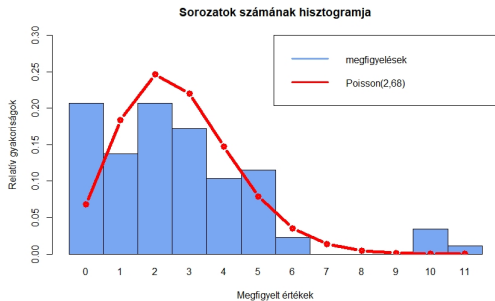


Poisson-eloszlás paraméterének becslése (6. előadás)



A sorozatok számának hisztogramja (az elmúlt egy hónapban) és Poisson-eloszlás $\hat{\lambda} = \bar{X} = 2,68$ becslt paraméterrel

$$n = 87, \sum_{j=1}^n X_j = 237, \text{ és } \bar{X} = 2,68$$

Maximumlikelihood-módszer

Definíció (Likelihood-függvény)

Ha az (Y_1, \dots, Y_n) független minta diszkrét (a lehetséges értékeinek száma véges vagy megszámlálható sok), akkor a likelihood-függvénye:

$$L_{n,\vartheta}(k_1, \dots, k_n) = \prod_{j=1}^n \mathbb{P}_{j,\vartheta}(Y_j = k_j) \quad ((k_1, \dots, k_n) \in H).$$

Maximumlikelihood-módszer

Definíció (Likelihood-függvény)

Ha az (Y_1, \dots, Y_n) független minta diszkrét (a lehetséges értékeinek száma véges vagy megszámlálható sok), akkor a likelihood-függvénye:

$$L_{n,\vartheta}(k_1, \dots, k_n) = \prod_{j=1}^n \mathbb{P}_{j,\vartheta}(Y_j = k_j) \quad ((k_1, \dots, k_n) \in H).$$

Ha az (Y_1, \dots, Y_n) független minta abszolút folytonos, és Y_j sűrűségfüggvénye (a \mathbb{P}_ϑ valószínűség mellett) $f_{j,\vartheta}$, akkor a minta likelihood-függvénye:

$$L_{n,\vartheta}(t_1, \dots, t_n) = \prod_{j=1}^n f_{j,\vartheta}(t_j) \quad (t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}).$$

Maximumlikelihood-módszer

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ statisztikai mező, ahol $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$, vagyis az ismeretlen eloszlás a ϑ paraméterrel jellemezhető.

Definíció (Maximum-likelihood becslés)

A ϑ maximumlikelihood-becslése (ML-becslése) az X_1, \dots, X_n mintából $\hat{\vartheta}$, ha maximalizálja a $\vartheta \mapsto L_{n,\vartheta}(X_1, \dots, X_n)$ függvényt, ahol $L_{n,\vartheta}$ a minta likelihood-függvénye. Azaz, ha

$$L_{n,\hat{\vartheta}}(X_1, \dots, X_n) \geq L_{n,\vartheta}(X_1, \dots, X_n) \text{ minden } \vartheta \in \Theta\text{-ra.}$$

Maximum-likelihood becslések

- binomiális eloszlás ismert k renddel: $\hat{p} = \bar{X}/k$
- Poisson-eloszlás: $\hat{\lambda} = \bar{X}$
- geometriai eloszlás: $\hat{p} = 1/\bar{X}$
- normális eloszlás: $\hat{m} = \bar{X}, \hat{\sigma} = s_n$
- exponenciális eloszlás: $\hat{\lambda} = 1/\bar{X}$
- egyenletes eloszlás: $\hat{a} = \min_j X_j; \quad \hat{b} = \max_j X_j$

Poisson-eloszlás paraméterének becslése

Tegyük fel, hogy X_1, X_2, \dots, X_n független, azonos λ paraméterű Poisson-eloszlású minta, ahol $\lambda > 0$ ismeretlen paraméter, $n = 95$, és $\bar{X} = 1,379$.

Poisson-eloszlásnál:

$$\mathbb{P}_\lambda(X_j = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}; \quad \mathbb{E}(X_j) = \lambda; \quad D(X_j) = \sqrt{\lambda}.$$

A megfigyelések az alábbiak (a gólok száma összesen $\sum_{j=1}^n X_j = 131$):

$$3, \quad 0, \quad 2, \quad 2, \quad 1, \quad 3, \dots, 2.$$

Annak valószínűsége λ paraméter mellett, hogy éppen ezt a sorozatot kaptuk:

$$\begin{aligned} L_{95,\lambda}(3, 0, 2, \dots, 2) &= \frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} \cdot \dots \cdot \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} = \\ &= \frac{\lambda^{3+0+2+2\dots+2}}{3! \cdot 0! \cdot 2! \cdot \dots \cdot 2!} e^{-95 \cdot \lambda} = \frac{\lambda^{131}}{3! \cdot 0! \cdot 2! \cdot \dots \cdot 2!} e^{-95 \cdot \lambda} \end{aligned}$$

Poisson-eloszlás paraméterének becslése

Tegyük fel, hogy X_1, X_2, \dots, X_n független, azonos λ paraméterű Poisson-eloszlású minta, ahol $\lambda > 0$ ismeretlen paraméter, $n = 95$, és $\bar{X} = 1,379$.

Poisson-eloszlásnál:

$$\mathbb{P}_\lambda(X_j = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}; \quad \mathbb{E}(X_j) = \lambda; \quad D(X_j) = \sqrt{\lambda}.$$

A megfigyelések az alábbiak (a gólok száma összesen $\sum_{j=1}^n X_j = 131$):

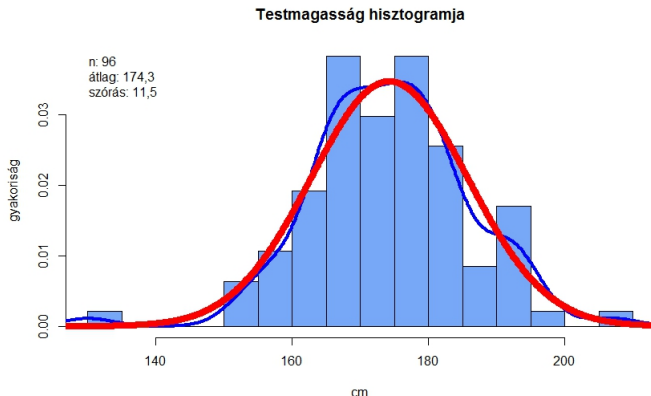
$$3, \quad 0, \quad 2, \quad 2, \quad 1, \quad 3, \dots, 2.$$

Annak valószínűsége λ paraméter mellett, hogy éppen ezt a sorozatot kaptuk:

$$\begin{aligned} L_{95,\lambda}(3, 0, 2, \dots, 2) &= \frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} \cdot \dots \cdot \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} = \\ &= \frac{\lambda^{3+0+2+2\dots+2}}{3! \cdot 0! \cdot 2! \cdot \dots \cdot 2!} e^{-95 \cdot \lambda} = \frac{\lambda^{131}}{3! \cdot 0! \cdot 2! \cdot \dots \cdot 2!} e^{-95 \cdot \lambda} \end{aligned}$$

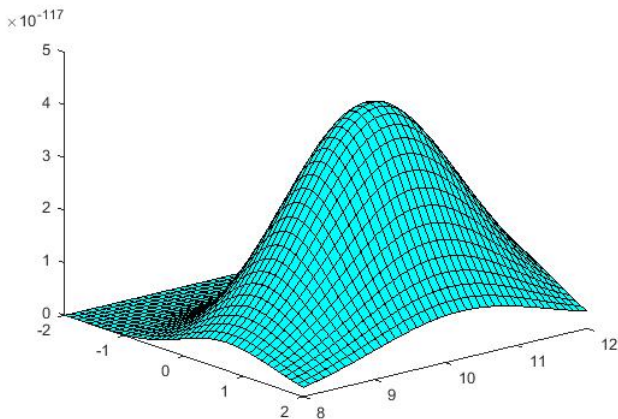
A likelihood-függvényben csak n és a $\sum_{j=1}^n X_j$ összeg szerepel a paraméterrel együtt.

Testmagasság hisztogramja



A testmagasság hisztogramja $n = 96$ elemű mintából és az $\bar{X} = 174,3$ várható értékű és $s_n^* = 11,5$ szórású normális eloszlás sűrűségfüggvénye (pirossal).

Likelihoodfüggvény



$n = 94$ elemű minta testmagasság-adatok alapján, normális eloszlást feltételezve.
Az átlag: $\bar{X} = 174,8$, a tapasztalati szórás $s_n = 10,5$.

ML-becslés: normális eloszlás

X_1, \dots, X_n függetlenek, eloszlásuk normális eloszlás $m, \sigma > 0$ paraméterekkel. Ekkor

$$L_{n,m,\sigma}(X_1, \dots, X_n) = \prod_{j=1}^n f_{j,\vartheta}(X_j) = \prod_{j=1}^n \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(X_j - m)^2}{2\sigma^2}\right) \right].$$

ML-becslés: normális eloszlás

X_1, \dots, X_n függetlenek, eloszlásuk normális eloszlás $m, \sigma > 0$ paraméterekkel. Ekkor

$$L_{n,m,\sigma}(X_1, \dots, X_n) = \prod_{j=1}^n f_{j,\vartheta}(X_j) = \prod_{j=1}^n \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(X_j - m)^2}{2\sigma^2}\right) \right].$$

$$L_{n,m,\sigma}(X_1, \dots, X_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left(-\sum_{j=1}^n \frac{(X_j - m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

ML-becslés: normális eloszlás

X_1, \dots, X_n függetlenek, eloszlásuk normális eloszlás $m, \sigma > 0$ paraméterekkel. Ekkor

$$L_{n,m,\sigma}(X_1, \dots, X_n) = \prod_{j=1}^n f_{j,\vartheta}(X_j) = \prod_{j=1}^n \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(X_j - m)^2}{2\sigma^2}\right) \right].$$

$$L_{n,m,\sigma}(X_1, \dots, X_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left(-\sum_{j=1}^n \frac{(X_j - m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

$$\log L_{n,m,\sigma}(X_1, \dots, X_n) = -n \log(\sqrt{2\pi}) - n \log \sigma - \sum_{j=1}^n \frac{(X_j - m)^2}{2\sigma^2}.$$

ML-becslés: normális eloszlás

X_1, \dots, X_n függetlenek, eloszlásuk normális eloszlás $m, \sigma > 0$ paraméterekkel. Ekkor

$$L_{n,m,\sigma}(X_1, \dots, X_n) = \prod_{j=1}^n f_{j,\vartheta}(X_j) = \prod_{j=1}^n \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(X_j - m)^2}{2\sigma^2}\right) \right].$$

$$L_{n,m,\sigma}(X_1, \dots, X_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left(-\sum_{j=1}^n \frac{(X_j - m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

$$\log L_{n,m,\sigma}(X_1, \dots, X_n) = -n \log(\sqrt{2\pi}) - n \log \sigma - \sum_{j=1}^n \frac{(X_j - m)^2}{2\sigma^2}.$$

A likelihood-függvényben csak a $\sum_{j=1}^n X_j^2$ **négyzetösszeg** és a $\sum_{j=1}^n X_j$ **összeg** szerepel a mintából a paraméterrel együtt:

$$\sum_{j=1}^n (X_j - m)^2 = \sum_{j=1}^n X_j^2 - 2m \sum_{j=1}^n X_j + m^2.$$

Elégéses statisztika

Definíció

Legyen X_1, \dots, X_n független minta ϑ paraméterű eloszlásból. A T statisztika elégéses, ha a likelihood-függvény felírható a következő alakban megfelelő h és g függvényekkel:

$$L_{n,\vartheta}(X_1, \dots, X_n) = h(X_1, \dots, X_n) \cdot g_{\vartheta}(T(X_1, \dots, X_n)).$$

Elégséges statisztika

Definíció

Legyen X_1, \dots, X_n független minta ϑ paraméterű eloszlásból. A T statisztika elég-séges, ha a likelihood-függvény felírható a következő alakban megfelelő h és g függvényekkel:

$$L_{n,\vartheta}(X_1, \dots, X_n) = h(X_1, \dots, X_n) \cdot g_{\vartheta}(T(X_1, \dots, X_n)).$$

- Poisson-eloszlás esetén az összeg és az átlag is elég-séges statisztika.
- Normális eloszlásnál elég-séges statisztika: (\bar{X}, s_n) , vagy $(\sum_{j=1}^n X_j^2, \sum_{j=1}^n X_j)$.
- Az elég-séges statisztika nem egyértelmű.
- Ha létezik maximumlikelihood-beclés, T pedig elég-séges statisztika, akkor az ML-beclés felírható $u(T(X_1, \dots, X_n))$ alakban valamely u függvényre. Azaz, ahogy a példákban is láttuk, az elég-séges statisztikából kifejezhető a maximumlikelihood-beclés.

Hatásos becslés az elégséges statisztika segítségével

A következő tétel alapján egy

- torzítatlan becslésből kiindulva
- az elégséges statisztika függvényeként, arra feltételes várható értéket véve.
- egy hatásosabb, vagyis kisebb szórású, szintén torzítatlan becslés is készíthető.

Például Poisson-eloszlás esetén, ha a λ paramétert szeretnénk becsülni:

- $\mathbb{E}_\lambda(X_1) = \lambda$, ezért X_1 torzítatlan becslése λ -nak;
- $\sum_{j=1}^n X_j$ elégséges statisztika

Hatásos becslés az elégséges statisztika segítségével

A következő tétel alapján egy

- torzítatlan becslésből kiindulva
- az elégséges statisztika függvényeként, arra feltételes várható értéket véve.
- egy hatásosabb, vagyis kisebb szórású, szintén torzítatlan becslés is készíthető.

Például Poisson-eloszlás esetén, ha a λ paramétert szeretnénk becsülni:

- $\mathbb{E}_\lambda(X_1) = \lambda$, ezért X_1 torzítatlan becslése λ -nak;
- $\sum_{j=1}^n X_j$ elégséges statisztika
- tekintsük az alábbi feltételes várható értéket (ha az összeget tudjuk, mennyi lehetett X_1):

$$\mathbb{E}(X_1 | X_1 + \dots + X_n) = \bar{X}$$

- továbbra is torzítatlan becslést kaptunk, de a szórás lényegesen kisebb lett:

$$\mathbb{E}_\lambda(\bar{X}) = \mathbb{E}_\lambda(X_1) = \lambda; \quad D_\lambda(\bar{X}) = \frac{D_\lambda(X_1)}{\sqrt{n}} < D_\lambda(X_1).$$

Rao–Blackwell-tétel

Tétel (Rao–Blackwell)

Tegyük fel, hogy a T statisztika torzítatlan becslés a ϑ paraméterre, valamint S elégséges statisztika ϑ -ra. Ekkor megadható olyan T^ becslés, melyre*

- $T^* = q(S)$ megfelelő q függvénnyel;
- T^* torzítatlan ϑ -ra: $\mathbb{E}_{\vartheta}(T^*) = \vartheta$ minden $\vartheta \in \Theta$ -ra;
- T^* hatásosabb, mint T : $D_{\vartheta}(T^*) \leq D_{\vartheta}(T)$ minden $\vartheta \in \Theta$ -ra.

Ha az S statisztika teljes is (azaz minden olyan f függvény, melyre $\mathbb{E}_{\vartheta}(f(S)) = 0$ minden ϑ -ra, „majdnem mindenütt” nulla), akkor T^ hatásos, azaz minden torzítatlan becslésnél hatásosabb.*

A megoldás az $\mathbb{E}(T|S)$ feltételes várható érték lesz. Például Poisson-eloszlásnál $\mathbb{E}(X_1 | \sum_{j=1}^n X_j) = \bar{X}$ hatásos.

Állítás

Poisson-eloszlásnál, illetve normális eloszlásnál (m -re) a mintaelemek összege teljes elégséges statisztika, a mintaátlag pedig hatásos becslése a paraméternek.

Fisher-információ

Egy mintaelem **Fisher-információja**:

$$I_1(\vartheta) = \mathbb{E}_{\vartheta} \left(\left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} \log f_{\vartheta}(X_1) \right)^2 \right),$$

ahol f_{ϑ} a likelihoodfüggvény \mathbb{P}_{ϑ} mellett.

Fisher-információ

Egy mintaelem **Fisher-információja**:

$$I_1(\vartheta) = \mathbb{E}_{\vartheta} \left(\left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} \log f_{\vartheta}(X_1) \right)^2 \right),$$

ahol f_{ϑ} a likelihoodfüggvény \mathbb{P}_{ϑ} mellett.

- Megfelelő (regularitási) feltételek mellett a független azonos eloszlású, n elemű minta Fisher-információja: $I_n(\vartheta) = n \cdot I_1(\vartheta)$.
- Ha T elégséges statisztika, akkor $T(X_1, \dots, X_n)$ Fisher-információja ugyanaz, mint (X_1, \dots, X_n) Fisher-információja (például Poisson-eloszlásnál az átlag Fisher-információja ugyanaz, mint a teljes mintáé).
- **Cramér–Rao-egyenlőtlenség**: megfelelő (regularitási) feltételek mellett, ha T torzítatlan becslés ϑ -ra, akkor

$$D^2(T(X)) \geq \frac{1}{I_n(\vartheta)} = \frac{1}{nI_1(\vartheta)}.$$

(Ebben az értelemben feleakkora szóráshoz négyszer annyi mintaelem kell.)

Fisher-információ

Egy mintaelem **Fisher-információja**:

$$I_1(\vartheta) = \mathbb{E}_{\vartheta} \left(\left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} \log f_{\vartheta}(X_1) \right)^2 \right),$$

ahol f_{ϑ} a likelihoodfüggvény \mathbb{P}_{ϑ} mellett.

Néhány nevezetes eloszlás Fisher-információja egy mintaelemből:

- binomiális eloszlás n renddel és p paraméterrel:

$$\frac{n}{p(1-p)}.$$

- Poisson-eloszlás λ paraméterrel: $1/\lambda$
- normális eloszlás, ha $\vartheta = (m, \sigma)$:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sigma^2} \end{pmatrix}.$$

Fisher-információ: Poisson-eloszlás

Egy mintaelem **Fisher-információja** (az f_λ likelihood-függvény most a valószínűség):

$$\begin{aligned} I_1(\lambda) &= \mathbb{E}_\lambda \left(\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \log f_\lambda(X_1) \right)^2 \right) = \mathbb{E}_\lambda \left(\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \log \left(\frac{\lambda^{X_1}}{X_1!} e^{-\lambda} \right) \right)^2 \right) = \\ &= \mathbb{E}_\lambda \left(\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(X_1 \log \lambda - \log X_1! - \lambda \right) \right)^2 \right) = \mathbb{E}_\lambda \left(\left(\frac{X_1}{\lambda} - 1 \right)^2 \right) = \\ &= \mathbb{E}_\lambda \left(\frac{X_1^2}{\lambda^2} - 2 \frac{X_1}{\lambda} + 1 \right) = \frac{\lambda + \lambda^2}{\lambda^2} - 2 + 1 = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Felhasználtuk, hogy Poisson-eloszlásnál $\mathbb{E}_\lambda(X_1) = D_\lambda(X_1) = \lambda$, így

$$\mathbb{E}_\lambda(X_1^2) = D_\lambda^2(X_1) + \mathbb{E}_\lambda^2(X_1) = \lambda + \lambda^2.$$

Következmény a **Cramér–Rao-egyenlőtlenség** alapján: ha T torzítatlan becslése λ -nak n elemű független mintából, akkor

$$D^2(T(X_1, \dots, X_n)) \geq \frac{\lambda}{n}.$$

Konfidenciaintervallum az ML-becslés alapján

Gyakran az ismeretlen paraméterre egyetlen becslés helyett konfidenciaintervallumot adhatunk meg, amire például az igaz, hogy

$$\mathbb{P}_{\vartheta}(T_1 \leq \vartheta \leq T_2) \geq 0,95 \quad (\vartheta \in \Theta).$$

Ez egy olyan véletlen intervallum, ami 95%-os megbízhatóságú, azaz legalább ennyi valószínűséggel tartalmazza a becsülni kívánt paramétert.

Konfidenciaintervallum az ML-becslés alapján

Gyakran az ismeretlen paraméterre egyetlen becslés helyett konfidenciaintervallumot adhatunk meg, amire például az igaz, hogy

$$\mathbb{P}_\vartheta(T_1 \leq \vartheta \leq T_2) \geq 0,95 \quad (\vartheta \in \Theta).$$

Ez egy olyan véletlen intervallum, ami 95%-os megbízhatóságú, azaz legalább ennyi valószínűséggel tartalmazza a becsülni kívánt paramétert.

Állítás

Ha likelihoodfüggvény teljesít bizonyos regularitási feltételeket, akkor a ϑ paraméternek az X_1, X_2, \dots, X_n mintából számolt $\hat{\vartheta}_n$ maximumlikelihood-becslése

- létezik;
- aszimptotikusan torzítatlan: $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_\vartheta(\hat{\vartheta}_n) = \vartheta$ minden $\vartheta \in \Theta$ -ra;
- aszimptotikusan hatásos: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} I_1(\vartheta) D_\vartheta(\hat{\vartheta}_n) = 1$ minden $\vartheta \in \Theta$ -ra;
- aszimptotikusan normális eloszlású: $\sqrt{n} I_1(\vartheta)(\hat{\vartheta}_n - \vartheta)$ eloszlásban tart a standard normális eloszláshoz minden $\vartheta \in \Theta$ -ra $n \rightarrow \infty$ esetén.

Itt $I_1(\vartheta)$ az egyelemű mintából számolt Fisher-információt jelöli.

Konfidenciaintervallum az ML-becslés alapján

Ez alapján **aszimptotikus konfidenciaintervallum**, ami $n \rightarrow \infty$ esetén $1 - \alpha$ -hoz tartó valószínűséggel tartalmazza ϑ -t:

$$\left(\hat{\vartheta}_n - \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\hat{I}_n(\vartheta)}}; \hat{\vartheta}_n + \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\hat{I}_n(\vartheta)}} \right),$$

ahol $\hat{I}_n(\vartheta) = n \cdot I_1(\hat{\vartheta}_n)$, vagyis a Fisher-információ kifejezésébe a maximumlikelihood-becslést írjuk be.

Másképpen felírva:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\vartheta} \left(\hat{\vartheta}_n - \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\hat{I}_n(\vartheta)}} \leq \vartheta \leq \hat{\vartheta}_n + \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\hat{I}_n(\vartheta)}} \right) = 1 - \alpha.$$

Itt is vegyük észre, hogy ϑ ismeretlen, de rögzített paraméter, és az intervallum alsó és felső végpontjai véletlenek, az eloszlásuk is ϑ -tól függ (ezt jelöli a ϑ az alsó indexben).

Konfidenciaintervallum az ML-becslés alapján

Tekintsünk egy n elemű független mintát az alábbi sűrűségfüggvénnyel, ahol $\lambda > 0$ ismeretlen paraméter:

$$f_{\lambda}(x) = \frac{\lambda^4}{6} x^3 e^{-\lambda x} \mathbb{I}(x > 0).$$

Konfidenciaintervallum az ML-becslés alapján

Tekintsünk egy n elemű független mintát az alábbi sűrűségfüggvénnyel, ahol $\lambda > 0$ ismeretlen paraméter:

$$f_{\lambda}(x) = \frac{\lambda^4}{6} x^3 e^{-\lambda x} \mathbb{I}(x > 0).$$

A likelihood-függvény, felhasználva, hogy az X_j -k 1 valószínűséggel pozitívak:

$$f(\lambda) = \prod_{j=1}^n f_{\lambda}(X_j) = \prod_{j=1}^n \left(\frac{\lambda^4}{6} X_j^3 e^{-\lambda X_j} \right) = \frac{\prod_{j=1}^n X_j^3}{6^n} \cdot \lambda^{4n} \cdot e^{-\lambda \sum_{j=1}^n X_j}.$$

Konfidenciaintervallum az ML-becslés alapján

Tekintsünk egy n elemű független mintát az alábbi sűrűségfüggvénnyel, ahol $\lambda > 0$ ismeretlen paraméter:

$$f_{\lambda}(x) = \frac{\lambda^4}{6} x^3 e^{-\lambda x} \mathbb{I}(x > 0).$$

A likelihood-függvény, felhasználva, hogy az X_j -k 1 valószínűséggel pozitívak:

$$f(\lambda) = \prod_{j=1}^n f_{\lambda}(X_j) = \prod_{j=1}^n \left(\frac{\lambda^4}{6} X_j^3 e^{-\lambda X_j} \right) = \frac{\prod_{j=1}^n X_j^3}{6^n} \cdot \lambda^{4n} \cdot e^{-\lambda \sum_{j=1}^n X_j}.$$

$$\log f(\lambda) = \log \frac{\prod_{j=1}^n X_j^3}{6^n} + 4n \log \lambda - \lambda \cdot \sum_{j=1}^n X_j.$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \log f(\lambda) = \frac{4n}{\lambda} - \sum_{j=1}^n X_j.$$

Konfidenciintervallum az ML-becslés alapján

Tekintsünk egy n elemű független mintát az alábbi sűrűségfüggvénnyel, ahol $\lambda > 0$ ismeretlen paraméter:

$$f_{\lambda}(x) = \frac{\lambda^4}{6} x^3 e^{-\lambda x} \mathbb{I}(x > 0).$$

A likelihood-függvény, felhasználva, hogy az X_j -k 1 valószínűséggel pozitívak:

$$f(\lambda) = \prod_{j=1}^n f_{\lambda}(X_j) = \prod_{j=1}^n \left(\frac{\lambda^4}{6} X_j^3 e^{-\lambda X_j} \right) = \frac{\prod_{j=1}^n X_j^3}{6^n} \cdot \lambda^{4n} \cdot e^{-\lambda \sum_{j=1}^n X_j}.$$

$$\log f(\lambda) = \log \frac{\prod_{j=1}^n X_j^3}{6^n} + 4n \log \lambda - \lambda \cdot \sum_{j=1}^n X_j.$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \log f(\lambda) = \frac{4n}{\lambda} - \sum_{j=1}^n X_j.$$

Ez pontosan akkor pozitív, ha $\lambda < \frac{4}{\bar{X}}$, és negatív különben. Ezért a $\log f(\lambda)$ függvény globális maximumhelye $\lambda = \frac{4}{\bar{X}}$, és a logaritmusfüggvény monotonitása miatt ez lesz a maximumlikelihood-becslés is.

Konfidenciaintervallum az ML-becslés alapján

Az előző alapján a Fisher-információt is kiszámíthatjuk, ha tudjuk, hogy

$$\mathbb{E}_\lambda(X_j) = \frac{4}{\lambda}, \text{ és } D_\lambda^2(X_j) = \frac{4}{\lambda^2}.$$

Ugyanis

$$\begin{aligned} I_1(\vartheta) &= \mathbb{E}_\lambda \left(\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \log f_\lambda(X_1) \right)^2 \right) = \mathbb{E}_\lambda \left(\left(\frac{4n}{\lambda} - \sum_{j=1}^n X_j \right)^2 \right) = \\ &= D_\lambda^2 \left(\sum_{j=1}^n X_j \right) = n \cdot D_\lambda^2(X_1) = n \cdot \frac{4}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Konfidenciaintervallum az ML-becslés alapján

Az előző alapján a Fisher-információt is kiszámíthatjuk, ha tudjuk, hogy

$$\mathbb{E}_\lambda(X_j) = \frac{4}{\lambda}, \text{ és } D_\lambda^2(X_j) = \frac{4}{\lambda^2}.$$

Ugyanis

$$\begin{aligned} I_1(\vartheta) &= \mathbb{E}_\lambda \left(\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \log f_\lambda(X_1) \right)^2 \right) = \mathbb{E}_\lambda \left(\left(\frac{4n}{\lambda} - \sum_{j=1}^n X_j \right)^2 \right) = \\ &= D_\lambda^2 \left(\sum_{j=1}^n X_j \right) = n \cdot D_\lambda^2(X_1) = n \cdot \frac{4}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

A fentiek alapján 95%-os megbízhatósági szintű aszimptotikus konfidenciaintervallum λ -ra:

$$\left(\frac{4}{\bar{X}} - 1,96 \cdot \frac{4\bar{X}^2}{\sqrt{n}}, \frac{4}{\bar{X}} + 1,96 \cdot \frac{4\bar{X}^2}{\sqrt{n}} \right).$$