

Konfidenciaintervallum (7. előadás)

Példa: megmérték hatvan ember vércukorszintjét, egymástól függetlenül.

A minta egy részlete (mmol/l mértékegységben):

5,98 6,1 5,99 6,21 5,97 6,23 ... 5,85

Alapstatisztikák: $n = 60$ (méret), $\bar{X} = 5,99$ (átlag), $s_n^* = 0,18$ (korrigált tapasztalati szórás)

Konfidenciaintervallum (7. előadás)

Példa: megmérték hatvan ember vércukorszintjét, egymástól függetlenül.

A minta egy részlete (mmol/l mértékegységben):

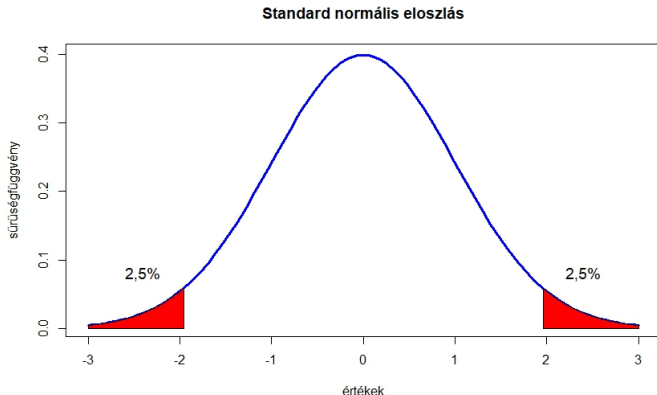
5,98 6,1 5,99 6,21 5,97 6,23 ... 5,85

Alapstatisztikák: $n = 60$ (méret), $\bar{X} = 5,99$ (átlag), $s_n^* = 0,18$ (korrigált tapasztalati szórás)

Cél: a várható érték becslése az adatok alapján

pontosabban: adjunk meg egy olyan intervallumot, ami legalább 95% valószínűséggel tartalmazza az "igazi" várható értéket – ezt fogjuk **95 % megbízhatósági szintű konfidenciaintervallumnak** hívni

A kétoldali z-próba kritikus értéke



Az $\alpha = 0,05$ terjedelmű kétoldali z-próba (u -próba) kritikus értéke:
 $\Phi^{-1}(1 - \alpha/2) = \Phi^{-1}(0,975) = 1,96$. Vagyis ha $Z \sim N(0, 1)$, akkor
 $\mathbb{P}(-1,96 \leq Z \leq 1,96) = 95\%$.

Konfidenciaintervallum a várható értékre

$$(T_1, T_2) = \left(\bar{X} - \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_m(T_1 \leq m \leq T_2) &= \mathbb{P}_m\left(m - \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} \leq m + \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \mathbb{P}_m\left(-\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \leq \frac{\bar{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right) = \\ &= 2\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) - 1 = 1 - \alpha, \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy mivel X_1, \dots, X_n független $N(m, \sigma^2)$ eloszlásúak, így $\bar{X} \sim N(m, \sigma^2/n)$ eloszlású. Ezért $Z = (\bar{X} - m)/(\sigma/\sqrt{n})$ standard normális eloszlású, vagyis

$$\mathbb{P}(-a \leq Z \leq a) = \Phi(a) - \Phi(-a) = \Phi(a) - (1 - \Phi(a)) = 2\Phi(a) - 1.$$

Példa konfidenciaintervallumra

Minta: megmértük hatvan ember vércukorszintjét, tegyük fel, hogy ez **normális eloszlású, valódi szórása 0,2**.

$n = 60$ (méret), $\bar{X} = 5,99$ (átlag), $s_n^* = 0,18$ (korrigált tapasztalati szórás)

Adjunk meg olyan intervallumot, ami legalább 95% valószínűséggel tartalmazza a vércukorszint valódi várható értékét.

megbízhatósági szint: $1 - \alpha = 95\%$, azaz $\alpha = 0,05$. Ebből $\Phi^{-1}(1 - \alpha/2) = \Phi^{-1}(0,975) = 1,96$.

95 %-os megbízhatósági szintű konfidenciaintervallum a várható értékre:

$$\left(5,99 - 1,96 \cdot \frac{0,2}{\sqrt{60}}, 5,99 + 1,96 \cdot \frac{0,2}{\sqrt{60}} \right) = (5,94; 6,04).$$

Kisebb mintaelemszámhoz hosszabb, nagyobb megbízhatósághoz szintén hosszabb konfidenciaintervallum tartozik.

Konfidenciaintervallumok

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ statisztikai mező, $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$ és $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ független azonos eloszlású minta. Tegyük fel, hogy ϑ valós paraméter, vagyis $\Theta \subseteq \mathbb{R}$.

Definíció

Azt mondjuk, hogy a $(T_1(\underline{X}), T_2(\underline{X}))$ intervallum legalább $1 - \alpha$ megbízhatósági szintű konfidenciaintervallum ϑ -ra, ha minden $\vartheta \in \mathbb{R}$ esetén teljesül, hogy

$$\mathbb{P}_\vartheta(T_1(\underline{X}) < \vartheta < T_2(\underline{X})) \geq 1 - \alpha.$$

A konfidenciaintervallum megbízhatósági szintje: $\inf_{\vartheta \in \Theta} \{\mathbb{P}_\vartheta(\vartheta \in (T_1, T_2))\}$.

Konfidenciaintervallum a várható értékre

A Φ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye, azaz ha $Z \sim N(0, 1)$:

$$\Phi(t) = \mathbb{P}(Z \leq t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-s^2/2} ds.$$

Állítás (Konfidenciaintervallum a várható értékre, **ismert szórás**)

Tegyük fel, hogy X_1, \dots, X_n független azonos eloszlású **normális eloszlású** valószínűségi változók, melyek szórása, σ ismert.

Ekkor a

$$(T_1, T_2) = \left(\bar{X} - \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

intervallum $1 - \alpha$ megbízhatósági szintű **kétoldali konfidenciaintervallum** az eloszlás várható értékére.

Fisher–Bartlett-tétel

Valójában az eloszlás valódi szórása a legtöbb esetben nem ismert. A σ szórást az s_n^* korrigált tapasztalati szórással helyettesítjük. Kérdés, hogyan változik így az eloszlás.

Tétel (Fisher–Bartlett)

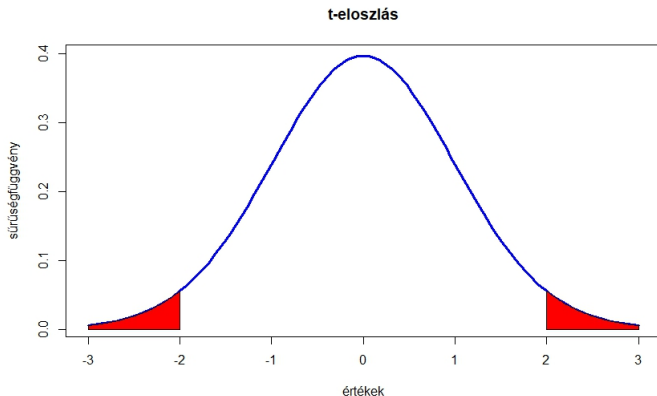
Tegyük fel, hogy X_1, X_2, \dots, X_n független m várható értékű, σ szórású, **normális eloszlású** valószínűségi változók. Ekkor

- 1 $\bar{X} \sim N(m, \frac{\sigma^2}{n})$;
- 2 \bar{X} és s_n^* függetlenek;
- 3 $(n-1)s_n^{*2}/\sigma^2$ eloszlása $n-1$ szabadsági fokú χ^2 -eloszlás;
- 4 $\frac{\bar{X}-m}{s_n^*} \cdot \sqrt{n}$ eloszlása $n-1$ szabadsági fokú t -eloszlás.

Itt

$$s_n^* = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2} = \sqrt{\frac{n}{n-1} \left(\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^2 \right) - \bar{X}^2 \right)}.$$

t -eloszlás kritikus értékei



Az $f = 59$ szabadsági fokú $\alpha = 0,05$ terjedelmű kétoldali t -próba kritikus értéke:
 $t_{59,0,05} = 2,001$.

Konfidenciaintervallum a várható értékre

Legyenek Z_0, Z_1, \dots, Z_n független $N(0, 1)$ eloszlásúak, és $t_{f, \alpha}$ az f szabadsági fokú α terjedelmű kétoldali t -próba kritikus értéke, azaz az f szabadsági fokú t -eloszlás $1 - \alpha/2$ -kvantilise:

$$1 - \alpha/2 = \mathbb{P}(Y \leq t_{f, \alpha}) = \mathbb{P}\left(\frac{Z_0}{\sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_f^2}} \leq t_{f, \alpha}\right).$$

Az $Y = \frac{Z_0}{\sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_f^2}}$ valószínűségi változó eloszlása f szabadsági fokú **t -eloszlás**.

Konfidenciaintervallum a várható értékre

Legyenek Z_0, Z_1, \dots, Z_n független $N(0, 1)$ eloszlásúak, és $t_{f, \alpha}$ az f szabadsági fokú α terjedelmű kétoldali t -próba kritikus értéke, azaz az f szabadsági fokú t -eloszlás $1 - \alpha/2$ -kvantilise:

$$1 - \alpha/2 = \mathbb{P}(Y \leq t_{f, \alpha}) = \mathbb{P}\left(\frac{Z_0}{\sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_f^2}} \leq t_{f, \alpha}\right).$$

Az $Y = \frac{Z_0}{\sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_f^2}}$ valószínűségi változó eloszlása f szabadsági fokú **t -eloszlás**.

Állítás (Konfidenciaintervallum a várható értékre, ismeretlen szórás)

Tegyük fel, hogy X_1, \dots, X_n független $N(m, \sigma^2)$ normális eloszlású valószínűségi változók (m, σ ismeretlenek). Ekkor a

$$(T_1, T_2) = \left(\bar{X} - t_{n-1, \alpha} \cdot \frac{s_n^*}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{n-1, \alpha} \cdot \frac{s_n^*}{\sqrt{n}} \right)$$

intervallum $1 - \alpha$ megbízhatósági szintű **kétoldali konfidenciaintervallum** az eloszlás várható értékére.

Példa konfidenciaintervallumra

Minta: vércukorszint-értékek, tegyük fel, hogy ez **normális eloszlású**, szórása nem ismert.

$n = 60$ (méret), $\bar{X} = 5,99$ (átlag), $s_n^* = 0,18$ (korigált tapasztalati szórás)

Adjunk meg olyan intervallumot, ami legalább 95% valószínűséggel tartalmazza a vércukorszint valódi várható értékét.

megbízhatósági szint: $1 - \alpha = 95\%$, azaz $\alpha = 0,05$. Az $f = 59$ szabadsági fokú $\alpha = 0,05$ terjedelmű kétoldali t -próba kritikus értéke: $t_{59,0,975} = 2$.

95 %-os megbízhatósági szintű konfidenciaintervallum a várható értékre:

$$\left(5,99 - 2 \cdot \frac{0,18}{\sqrt{60}}, 5,99 + 2 \cdot \frac{0,18}{\sqrt{60}} \right) = (5,94; 6,04).$$

Hosszabb intervallumot kaptunk, mint ismert szórás esetén.

Egyoldali konfidenciaintervallum a várható értékre

Állítás (Egyoldali konfidenciaintervallum)

Tegyük fel, hogy X_1, \dots, X_f független $N(m, \sigma^2)$ normális eloszlású valószínűségi változók (m, σ ismeretlenek). Ekkor a

$$\left(-\infty, \bar{X} + \bar{t}_{n-1, 1-\alpha} \cdot \frac{s_n^*}{\sqrt{n}} \right)$$

intervallum $1 - \alpha$ megbízhatósági szintű **egyoldali konfidenciaintervallum** az eloszlás várható értékére.

Itt $\bar{t}_{n-1, 1-\alpha/2}$ az $f = n - 1$ szabadsági fokú α terjedelmű **egyoldali t -próba** kritikus értéke.

Konfidenciaintervallum a szórásra

Fisher–Bartlett-tétel:

$$\frac{(n-1)s_n^{*2}}{\sigma^2} = \frac{\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2,$$

azaz a hányados eloszlása $n-1$ szabadsági fokú χ^2 -eloszlás (ami megegyezik $Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_{n-1}^2$ eloszlásával, ahol Z_j -k független standard normális eloszlásúak).

Állítás

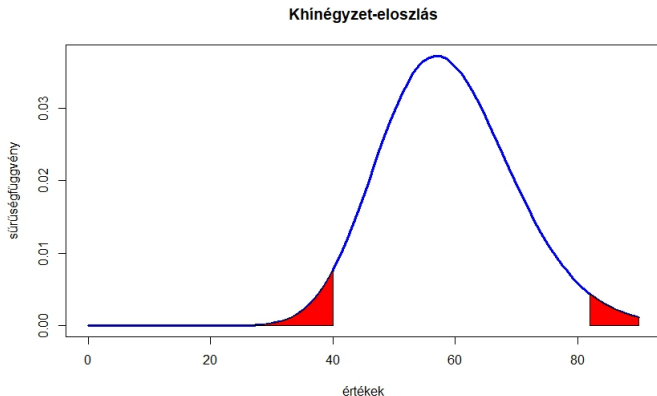
Legyen X_1, X_2, \dots, X_n független normális eloszlású minta. Ekkor az eloszlás σ^2 szórásnégyzetére $1 - \alpha$ megbízhatósági szintű konfidenciaintervallum az alábbi:

$$(T_1, T_2) = \left(\frac{\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2}{c_{n-1, 1-\alpha/2}}; \frac{\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2}{c_{n-1, \alpha/2}} \right),$$

ahol $c_{f,q}$ az f -szabadsági fokú q terjedelmű χ^2 -próba kritikus értéke, azaz az f szabadsági fokú χ^2 -eloszlás q -kvantilise.

Ezzel a választással nem a legrövidebb intervallumot kapjuk.

A χ^2 -eloszlás kvantilisei



Az $f = 59$ szabadsági fokú χ^2 -próba kvantilisei $q = \alpha/2 = 0,025$ -tel és $q = 1 - \alpha/2 = 0,975$ -tel.

Konfidenciaintervallum a valószínűségre

Az A esemény valószínűsége $p \in [0, 1]$ ismeretlen paraméter. Ezt szeretnénk megbecsülni. Ha n kísérletből az A esemény X -szer következett be:

$$\mathbb{E}_p(X) = np; \quad D_p(X) = \sqrt{np(1-p)}; \quad \mathbb{E}_p\left(\frac{X}{n}\right) = p; \quad D_p\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}.$$

$X \sim \text{Bin}(n, p)$ binomiális eloszlású, viszont a relatív gyakoriságot, X/n -t nem tudjuk egyetlen eloszlással közelíteni.

Viszont a centrális határeloszlástétel alapján X/n eloszlását \hat{p} várható értékű, $\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{\sqrt{n}}$ szórású normális eloszlással közelíthetjük, ahol \hat{p} az esemény relatív gyakorisága a mintában.

$1 - \alpha$ megbízhatósági szintű konfidenciaintervallum p -re:

$$\left(\hat{p} - \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}}; \hat{p} + \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}} \right).$$

Konfidenciaintervallum az ML-becslés alapján

Ha likelihoodfüggvény teljesít bizonyos regularitási feltételeket, akkor a ϑ paraméternek az X_1, X_2, \dots, X_n mintából számolt $\hat{\vartheta}_n$ maximumlikelihood-becslése

- létezik;
- aszimptotikusan torzítatlan: $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\vartheta}(\hat{\vartheta}_n) = \vartheta$ minden $\vartheta \in \Theta$ -ra;
- aszimptotikusan hatásos: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{nl_1(\vartheta)} D_{\vartheta}(\hat{\vartheta}_n) = 1$ minden $\vartheta \in \Theta$ -ra;
- aszimptotikusan normális eloszlású: $\sqrt{nl_1(\vartheta)}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta)$ eloszlásban tart a standard normális eloszláshoz minden $\vartheta \in \Theta$ -ra $n \rightarrow \infty$ esetén.

Konfidenciaintervallum az ML-becslés alapján

Ha likelihoodfüggvény teljesít bizonyos regularitási feltételeket, akkor a ϑ paraméternek az X_1, X_2, \dots, X_n mintából számolt $\hat{\vartheta}_n$ maximumlikelihood-becslése

- létezik;
- aszimptotikusan torzítatlan: $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\vartheta}(\hat{\vartheta}_n) = \vartheta$ minden $\vartheta \in \Theta$ -ra;
- aszimptotikusan hatásos: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n I_1(\vartheta)} D_{\vartheta}(\hat{\vartheta}_n) = 1$ minden $\vartheta \in \Theta$ -ra;
- aszimptotikusan normális eloszlású: $\sqrt{n I_1(\vartheta)}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta)$ eloszlásban tart a standard normális eloszláshoz minden $\vartheta \in \Theta$ -ra $n \rightarrow \infty$ esetén.

Ez alapján **aszimptotikus** konfidenciaintervallum, ami $n \rightarrow \infty$ esetén $1 - \alpha$ -hoz tartó valószínűséggel tartalmazza ϑ -t:

$$\left(\hat{\vartheta}_n - \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\hat{I}_n(\vartheta)}}; \hat{\vartheta}_n + \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\hat{I}_n(\vartheta)}} \right),$$

ahol $\hat{I}_n(\vartheta) = n \cdot I_1(\hat{\vartheta}_n)$, vagyis a Fisher-információ kifejezésébe a maximumlikelihood-becslést írjuk be.

Hipotézisvizsgálat

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ paraméteres statisztikai mező, azaz $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$ valamilyen Θ paraméterterrel. A paraméterteret bontsuk fel két diszjunkt halmaz uniójára: $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$, ahol tehát $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$.

Nullhipotézis. $H_0 : \vartheta \in \Theta_0$.

Ellenhipotézis. $H_1 : \vartheta \in \Theta_1$.

Hipotézisvizsgálat

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ paraméteres statisztikai mező, azaz $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$ valamilyen Θ paraméterterrel. A paraméterteret bontsuk fel két diszjunkt halmaz uniójára: $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$, ahol tehát $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$.

Nullhipotézis. $H_0 : \vartheta \in \Theta_0$.

Ellenhipotézis. $H_1 : \vartheta \in \Theta_1$.

A minta $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$, a mintatér legyen B (vagyis (X_1, \dots, X_n) a $B \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz egy véletlen eleme). A mintatérrel is felbontjuk két diszjunkt halmaz uniójára: $B = B_0 \cup B_1$, ahol $B_0 \cap B_1 = \emptyset$.

Elfogadási tartomány: B_0 . Ha $(X_1, \dots, X_n) \in B_0$, akkor H_0 -t elfogadjuk.

Elutasítási (kritikus) tartomány: B_1 . Ha $(X_1, \dots, X_n) \in B_1$, akkor H_0 -t elutasítjuk.

Tehát a nullhipotézist akkor fogadjuk el, ha a minta az elfogadási tartományba esik, különben elutasítjuk.

Hipotézisvizsgálat

Nullhipotézis (null hypothesis). $H_0 : \vartheta \in \Theta_0$.

Ellenhipotézis (alternative hypothesis). $H_1 : \vartheta \in \Theta_1$.

- **Elsőfajú hibát** vétünk, ha H_0 igaz, és elutasítjuk.
- A próba **szignifikanciaszintje vagy terjedelme** (level of significance):

$$\alpha = \sup_{\vartheta \in \Theta_0} \mathbb{P}_{\vartheta}(\underline{X} \in B_1).$$

- **Másodfajú hibát** vétünk, ha H_0 nem igaz, és elfogadjuk.
- A próba **erőfüggvénye** az alábbi $\beta : \Theta_1 \rightarrow [0, 1]$ függvény:

$$\beta(\vartheta) = \mathbb{P}_{\vartheta}(\underline{X} \in B_1) \quad (\vartheta \in \Theta_1).$$

Hipotézisvizsgálat: p -érték

Definíció

Egy hipotézisvizsgálati feladatban a p -érték (p -value) a legnagyobb olyan szignifikanciaszint, ami mellett H_0 -t elfogadjuk.

Vagyis ha α a szignifikanciaszint, akkor

$p < \alpha$ esetén elutasítjuk H_0 -t, szignifikáns eltérés H_0 -tól.

$p \geq \alpha$ esetén elfogadjuk H_0 -t, nincs szignifikáns eltérés H_0 -tól, nem volt elég bizonyíték H_1 -re.

A szokásos $\alpha = 0,05$ értékkel: $p < 0,05$ esetén **elutasítjuk a nullhipotézist, szignifikáns eltérés van**, különben elfogadjuk a nullhipotézist, nincs szignifikáns eltérés.

Nagy mintaelemszám esetén kis eltérés is szignifikáns. A próba ereje használható annak ellenőrzésére, hogy nem volt-e túl érzékeny az eljárás.

Próbák tulajdonságai

- A próba **szignifikanciaszintje vagy terjedelme** (level of significance) az elsőfajú hiba valószínűségének szuprémuma:

$$\alpha = \sup_{\vartheta \in \Theta_0} \mathbb{P}_{\vartheta}(\underline{X} \in B_1).$$

- A próba **erőfüggvénye** az alábbi $\beta : \Theta_1 \rightarrow [0, 1]$ függvény:

$$\beta(\vartheta) = \mathbb{P}_{\vartheta}(\underline{X} \in B_1) \quad (\vartheta \in \Theta_1).$$

- Azonos terjedelmű próbák közül az az **erősebb**, amelynek az erőfüggvénye minden $\vartheta \in \Theta_1$ -re nagyobb vagy egyenlő, mint a másiké:

$$\beta^*(\vartheta) = \mathbb{P}_{\vartheta}(\underline{X} \in B_1^*) \geq \beta(\vartheta) = \mathbb{P}_{\vartheta}(\underline{X} \in B_1) \quad (\vartheta \in \Theta_1).$$

- Egy próbából álló sorozat **konzisztens**, ha az erőfüggvénye 1-hez tart minden $\vartheta \in \Theta_1$ -re.
- Egy próba **torzítatlan**, ha

$$\mathbb{P}_{\vartheta_0}(\underline{X} \in B_1) \leq \mathbb{P}_{\vartheta_1}(\underline{X} \in B_1)$$

minden $\vartheta_0 \in \Theta_0$ -ra és $\vartheta_1 \in \Theta_1$ -re.

Neyman–Pearson-lemma

Tegyük fel, hogy a paraméterter két elemből áll: $\Theta = \{\vartheta_0, \vartheta_1\}$. A likelihood-függvények: $L_{n,0}$ illetve $L_{n,1}$.

Likelihood-hányados próba: válasszunk egy c számot. Ha

$$\frac{L_{n,1}(X_1, \dots, X_n)}{L_{n,0}(X_1, \dots, X_n)} \geq c$$

akkor utasítsuk el a nullhipotézist, különben fogadjuk el.

Lemma (Neyman–Pearson-lemma, 1. rész)

Tegyük fel, hogy a likelihood-hányados próba szignifikanciaszintje α . Ekkor a likelihood-hányados próba a legerősebb próba a legfeljebb α szignifikanciaszintű próbák között.

Például: ϑ_0 esetén indikátor eloszlás 0,2 paraméterrel, ϑ_1 esetén indikátor eloszlás 0,9 paraméterrel. Ha 10 megfigyelésből k -nál következik be az esemény:

$$\frac{L_{n,1}(X_1, \dots, X_n)}{L_{n,0}(X_1, \dots, X_n)} = \frac{\binom{10}{k} 0,9^k 0,1^{n-k}}{\binom{10}{k} 0,2^k 0,8^{n-k}} = \left(\frac{0,9}{0,2}\right)^k \left(\frac{0,1}{0,8}\right)^{n-k}.$$

Ez annál nagyobb, minél nagyobb k . Elutasítjuk H_0 -t, ha $k \geq k_0$ megfelelő k_0 -al.

Neyman–Pearson-lemma

Például: ϑ_0 esetén indikátor eloszlás 0,2 paraméterrel, ϑ_1 esetén indikátor eloszlás 0,9 paraméterrel. Legyen X az, hogy 10 megfigyelésből hányszor következik be az esemény. A Neyman–Pearson-lemma szerint akkor utasítjuk el H_0 -t, ha $X \geq k_0$ megfelelő k_0 -al.

Ha $k_0 = 5$: az elsőfajú hiba valószínűsége még megfelelő:

$$\mathbb{P}_0(X \geq 5) = \sum_{j=5}^{10} \binom{10}{j} 0,2^j 0,8^{10-j} = 0,033 \leq 0,05.$$

Ha $k_0 = 4$: az elsőfajú hiba valószínűsége túl nagy:

$$\mathbb{P}_0(X \geq 4) = \sum_{j=4}^{10} \binom{10}{j} 0,2^j 0,8^{10-j} = 0,12 > 0,05.$$

Neyman–Pearson-lemma

Például: ϑ_0 esetén indikátor eloszlás 0,2 paraméterrel, ϑ_1 esetén indikátor eloszlás 0,9 paraméterrel. Legyen X az, hogy 10 megfigyelésből hányszor következik be az esemény. A Neyman–Pearson-lemma szerint akkor utasítjuk el H_0 -t, ha $X \geq k_0$ megfelelő k_0 -al.

Ha $k_0 = 5$: az elsőfajú hiba valószínűsége még megfelelő:

$$\mathbb{P}_0(X \geq 5) = \sum_{j=5}^{10} \binom{10}{j} 0,2^j 0,8^{10-j} = 0,033 \leq 0,05.$$

Ha $k_0 = 4$: az elsőfajú hiba valószínűsége túl nagy:

$$\mathbb{P}_0(X \geq 4) = \sum_{j=4}^{10} \binom{10}{j} 0,2^j 0,8^{10-j} = 0,12 > 0,05.$$

Pontosan $\alpha = 0,05$ terjedelem: $X \geq 5$ esetén biztosan, $X = 4$ esetén 19% valószínűséggel utasítjuk el a nullhipotézist ($0,19 \cdot \mathbb{P}_0(X = 4) = 0,05 - 0,03$). Ez legerősebb próba a legfeljebb $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszintű próbák között, és erősebb, mint a $k_0 = 5$ -tel kapott determinisztikus próbáé.

Véletlenített próba

Tegyük fel, hogy a paraméterter két elemből áll: $\Theta = \{\vartheta_0, \vartheta_1\}$. A likelihood-függvények: $L_{n,0}$ illetve $L_{n,1}$.

Likelihood-hányados próba: válasszunk egy c számot. Ha

$$\frac{L_{n,1}(X_1, \dots, X_n)}{L_{n,0}(X_1, \dots, X_n)} > c$$

akkor utasítsuk el a nullhipotézist. Ha a hányados egyenlő c -vel, akkor p valószínűséggel utasítsuk el, és $1 - p$ valószínűséggel fogadjuk el. Ha kisebb c -nél, fogadjuk el a nullhipotézist.

Lemma (Neyman–Pearson-lemma, 2. rész)

Legyen $\alpha \in (0, 1)$ tetszőleges. Ekkor lehet olyan c és p számokat választani, hogy a likelihood-hányados próba a szignifikanciaszintje éppen α , és így ez a legerősebb próba a legfeljebb α szignifikanciaszintű próbák között.

Neyman–Pearson-lemma

Példa: legyen $\Theta = \{m_0, m_1\}$, és \mathcal{P} álljon az $N(m_0, \sigma)$ és $N(m_1, \sigma)$ eloszlásokból. A likelihood-hányados:

$$\begin{aligned}\frac{L_{n,1}(X_1, \dots, X_n)}{L_{n,0}(X_1, \dots, X_n)} &= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\right)^n \prod_{j=1}^n \exp(-(X_j - m_1)^2/(2\sigma^2))}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\right)^n \prod_{j=1}^n \exp(-(X_j - m_0)^2/(2\sigma^2))} = \\ &= \exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^n (X_j - m_1)^2}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{j=1}^n (X_j - m_0)^2}{2\sigma^2}\right) = \\ &= \exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^n (X_j^2 - 2m_1X_j + m_1^2)}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{j=1}^n (X_j^2 - 2m_0X_j + m_0^2)}{2\sigma^2}\right) = \\ &= \exp\left(\frac{2(m_1 - m_0) \sum_{j=1}^n X_j + (m_0^2 - m_1^2)n}{2\sigma^2}\right).\end{aligned}$$

Ha $m_1 > m_0$: akkor utasítjuk el a nullhipotézist, ha $\frac{L_{n,1}}{L_{n,0}}$ nagyobb egy c kritikus értéknél, vagyis ha $\sum_{j=1}^n X_j$ nagyobb egy c' kritikus értéknél. Ezért a lesz a z-próba legerősebb próba: ez is ilyen alakú.