkt halmaz uniójára:  $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$ , ahol tehát  $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$ .

**Nullhipotézis.**  $H_0 : \vartheta \in \Theta_0$ .

**Ellenhipotézis.**  $H_1 : \vartheta \in \Theta_1$ .

## Hipotézisvizsgálat (8. előadás)

Legyen  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  paraméteres statisztikai mező, azaz  $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$  valamilyen  $\Theta$  paraméterterrel. A paraméterteret bontsuk fel két diszjunkt halmaz uniójára:  $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$ , ahol tehát  $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$ .

**Nullhipotézis.**  $H_0 : \vartheta \in \Theta_0$ .

**Ellenhipotézis.**  $H_1 : \vartheta \in \Theta_1$ .

A minta  $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ , a mintatér legyen  $B$  (vagyis  $(X_1, \dots, X_n)$  a  $B \subseteq \mathbb{R}^n$  halmaz egy véletlen eleme). A mintatérrel is felbontjuk két diszjunkt halmaz uniójára:  $B = B_0 \cup B_1$ , ahol  $B_0 \cap B_1 = \emptyset$ .

**Elfogadási tartomány:**  $B_0$ . Ha  $(X_1, \dots, X_n) \in B_0$ , akkor  $H_0$ -t elfogadjuk.

**Elutasítási (kritikus) tartomány:**  $B_1$ . Ha  $(X_1, \dots, X_n) \in B_1$ , akkor  $H_0$ -t elutasítjuk.

Tehát a nullhipotézist akkor fogadjuk el, ha a minta az elfogadási tartományba esik, különben elutasítjuk.

# Hipotézisvizsgálat

**Nullhipotézis (null hypothesis).**  $H_0 : \vartheta \in \Theta_0$ .

**Ellenhipotézis (alternative hypothesis).**  $H_1 : \vartheta \in \Theta_1$ .

- **Elsőfajú hibát** vétünk, ha  $H_0$  igaz, és elutasítjuk.
- A próba **szignifikanciaszintje vagy terjedelme** (level of significance):

$$\alpha = \sup_{\vartheta \in \Theta_0} \mathbb{P}_{\vartheta}(\underline{X} \in B_1).$$

- **Másodfajú hibát** vétünk, ha  $H_0$  nem igaz, és elfogadjuk.
- A próba **erőfüggvénye** az alábbi  $\beta : \Theta_1 \rightarrow [0, 1]$  függvény:

$$\beta(\vartheta) = \mathbb{P}_{\vartheta}(\underline{X} \in B_1) \quad (\vartheta \in \Theta_1).$$

# Hipotézisvizsgálat: $p$ -érték

## Definíció

Egy hipotézisvizsgálati feladatban a  $p$ -érték ( $p$ -value) a legnagyobb olyan szignifikanciaszint, ami mellett  $H_0$ -t elfogadjuk.

Vagyis ha  $\alpha$  a szignifikanciaszint, akkor

$p < \alpha$  esetén elutasítjuk  $H_0$ -t, szignifikáns eltérés  $H_0$ -tól.

$p \geq \alpha$  esetén elfogadjuk  $H_0$ -t, nincs szignifikáns eltérés  $H_0$ -tól, nem volt elég bizonyíték  $H_1$ -re.

A szokásos  $\alpha = 0,05$  értékkel:  $p < 0,05$  esetén **elutasítjuk a nullhipotézist, szignifikáns eltérés van**, különben elfogadjuk a nullhipotézist, nincs szignifikáns eltérés.

**Nagy mintaelemszám esetén kis eltérés is szignifikáns.** A próba ereje használható annak ellenőrzésére, hogy nem volt-e túl érzékeny az eljárás.

# Próbák tulajdonságai

- A próba **szignifikanciaszintje vagy terjedelme** (level of significance) az elsőfajú hiba valószínűségének szupréma:

$$\alpha = \sup_{\vartheta \in \Theta_0} \mathbb{P}_{\vartheta}(\underline{X} \in B_1).$$

- A próba **erőfüggvénye** az alábbi  $\beta : \Theta_1 \rightarrow [0, 1]$  függvény:

$$\beta(\vartheta) = \mathbb{P}_{\vartheta}(\underline{X} \in B_1) \quad (\vartheta \in \Theta_1).$$

- Azonos terjedelmű próbák közül az az **erősebb**, amelynek az erőfüggvénye minden  $\vartheta \in \Theta_1$ -re nagyobb vagy egyenlő, mint a másiké:

$$\beta^*(\vartheta) = \mathbb{P}_{\vartheta}(\underline{X} \in B_1^*) \geq \beta(\vartheta) = \mathbb{P}_{\vartheta}(\underline{X} \in B_1) \quad (\vartheta \in \Theta_1).$$

- Egy próbából álló sorozat **konzisztens**, ha az erőfüggvénye 1-hez tart minden  $\vartheta \in \Theta_1$ -re.
- Egy próba **torzítatlan**, ha

$$\mathbb{P}_{\vartheta_0}(\underline{X} \in B_1) \leq \mathbb{P}_{\vartheta_1}(\underline{X} \in B_1)$$

minden  $\vartheta_0 \in \Theta_0$ -ra és  $\vartheta_1 \in \Theta_1$ -re.

## Neyman–Pearson-lemma

Tegyük fel, hogy a paraméterter két elemből áll:  $\Theta = \{\vartheta_0, \vartheta_1\}$ . A likelihood-függvények:  $L_{n,0}$  illetve  $L_{n,1}$ .

Likelihood-hányados próba: válasszunk egy  $c$  számot. Ha

$$\frac{L_{n,1}(X_1, \dots, X_n)}{L_{n,0}(X_1, \dots, X_n)} \geq c$$

akkor utasítsuk el a nullhipotézist, különben fogadjuk el.

### Lemma (Neyman–Pearson-lemma, 1. rész)

*Tegyük fel, hogy a likelihood-hányados próba szignifikanciaszintje  $\alpha$ . Ekkor a likelihood-hányados próba a legerősebb próba a legfeljebb  $\alpha$  szignifikanciaszintű próbák között.*

Például:  $\vartheta_0$  esetén indikátor eloszlás 0, 2 paraméterrel,  $\vartheta_1$  esetén indikátor eloszlás 0, 9 paraméterrel. Ha 10 megfigyelésből  $k$ -nál következik be az esemény:

## Neyman–Pearson-lemma

Tegyük fel, hogy a paraméterter két elemből áll:  $\Theta = \{\vartheta_0, \vartheta_1\}$ . A likelihood-függvények:  $L_{n,0}$  illetve  $L_{n,1}$ .

Likelihood-hányados próba: válasszunk egy  $c$  számot. Ha

$$\frac{L_{n,1}(X_1, \dots, X_n)}{L_{n,0}(X_1, \dots, X_n)} \geq c$$

akkor utasítsuk el a nullhipotézist, különben fogadjuk el.

### Lemma (Neyman–Pearson-lemma, 1. rész)

*Tegyük fel, hogy a likelihood-hányados próba szignifikanciaszintje  $\alpha$ . Ekkor a likelihood-hányados próba a legerősebb próba a legfeljebb  $\alpha$  szignifikanciaszintű próbák között.*

Például:  $\vartheta_0$  esetén indikátor eloszlás 0,2 paraméterrel,  $\vartheta_1$  esetén indikátor eloszlás 0,9 paraméterrel. Ha 10 megfigyelésből  $k$ -nál következik be az esemény:

$$\frac{L_{n,1}(X_1, \dots, X_n)}{L_{n,0}(X_1, \dots, X_n)} = \frac{\binom{10}{k} 0,9^k 0,1^{n-k}}{\binom{10}{k} 0,2^k 0,8^{n-k}} = \left(\frac{0,9}{0,2}\right)^k \left(\frac{0,1}{0,8}\right)^{n-k}.$$

Ez annál nagyobb, minél nagyobb  $k$ . Elutasítjuk  $H_0$ -t, ha  $k \geq k_0$  megfelelő  $k_0$ -al.

## Neyman–Pearson-lemma

Például:  $\vartheta_0$  esetén indikátor eloszlás 0,2 paraméterrel,  $\vartheta_1$  esetén indikátor eloszlás 0,9 paraméterrel. Legyen  $X$  az, hogy 10 megfigyelésből hányszor következik be az esemény. A Neyman–Pearson-lemma szerint akkor utasítjuk el  $H_0$ -t, ha  $X \geq k_0$  megfelelő  $k_0$ -lal. Mennyi  $\alpha$ , ha  $k_0 = 5$ ?

## Neyman–Pearson-lemma

Például:  $\vartheta_0$  esetén indikátor eloszlás 0,2 paraméterrel,  $\vartheta_1$  esetén indikátor eloszlás 0,9 paraméterrel. Legyen  $X$  az, hogy 10 megfigyelésből hányszor következik be az esemény. A Neyman–Pearson-lemma szerint akkor utasítjuk el  $H_0$ -t, ha  $X \geq k_0$  megfelelő  $k_0$ -lal. Mennyi  $\alpha$ , ha  $k_0 = 5$ ?

Ha  $k_0 = 5$ : az elsőfajú hiba valószínűsége még megfelelő:

$$\mathbb{P}_0(X \geq 5) = \sum_{j=5}^{10} \binom{10}{j} 0,2^j 0,8^{10-j} = 0,033 \leq 0,05.$$

Ha  $k_0 = 4$ : az elsőfajú hiba valószínűsége túl nagy:

$$\mathbb{P}_0(X \geq 4) = \sum_{j=4}^{10} \binom{10}{j} 0,2^j 0,8^{10-j} = 0,12 > 0,05.$$

## Neyman–Pearson-lemma

Például:  $\vartheta_0$  esetén indikátor eloszlás 0,2 paraméterrel,  $\vartheta_1$  esetén indikátor eloszlás 0,9 paraméterrel. Legyen  $X$  az, hogy 10 megfigyelésből hányszor következik be az esemény. A Neyman–Pearson-lemma szerint akkor utasítjuk el  $H_0$ -t, ha  $X \geq k_0$  megfelelő  $k_0$ -lal. Mennyi  $\alpha$ , ha  $k_0 = 5$ ?

Ha  $k_0 = 5$ : az elsőfajú hiba valószínűsége még megfelelő:

$$\mathbb{P}_0(X \geq 5) = \sum_{j=5}^{10} \binom{10}{j} 0,2^j 0,8^{10-j} = 0,033 \leq 0,05.$$

Ha  $k_0 = 4$ : az elsőfajú hiba valószínűsége túl nagy:

$$\mathbb{P}_0(X \geq 4) = \sum_{j=4}^{10} \binom{10}{j} 0,2^j 0,8^{10-j} = 0,12 > 0,05.$$

Pontosan  $\alpha = 0,05$  terjedelem:  $X \geq 5$  esetén biztosan,  $X = 4$  esetén 19% valószínűséggel utasítjuk el a nullhipotézist ( $0,19 \cdot \mathbb{P}_0(X = 4) = 0,05 - 0,03$ ). Ez legerősebb próba a legfeljebb  $\alpha = 0,05$  szignifikanciaszintű próbák között, és erősebb, mint a  $k_0 = 5$ -tel kapott determinisztikus próbáé.

## Véletlenített próba

Tegyük fel, hogy a paraméterter két elemből áll:  $\Theta = \{\vartheta_0, \vartheta_1\}$ . A likelihood-függvények:  $L_{n,0}$  illetve  $L_{n,1}$ .

Likelihood-hányados próba: válasszunk egy  $c$  számot. Ha

$$\frac{L_{n,1}(X_1, \dots, X_n)}{L_{n,0}(X_1, \dots, X_n)} > c$$

akkor utasítsuk el a nullhipotézist. Ha a hányados egyenlő  $c$ -vel, akkor  $p$  valószínűséggel utasítsuk el, és  $1 - p$  valószínűséggel fogadjuk el. Ha kisebb  $c$ -nél, fogadjuk el a nullhipotézist.

### Lemma (Neyman–Pearson-lemma, 2. rész)

*Legyen  $\alpha \in (0, 1)$  tetszőleges. Ekkor lehet olyan  $c$  és  $p$  számokat választani, hogy a likelihood-hányados próba a szignifikanciaszintje éppen  $\alpha$ , és így ez a legerősebb próba a legfeljebb  $\alpha$  szignifikanciaszintű próbák között.*

# Szekvenciális próbák

A valószínűséghányados  $n$  elemű mintából:

$$V_n = \frac{L_{n,1}(X_1, \dots, X_n)}{L_{n,0}(X_1, \dots, X_n)} = \frac{\prod_{j=1}^n f_1(X_j)}{\prod_{j=1}^n f_0(X_j)},$$

ha az eloszlás abszolút folytonos.

$A, B$  rögzített, a próbára jellemző számok. Addig veszünk mintaelemeket, amíg  $V_n \geq B$  vagy  $V_n \leq A$  nem teljesül. Vagyis:

- ha  $V_n \geq B$ , elutasítjuk  $H_0$ -t;
- ha  $V_n \leq A$ , elfogadjuk  $H_0$ -t;
- ha  $A < V_n < B$ : új mintaelemet veszünk.

Kétlépcsős változat:  $n_1$  elemű mintát veszünk. Ha  $V_{n_1} \geq B$ , elutasítjuk  $H_0$ -t, ha  $V_{n_1} \leq A$ , elfogadjuk  $H_0$ -t, különben további  $n_2$  darab mintaelemet veszünk, és akkor utasítjuk el a nullhipotézist, ha  $V_{n_1+n_2} > C$  teljesül.

## Neyman–Pearson-lemma

Példa: legyen  $\Theta = \{m_0, m_1\}$ , és  $\mathcal{P}$  álljon az  $N(m_0, \sigma)$  és  $N(m_1, \sigma)$  eloszlásokból. A likelihood-hányados:

$$\begin{aligned}\frac{L_{n,1}(X_1, \dots, X_n)}{L_{n,0}(X_1, \dots, X_n)} &= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\right)^n \prod_{j=1}^n \exp(-(X_j - m_1)^2/(2\sigma^2))}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\right)^n \prod_{j=1}^n \exp(-(X_j - m_0)^2/(2\sigma^2))} = \\ &= \exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^n (X_j - m_1)^2}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{j=1}^n (X_j - m_0)^2}{2\sigma^2}\right) = \\ &= \exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^n (X_j^2 - 2m_1X_j + m_1^2)}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{j=1}^n (X_j^2 - 2m_0X_j + m_0^2)}{2\sigma^2}\right) = \\ &= \exp\left(\frac{2(m_1 - m_0) \sum_{j=1}^n X_j + (m_0^2 - m_1^2)n}{2\sigma^2}\right).\end{aligned}$$

Ha  $m_1 > m_0$ : akkor utasítjuk el a nullhipotézist, ha  $\frac{L_{n,1}}{L_{n,0}}$  nagyobb egy  $c$  kritikus értéknél, vagyis ha  $\sum_{j=1}^n X_j$  nagyobb egy  $c'$  kritikus értéknél. Ezért a lesz a z-próba legerősebb próba: ez is ilyen alakú.

## Egymintás egyoldali $z$ -próba (one-sample one-sided $z$ test)

A próba a normális eloszlás várható értékére vonatkozik ismert szórás mellett. Torzítatlan, konzisztens, **legerősebb próba** egyoldali esetben (a Neyman–Pearson-lemma alapján bizonyítható).

- $X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(m, \sigma^2)$ , ahol  $m$  ismeretlen paraméter,  $\sigma > 0$  ismert.
- Próbastatisztika (eloszlása standard normális  $H_0$  mellett, ezt beláttuk):

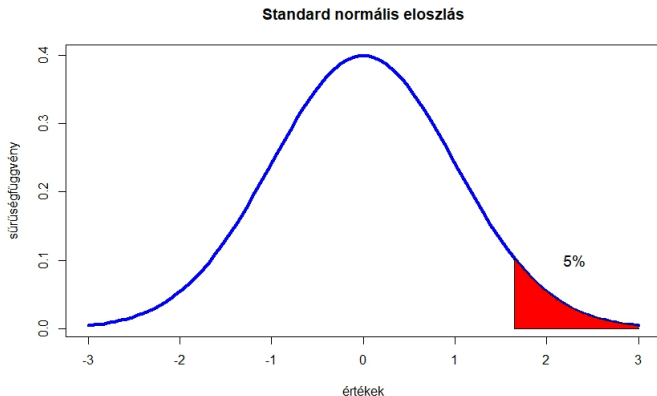
$$z = \frac{\bar{X} - m_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n}.$$

- **Egyoldali ellenhipotézis** (one-sided):  $H_0 : m \leq m_0$ ;  $H_1 : m > m_0$ .
- Ha  $z > \Phi^{-1}(1 - \alpha)$ , akkor elvetjük a nullhipotézist, különben elfogadjuk.
- A  $p$ -érték ilyenkor  $1 - \Phi(z)$ .

$p < 0,05$ : a várható érték szignifikánsan több  $m_0$ -nál.

$p \geq 0,05$ : a várható érték nem több szignifikánsan  $m_0$ -nál.

# Az egyoldali z-próba kritikus értéke



Az  $\alpha = 0,05$  szignifikanciaszintű egyoldali z-próba kritikus értéke:  
 $\Phi^{-1}(1 - \alpha) = \Phi^{-1}(0,95) = 1,645$ .