

Becslések és tulajdonságaik (4. előadás)

- $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ statisztikai mező;
- $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$ valamely Θ halmazzal (Θ a paraméterter);
- $g : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ függvény.
- Cél: olyan T statisztika keresése, amire a $T(X)$ valószínűségi változó és a $g(\vartheta)$ érték valamilyen értelemben közel esnek egymáshoz.

Becslések és tulajdonságaik (4. előadás)

- $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ statisztikai mező;
- $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$ valamely Θ halmazzal (Θ a paraméterter);
- $g : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ függvény.
- Cél: olyan T statisztika keresése, amire a $T(X)$ valószínűségi változó és a $g(\vartheta)$ érték valamilyen értelemben közel esnek egymáshoz.

Definíció (Torzítatlanság)

A T statisztika torzítatlan becslés $g(\vartheta)$ -ra, ha minden $\vartheta \in \Theta$ -ra

$$\mathbb{E}_\vartheta(T(X_1, \dots, X_n)) = g(\vartheta).$$

A T statisztika torzítása a $b_T(\vartheta) = \mathbb{E}_\vartheta(T(X_1, \dots, X_n)) - g(\vartheta)$ függvény.

Példa. X_1, X_2, \dots, X_n független minta a $[0, \vartheta]$ intervallumon egyenletes eloszlásból.

Becslések és tulajdonságaik (4. előadás)

- $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ statisztikai mező;
- $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$ valamely Θ halmazzal (Θ a paraméterter);
- $g : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ függvény.
- Cél: olyan T statisztika keresése, amire a $T(X)$ valószínűségi változó és a $g(\vartheta)$ érték valamilyen értelemben közel esnek egymáshoz.

Definíció (Torzítatlanság)

A T statisztika torzítatlan becslés $g(\vartheta)$ -ra, ha minden $\vartheta \in \Theta$ -ra

$$\mathbb{E}_\vartheta(T(X_1, \dots, X_n)) = g(\vartheta).$$

A T statisztika torzítása a $b_T(\vartheta) = \mathbb{E}_\vartheta(T(X_1, \dots, X_n)) - g(\vartheta)$ függvény.

Példa. X_1, X_2, \dots, X_n független minta a $[0, \vartheta]$ intervallumon egyenletes eloszlásból. Ekkor $2\bar{X}$ torzítatlan becslés $g(\vartheta) = \vartheta$ -ra: $\mathbb{E}(2\bar{X}) = \vartheta$.

Torzítatlan becslések

Állítás (A várható érték torzítatlan becslése)

Legyen X_1, \dots, X_n független azonos eloszlású véges várható értékű minta. Ekkor

$$\mathbb{E}_\vartheta(\bar{X}) = \mathbb{E}_\vartheta(X_1) \quad \text{minden } \vartheta \in \Theta\text{-ra,}$$

vagyis a **mintaátlag** torzítatlan becslés a várható értékre.

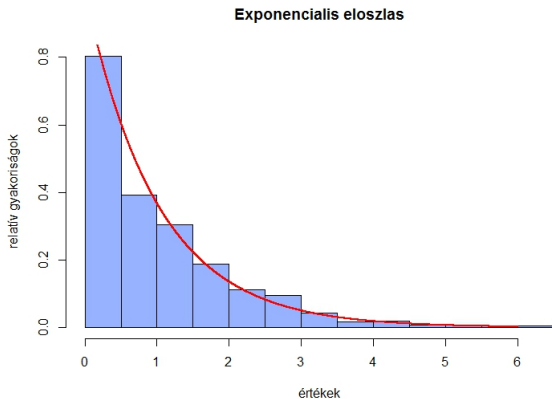
Állítás (A szórásnégyzet torzítatlan becslése)

X_1, \dots, X_n független azonos eloszlású véges szórású minta. Ekkor Ekkor

$$\mathbb{E}_\vartheta(s_n^{*2}) = D_\vartheta^2(X_1) \quad \text{minden } \vartheta \in \Theta\text{-ra,}$$

vagyis a **korrigált tapasztalati szórásnégyzet** torzítatlan becslés a szórásnégyzetre.

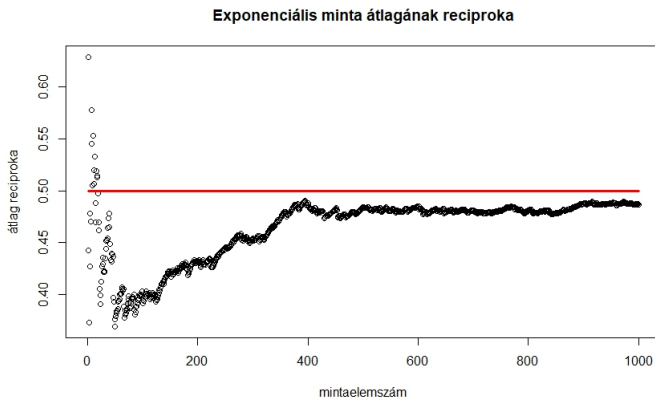
Az exponenciális eloszlású minta hisztogramja



Exponenciális eloszlású minta hisztogramja és sűrűségfüggvénye:

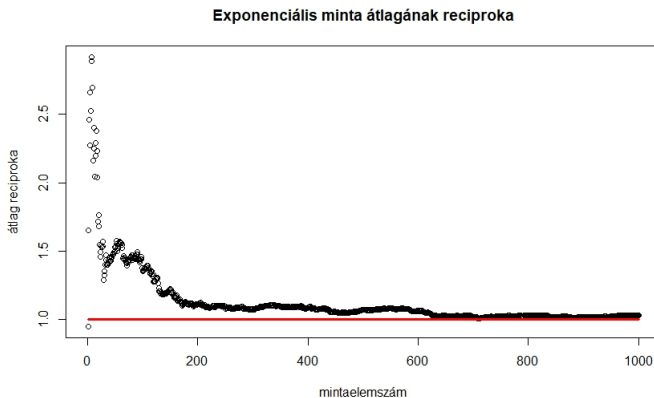
$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x) \mathbb{I}(x > 0); \quad \mathbb{E}(X) = D(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

Exponenciális eloszlás



$\lambda = 0,5$ paraméterű exponenciális eloszlást generálva a mintaátlag reciproka $0,5$ -höz tart, azaz **konzisztens** becslés, hiszen ez minden λ -ra teljesül.

Exponenciális eloszlás



$\lambda = 1$ paraméterű exponenciális eloszlást generálva a mintaátlag reciproka 1-hez tart, azaz **konzisztens** becslés, hiszen ez minden λ -ra teljesül.

Konzisztencia

Definíció

A $T_n = T_n(X_1, \dots, X_n)$ **konzisztens** becsléssorozat $g(\vartheta)$ -ra, ha minden $\vartheta \in \Theta$ -ra

$$(T_n(X_1, \dots, X_n)) \rightarrow g(\vartheta)$$

$n \rightarrow \infty$ esetén sztochasztikusan, azaz minden $\vartheta \in \Theta$ és $\varepsilon > 0$ -ra teljesül, hogy

$$\mathbb{P}_\vartheta(|T_n - g(\vartheta)| > \varepsilon) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Konzisztencia

Definíció

A $T_n = T_n(X_1, \dots, X_n)$ **konzisztens** becsléssorozat $g(\vartheta)$ -ra, ha minden $\vartheta \in \Theta$ -ra

$$(T_n(X_1, \dots, X_n)) \rightarrow g(\vartheta)$$

$n \rightarrow \infty$ esetén sztochasztikusan, azaz minden $\vartheta \in \Theta$ és $\varepsilon > 0$ -ra teljesül, hogy

$$\mathbb{P}_\vartheta(|T_n - g(\vartheta)| > \varepsilon) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Elégséges feltétel:

$$\mathbb{E}_\vartheta(T_n(X)) \rightarrow g(\vartheta) \quad \text{és} \quad D_\vartheta(T_n(X)) \rightarrow 0$$

minden $\vartheta \in \Theta$ -ra.

Példák torzítatlan, konzisztens becslésekre

X_1, X_2, \dots független azonos eloszlású minta. Ekkor

$$T_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \rightarrow \mathbb{E}_\vartheta(X_1)$$

teljesül $n \rightarrow \infty$ esetén sztochasztikusan a nagy számok gyenge törvénye szerint, vagyis az **átlag** konzisztens becslés a **várható értékre**.

Speciális eset: a **relatív gyakoriság** konzisztens becslés a **valószínűségre**.

Példák torzítatlan, konzisztens becslésekre

X_1, X_2, \dots független azonos eloszlású minta. Ekkor

$$T_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \rightarrow \mathbb{E}_\vartheta(X_1)$$

teljesül $n \rightarrow \infty$ esetén sztochasztikusan a nagy számok gyenge törvénye szerint, vagyis az **átlag** konzisztens becslés a **várható értékre**.

Speciális eset: a **relatív gyakoriság** konzisztens becslés a **valószínűségre**.

Nevezetes eloszlások:

- Poisson-eloszlás λ paraméterére az átlag torzítatlan, konzisztens
- a normális eloszlás m paraméterére az átlag torzítatlan és konzisztens; a σ paraméterre a tapasztalati szórás és a korrigált tapasztalati szórás konzisztensek, de nem torzítatlanok; σ^2 -re s_n^{*2} torzítatlan
- exponenciális eloszlás: $1/\bar{X}$ konzisztens λ -ra, de nem torzítatlan a paraméterre
- exponenciális eloszlás: $(n+1) \cdot \min(X_1, \dots, X_n)$ torzítatlan, de nem konzisztens a várható értékre (vagyis $1/\lambda$ -ra).

Becslési módszerek

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ statisztikai mező, ahol $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$, vagyis az ismeretlen eloszlás a ϑ paraméterrel jellemezhető.

Találhatunk-e olyan általános módszereket, melyeket alkalmazva a ϑ ismeretlen paraméter becslésére egy megfelelő $T(X_1, \dots, X_n)$ statisztika

- torzítatlan: várható értéke megegyezik a becsülni kívánt ϑ paraméterrel?
- hatásos: szórása a lehető legkisebb?
- konzisztens: a mintaelemszámmal végtelenhez tartva a becsléseink sorozata ϑ -hoz tart: $T_n \rightarrow \vartheta$ sztochasztikusan $n \rightarrow \infty$ esetén?

Maximumlikelihood-módszer

Van két telefontöltőnk, melyek ránézésre megkülönböztethetlenné. A jó minden kipróbálásnál a többletől függetlenül 90%, a rossz 20% valószínűséggel működik.

Az egyik kábelt kiválasztottuk, 10 kipróbálásból pontosan 8-szor működött. Ez melyik kábel lehetett?

Maximumlikelihood-módszer

Van két telefontöltőnk, melyek ránézésre megkülönböztethetetlenek. A jó minden kipróbálásnál a többletől függetlenül 90%, a rossz 20% valószínűséggel működik.

Az egyik kábelt kiválasztottuk, 10 kipróbálásból pontosan 8-szor működött. Ez melyik kábel lehetett?

$$\mathbb{P}(\text{a jó kábel 8-szor működik}) = \binom{10}{8} 0,9^8 0,1^2 = 19,8\%.$$

$$\mathbb{P}(\text{a rossz kábel 8-szor működik}) = \binom{10}{8} 0,2^8 0,8^2 = 0,00007\%.$$

Inkább a jó kábel lehetett, amit kiválasztottunk.

Maximumlikelihood-módszer

Van egy telefontöltőnk, mely minden kipróbálásnál a többletől függetlenül p valószínűséggel működik.

Itt az ismeretlen paraméter: $p \in [0, 1]$.

A kábel 10 kipróbálásból pontosan 8-szor működött. Mennyi lehet p értéke?

Maximumlikelihood-módszer

Van egy telefontöltőnk, mely minden kipróbálásnál a többtől függetlenül p valószínűséggel működik.

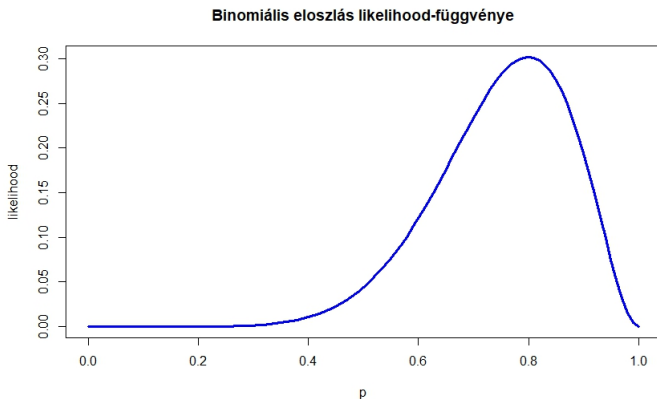
Itt az ismeretlen paraméter: $p \in [0, 1]$.

A kábel 10 kipróbálásból pontosan 8-szor működött. Mennyi lehet p értéke?

$$\mathbb{P}_p(\text{a kábel 8-szor működik}) = \binom{10}{8} p^8 (1-p)^2.$$

Kérdés: ez milyen $p \in [0, 1]$ -re lesz a legnagyobb?

Maximumlikelihood-módszer



A likelihood-függvény: $\mathbb{P}_p(\text{a kábel 8-szor működik}) = \binom{10}{8} p^8 (1-p)^2$ a p ismeretlen paraméter függvényében. A maximumhelye: $\hat{p} = 0,8$.

Maximumlikelihood-módszer

Definíció (Likelihood-függvény)

Ha az (Y_1, \dots, Y_n) független minta diszkrét (a lehetséges értékeinek száma véges vagy megszámlálható sok), akkor a likelihood-függvénye:

$$L_{n,\vartheta}(k_1, \dots, k_n) = \prod_{j=1}^n \mathbb{P}_{j,\vartheta}(Y_j = k_j) \quad ((k_1, \dots, k_n) \in H).$$

Maximumlikelihood-módszer

Definíció (Likelihood-függvény)

Ha az (Y_1, \dots, Y_n) független minta diszkrét (a lehetséges értékeinek száma véges vagy megszámlálható sok), akkor a likelihood-függvénye:

$$L_{n,\vartheta}(k_1, \dots, k_n) = \prod_{j=1}^n \mathbb{P}_{j,\vartheta}(Y_j = k_j) \quad ((k_1, \dots, k_n) \in H).$$

Ha az (Y_1, \dots, Y_n) független minta abszolút folytonos, és Y_j sűrűségfüggvénye (a \mathbb{P}_ϑ valószínűség mellett) $f_{j,\vartheta}$, akkor a minta likelihood-függvénye:

$$L_{n,\vartheta}(t_1, \dots, t_n) = \prod_{j=1}^n f_{j,\vartheta}(t_j) \quad (t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}).$$

Maximumlikelihood-módszer

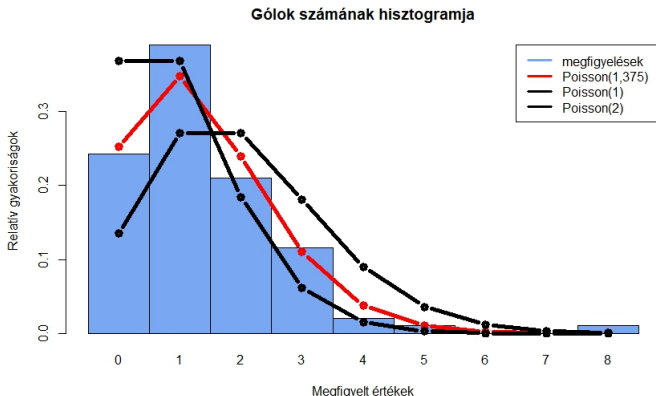
Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ statisztikai mező, ahol $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$, vagyis az ismeretlen eloszlás a ϑ paraméterrel jellemezhető.

Definíció (Maximum-likelihood becslés)

A ϑ maximumlikelihood-becslése (ML-becslése) az X_1, \dots, X_n mintából $\hat{\vartheta}$, ha maximalizálja a $\vartheta \mapsto L_{n,\vartheta}(X_1, \dots, X_n)$ függvényt, ahol $L_{n,\vartheta}$ a minta likelihood-függvénye. Azaz, ha

$$L_{n,\hat{\vartheta}}(X_1, \dots, X_n) \geq L_{n,\vartheta}(X_1, \dots, X_n) \text{ minden } \vartheta \in \Theta\text{-ra.}$$

Poisson-eloszlás paraméterének becslése



A gólok számának hisztogramja $n = 95$ mérkőzésen, és különböző paraméterű Poisson-eloszlások ($\mathbb{P}_\lambda(X = k) = \lambda^k / k! \cdot e^{-\lambda}$)

Poisson-eloszlás paraméterének becslése

Tegyük fel, hogy X_1, X_2, \dots, X_n független, azonos λ paraméterű Poisson-eloszlású minta, ahol $\lambda > 0$ ismeretlen paraméter, $n = 95$, és $\bar{X} = 1,379$.

Poisson-eloszlásnál:

$$\mathbb{P}_\lambda(X_j = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}; \quad \mathbb{E}(X_j) = \lambda; \quad D(X_j) = \sqrt{\lambda}.$$

A megfigyelések az alábbiak (a gólok száma összesen $\sum_{j=1}^n X_j = 131$):

3, 0, 2, 2, 1, 3, ..., 2.

Poisson-eloszlás paraméterének becslése

Tegyük fel, hogy X_1, X_2, \dots, X_n független, azonos λ paraméterű Poisson-eloszlású minta, ahol $\lambda > 0$ ismeretlen paraméter, $n = 95$, és $\bar{X} = 1,379$.

Poisson-eloszlásnál:

$$\mathbb{P}_\lambda(X_j = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}; \quad \mathbb{E}(X_j) = \lambda; \quad D(X_j) = \sqrt{\lambda}.$$

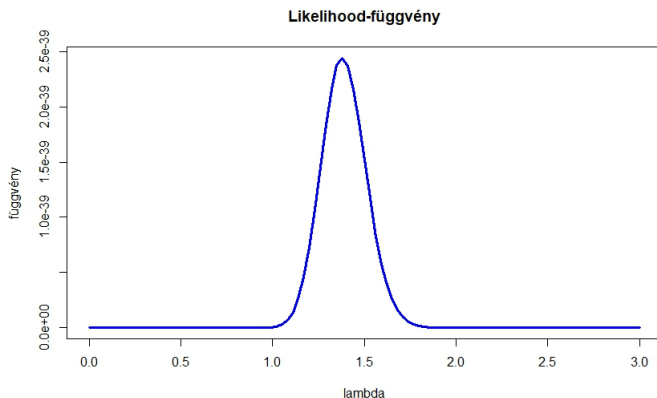
A megfigyelések az alábbiak (a gólok száma összesen $\sum_{j=1}^n X_j = 131$):

$$3, \quad 0, \quad 2, \quad 2, \quad 1, \quad 3, \dots, 2.$$

Annak valószínűsége λ paraméter mellett, hogy éppen ezt a sorozatot kaptuk:

$$\begin{aligned} L_{95,\lambda}(3, 0, 2, \dots, 2) &= \frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} \cdot \dots \cdot \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} = \\ &= \frac{\lambda^{3+0+2+2\dots+2}}{3! \cdot 0! \cdot 2! \cdot \dots \cdot 2!} e^{-95 \cdot \lambda} = \frac{\lambda^{131}}{3! \cdot 0! \cdot 2! \cdot \dots \cdot 2!} e^{-95 \cdot \lambda} \end{aligned}$$

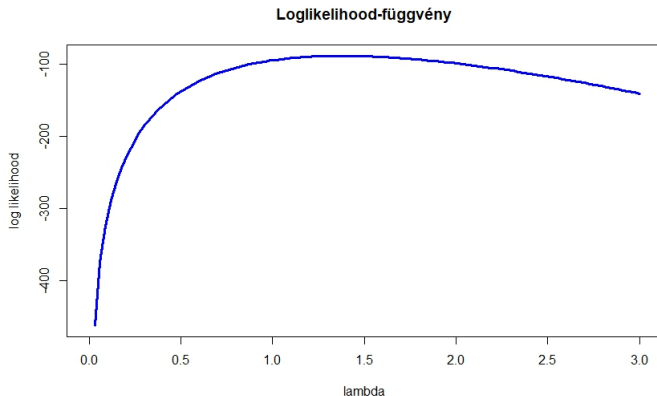
Poisson-eloszlás paraméterének becslése



A $\frac{\lambda^{131}}{3! \cdot 0! \cdot 2! \cdot \dots \cdot 2!} e^{-95 \cdot \lambda}$ likelihoodfüggvény a $\lambda > 0$ paraméter függvényében;

mintaátlag: $\bar{X} = \frac{131}{95} = 1,379$

Poisson-eloszlás paraméterének becslése



A $\log \frac{\lambda^{131}}{3! \cdot 0! \cdot 2! \cdot \dots \cdot 2!} e^{-95 \cdot \lambda}$ loglikelihoodfüggvény a $\lambda > 0$ paraméter függvényében;

mintaátlag: $\bar{X} = \frac{131}{95} = 1,379$

ML-becslés: Poisson-eloszlás

X_1, \dots, X_n függetlenek, Poisson-eloszlás $\lambda > 0$ ismeretlen paraméterrel, azaz

$$\mathbb{P}(X_j = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Ekkor

$$L_{n,\lambda}(X_1, \dots, X_n) = \prod_{j=1}^n \left(\frac{\lambda^{X_j}}{X_j!} e^{-\lambda} \right) = \frac{\lambda^{X_1}}{X_1!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{X_2}}{X_2!} e^{-\lambda} \cdot \dots \cdot \frac{\lambda^{X_n}}{X_n!} e^{-\lambda}.$$

ML-becslés: Poisson-eloszlás

X_1, \dots, X_n függetlenek, Poisson-eloszlás $\lambda > 0$ ismeretlen paraméterrel, azaz

$$\mathbb{P}(X_j = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Ekkor

$$L_{n,\lambda}(X_1, \dots, X_n) = \prod_{j=1}^n \left(\frac{\lambda^{X_j}}{X_j!} e^{-\lambda} \right) = \frac{\lambda^{X_1}}{X_1!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{X_2}}{X_2!} e^{-\lambda} \cdot \dots \cdot \frac{\lambda^{X_n}}{X_n!} e^{-\lambda}.$$

$$L_{n,\lambda}(X_1, \dots, X_n) = \lambda^{\sum_{j=1}^n X_j} e^{-n\lambda} \cdot \prod_{j=1}^n \frac{1}{X_j!}.$$

ML-becslés: Poisson-eloszlás

X_1, \dots, X_n függetlenek, Poisson-eloszlás $\lambda > 0$ ismeretlen paraméterrel, azaz

$$\mathbb{P}(X_j = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Ekkor

$$L_{n,\lambda}(X_1, \dots, X_n) = \prod_{j=1}^n \left(\frac{\lambda^{X_j}}{X_j!} e^{-\lambda} \right) = \frac{\lambda^{X_1}}{X_1!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{X_2}}{X_2!} e^{-\lambda} \cdot \dots \cdot \frac{\lambda^{X_n}}{X_n!} e^{-\lambda}.$$

$$L_{n,\lambda}(X_1, \dots, X_n) = \lambda^{\sum_{j=1}^n X_j} e^{-n\lambda} \cdot \prod_{j=1}^n \frac{1}{X_j!}.$$

$$\log L_{n,\lambda}(X_1, \dots, X_n) = \log \lambda \sum_{j=1}^n X_j - n\lambda + \log \prod_{j=1}^n \frac{1}{X_j!}$$

ML-becslés: Poisson-eloszlás

X_1, \dots, X_n függetlenek, Poisson-eloszlás $\lambda > 0$ ismeretlen paraméterrel, azaz

$$\mathbb{P}(X_j = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Ekkor

$$L_{n,\lambda}(X_1, \dots, X_n) = \prod_{j=1}^n \left(\frac{\lambda^{X_j}}{X_j!} e^{-\lambda} \right) = \frac{\lambda^{X_1}}{X_1!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{X_2}}{X_2!} e^{-\lambda} \cdot \dots \cdot \frac{\lambda^{X_n}}{X_n!} e^{-\lambda}.$$

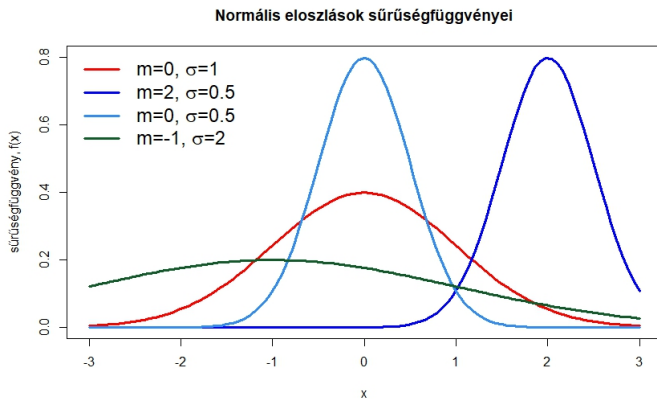
$$L_{n,\lambda}(X_1, \dots, X_n) = \lambda^{\sum_{j=1}^n X_j} e^{-n\lambda} \cdot \prod_{j=1}^n \frac{1}{X_j!}.$$

$$\log L_{n,\lambda}(X_1, \dots, X_n) = \log \lambda \sum_{j=1}^n X_j - n\lambda + \log \prod_{j=1}^n \frac{1}{X_j!}$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \log L_{n,\lambda}(X_1, \dots, X_n) = \frac{\sum_{j=1}^n X_j}{\lambda} - n > 0 \Leftrightarrow \lambda < \bar{X}.$$

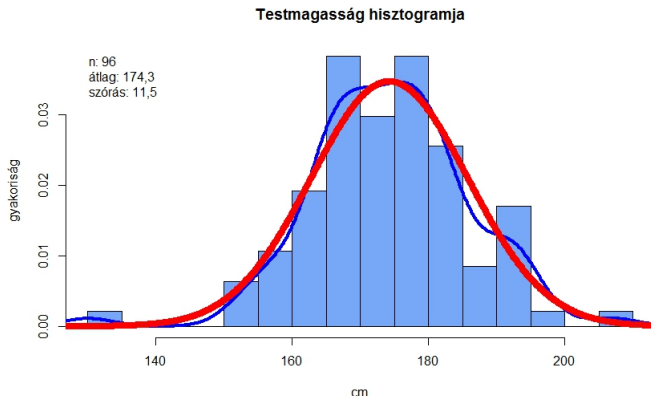
Ezért az ML-becslés: $\hat{\lambda} = \bar{X}$. A log monoton növekedését használtuk.

Normális eloszlás sűrűségfüggvénye



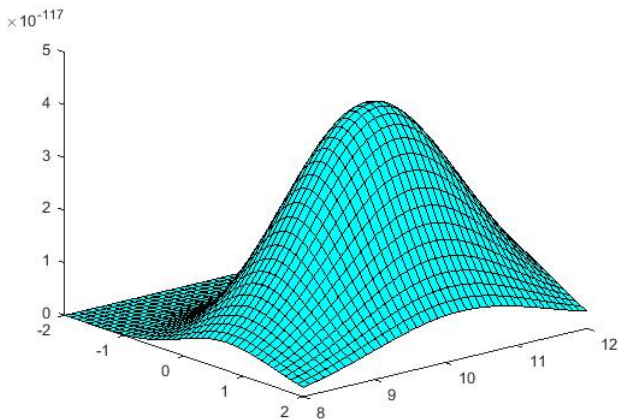
Különböző várható értékű és szórású normális eloszlások sűrűségfüggvénye

Testmagasság hisztogramja



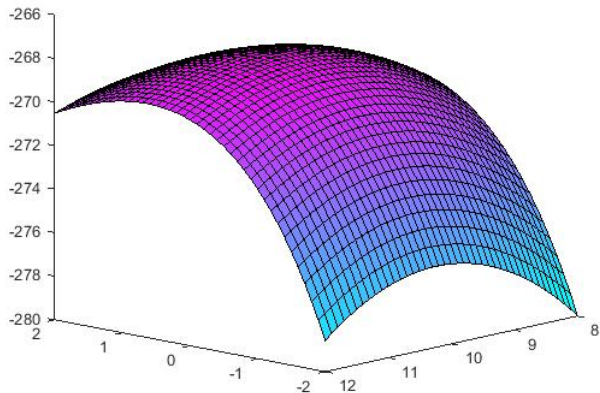
A testmagasság hisztogramja $n = 96$ elemű mintából és az $\bar{X} = 174,3$ várható értékű és $s_n^* = 11,5$ szórású normális eloszlás sűrűségfüggvénye (pirossal).

Likelihoodfüggvény



$n = 94$ elemű minta testmagasság-adatok alapján, normális eloszlást feltételezve.
Az átlag: $\bar{X} = 174,8$, a tapasztalati szórás $s_n = 10,5$.

Log-likelihoodfüggvény



$n = 94$ elemű minta testmagasság-adatok alapján, normális eloszlást feltételezve.
Az átlag: $\bar{X} = 174,8$, a tapasztalati szórás $s_n = 10,5$.

ML-becslés: normális eloszlás

X_1, \dots, X_n függetlenek, eloszlásuk normális eloszlás $m, \sigma > 0$ paraméterekkel. Ekkor

$$L_{n,m,\sigma}(X_1, \dots, X_n) = \prod_{j=1}^n f_{j,\vartheta}(X_j) = \prod_{j=1}^n \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(X_j - m)^2}{2\sigma^2}\right) \right].$$

ML-becslés: normális eloszlás

X_1, \dots, X_n függetlenek, eloszlásuk normális eloszlás $m, \sigma > 0$ paraméterekkel. Ekkor

$$L_{n,m,\sigma}(X_1, \dots, X_n) = \prod_{j=1}^n f_{j,\vartheta}(X_j) = \prod_{j=1}^n \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(X_j - m)^2}{2\sigma^2}\right) \right].$$

$$L_{n,m,\sigma}(X_1, \dots, X_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n \exp\left(-\sum_{j=1}^n \frac{(X_j - m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

ML-becslés: normális eloszlás

X_1, \dots, X_n függetlenek, eloszlásuk normális eloszlás $m, \sigma > 0$ paraméterekkel. Ekkor

$$L_{n,m,\sigma}(X_1, \dots, X_n) = \prod_{j=1}^n f_{j,\vartheta}(X_j) = \prod_{j=1}^n \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(X_j - m)^2}{2\sigma^2}\right) \right].$$

$$L_{n,m,\sigma}(X_1, \dots, X_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left(-\sum_{j=1}^n \frac{(X_j - m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

$$\log L_{n,m,\sigma}(X_1, \dots, X_n) = -n \log(\sqrt{2\pi}) - n \log \sigma - \sum_{j=1}^n \frac{(X_j - m)^2}{2\sigma^2}.$$

Rögzített σ mellett ez akkor maximális, ha a harmadik tagban $\sum_{j=1}^n (X_j - m)^2 = \sum_{j=1}^n X_j^2 - 2 \sum_{j=1}^n X_j m + nm^2$ minimális $\Rightarrow \hat{m} = \bar{X}$.

ML-becslés: normális eloszlás

$$\log L_{n,\sigma}(X_1, \dots, X_n) = -n \log(\sqrt{2\pi}) - n \log \sigma - \sum_{j=1}^n \frac{(X_j - \bar{X})^2}{2\sigma^2}.$$

A σ szerinti parciális derivált:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \log L_{n,\sigma}(X_1, \dots, X_n) = -\frac{n}{\sigma} + \sum_{j=1}^n \frac{(X_j - \bar{X})^2}{\sigma^3}.$$

Ez pontosan akkor pozitív, ha $\sigma^2 < \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2 = s_n^2$.

Tehát az ML-becslés:

$$\hat{m} = \bar{X}; \quad \hat{\sigma} = s_n = \sqrt{\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^2 \right) - \bar{X}^2}.$$

Tehát normális eloszlásnál az m paraméter becslése a mintaátlag, a szórásé a tapasztalati szórás.

Az ML-becslés tulajdonságai

- Nem minden statisztikai mezőn létezik ML-becslés.
- Az ML-becslés nem feltétlenül egyértelmű.
- Az ML-becslés nem feltétlenül torzítatlan.

Az ML-becslés tulajdonságai

- Nem minden statisztikai mezőn létezik ML-becslés.
- Az ML-becslés nem feltétlenül egyértelmű.
- Az ML-becslés nem feltétlenül torzítatlan.
- A $\psi(\vartheta)$ függvény ML-becslése $\psi(\hat{\vartheta})$, ahol $\hat{\vartheta}$ ML-becslés ϑ -ra.

Az ML-becslés tulajdonságai

- Nem minden statisztikai mezőn létezik ML-becslés.
- Az ML-becslés nem feltétlenül egyértelmű.
- Az ML-becslés nem feltétlenül torzítatlan.
- A $\psi(\vartheta)$ függvény ML-becslése $\psi(\hat{\vartheta})$, ahol $\hat{\vartheta}$ ML-becslés ϑ -ra.
- **Megfelelő feltételek** (erős regularitási feltételek mellett) az ML-becslés **aszimptotikusan torzítatlan**: a várható értéke ϑ -hoz tart $n \rightarrow \infty$ esetén, **aszimptotikusan hatásos** (vagyis minimális szórású) és **aszimptotikusan normális eloszlású**, azaz $\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta)$ normális eloszláshoz konvergál eloszlásban $n \rightarrow \infty$ esetén (a \mathbb{P}_ϑ valószínűségekre vonatkozóan).

Az ML-becslés tulajdonságai

- Nem minden statisztikai mezőn létezik ML-becslés.
- Az ML-becslés nem feltétlenül egyértelmű.
- Az ML-becslés nem feltétlenül torzítatlan.
- A $\psi(\vartheta)$ függvény ML-becslése $\psi(\hat{\vartheta})$, ahol $\hat{\vartheta}$ ML-becslés ϑ -ra.
- **Megfelelő feltételek** (erős regularitási feltételek mellett) az ML-becslés **aszimptotikusan torzítatlan**: a várható értéke ϑ -hoz tart $n \rightarrow \infty$ esetén, **aszimptotikusan hatásos** (vagyis minimális szórású) és **aszimptotikusan normális eloszlású**, azaz $\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta)$ normális eloszláshoz konvergál eloszlásban $n \rightarrow \infty$ esetén (a \mathbb{P}_ϑ valószínűségekre vonatkozóan).
- Az alábbi egyenlet a maximumlikelihood-egyenlet:

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} \log L_{n,\vartheta}(X_1, \dots, X_n) = 0.$$

Megfelelő feltételek mellett az ML-becslés a maximumlikelihood-egyenlet megoldása (ha az ML-becslés nem számítható ki, de az egyenlet megoldható, gyakran az egyenlet megoldásával helyettesítik az ML-becslést).

Az ML-becslés tulajdonságai

Megfelelő feltételek (erős regularitási feltételek mellett) az ML-becslés aszimptotikusan torzítatlan:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\hat{\vartheta}) = \vartheta;$$

aszimptotikusan hatásos (vagyis minimális szórású) és **aszimptotikusan normális eloszlású**, azaz

$$\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta)$$

normális eloszláshoz konvergál eloszlásban $n \rightarrow \infty$ esetén (a \mathbb{P}_ϑ valószínűsége vonatkozóan).

A normális és Poisson-eloszlás teljesíti ezeket a feltételeket, az egyenletes eloszlás nem.

Momentum módszer

Legyen X_1, \dots, X_n független azonos eloszlású minta.

- 1 Az eloszlás k . momentuma, ha ϑ az ismeretlen paraméter: $\mu_{k,\vartheta} = \mathbb{E}_{\vartheta}(X_1^k)$.
- 2 Legyen $\hat{\mu}_k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^k$ az eloszlás k . tapasztalati momentuma.
- 3 Írjuk fel az alábbi egyenleteket a legkisebb olyan k -ig, amire az egyenletrendszer egyértelműen meghatározza ϑ -t (**bár nincs mindig ilyen k**):

$$\mathbb{E}_{\vartheta}(X_1) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j;$$

$$\mathbb{E}_{\vartheta}(X_1^2) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^2;$$

...

$$\mathbb{E}_{\vartheta}(X_1^k) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^k.$$

- 4 A ϑ momentum módszerrel kapott becslése az a $\hat{\vartheta}$, ami megoldása a fenti egyenletrendszernek. **Nem mindig létezik, nem mindig egyértelmű, nem feltétlenül hatásos.**

Momentum módszer: Poisson- és exponenciális eloszlás

X_1, \dots, X_n független **Poisson-eloszlásúak** ismeretlen $\lambda > 0$ paraméterrel. A $k = 1$ -hez tartozó egyenlet:

$$\mathbb{E}_\lambda(X_1) = \bar{X}.$$

Mivel a λ paraméterű Poisson-eloszlás várható értéke λ :

$$\hat{\lambda} = \bar{X}.$$

Momentummódszer: Poisson- és exponenciális eloszlás

X_1, \dots, X_n független **Poisson-eloszlásúak** ismeretlen $\lambda > 0$ paraméterrel. A $k = 1$ -hez tartozó egyenlet:

$$\mathbb{E}_\lambda(X_1) = \bar{X}.$$

Mivel a λ paraméterű Poisson-eloszlás várható értéke λ :

$$\hat{\lambda} = \bar{X}.$$

X_1, \dots, X_n független **exponenciális** eloszlásúak ismeretlen $\lambda > 0$ paraméterrel. A $k = 1$ -hez tartozó egyenlet:

$$\mathbb{E}_\lambda(X_1) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j = \bar{X}.$$

Ez egyértelműen oldható meg λ -ra:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}}.$$

Momentum módszer: normális eloszlás

X_1, \dots, X_n független $N(m, \sigma^2)$ eloszlású minta (azaz normális eloszlású m várható értékkel és σ szórással).

A $k = 1$ -hez és $k = 2$ -höz tartozó egyenletek:

$$\mathbb{E}_{m,\sigma}(X_1) = m = \bar{X};$$

$$\mathbb{E}_{m,\sigma}(X_1^2) = \sigma^2 + m^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^2.$$

A másodikba beírva az elsőt: $\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^2 - \bar{X}^2 = s_n^2$ (a tapasztalati szórásnégyzet). Tehát az első két egyenlet együtt egyértelműen oldható meg, a momentum módszerrel kapott becslés:

$$\hat{m} = \bar{X}; \quad \hat{\sigma} = s_n.$$