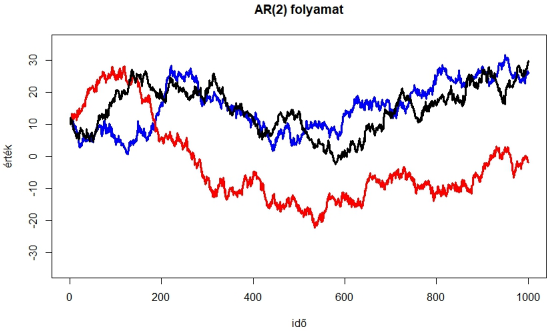
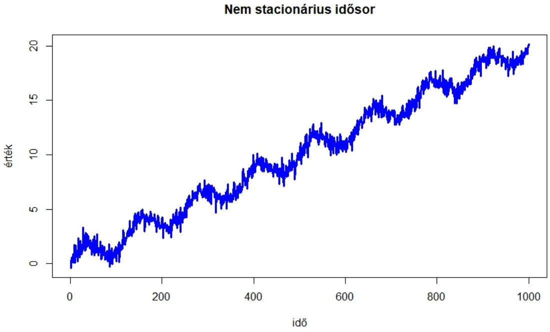
Idősorok elemzése (11. előadás)



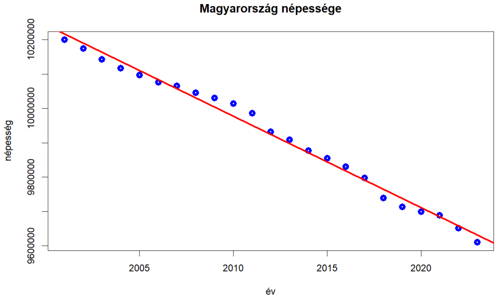
Példák idősorra: egy másodrendű autoregressziós folyamat

Idősorok elemzése



Nem stacionárius idősor (egy lineáris tag, egy periodikus tag és egy stacionárius idősor összege

Példák idősorra



Magyarország népessége 2001-től 2023-ig (forrás: Központi Statisztikai Hivatal) és a regressziós egyenes

Idősorok elemzése

Definíció

Az

$$X_0, X_1, X_2, X_3, \ldots, X_t, \ldots$$

valószínűségi változók sorozata idősor, ha az indexparaméter (sorszám) időpontként is értelmezhető.

Az idősorok általában **nem független** valószínűségi változókból állnak. Sőt, a következő értéket gyakran az előzőekből, egy véletlen hiba hozzáadásával számítjuk ki. Például lehet $X(1) = 10, X(2) = 12$, ezután pedig

$$X(t) = 0,7 \cdot X(t-1) + 0,3 \cdot X(t-2) + \varepsilon(t) \qquad t = 3, 4, \ldots \tag{1}$$

ahol $\varepsilon(3), \varepsilon(4), \ldots$ egymástól és az korábbi X-ektől független standard normális eloszlású valószínűségi változók. A korábbi ábrán ebből a modellből sorsolt három folyamatot láthatunk.

Autokovariancia-függvény

Az egyes időpontokhoz tartozó valószínűségi változók közötti (lineáris) összefüggés erősségét az alábbi függvénnyel mérhetjük meg.

Definíció

Az $X_1, X_2, \ldots$ idősor autokovariancia-függvénye:

$$R(s,t) = \mathrm{cov}(X_s, X_t) = \mathbb{E}(X_s X_t) - \mathbb{E}(X_s)\mathbb{E}(X_t).$$

Autokovariancia-függvény

Az egyes időpontokhoz tartozó valószínűségi változók közötti (lineáris) összefüggés erősségét az alábbi függvénnyel mérhetjük meg.

Definíció

Az $X_1, X_2, \ldots$ idősor autokovariancia-függvénye:

$$R(s,t) = \operatorname{cov}(X_s, X_t) = \mathbb{E}(X_s X_t) - \mathbb{E}(X_s)\mathbb{E}(X_t).$$

Itt $R(t,t) = \mathbb{E}(X_t^2) - \mathbb{E}(X_t)^2 = D^2(X_t)$ a t időpontban vett szórásnégyzet. Ha viszont s és t távolságát növeljük, akkor az X_s és X_t egyre távolabbi időpontokhoz tartoznak, így sok esetben annál gyengébb közöttük az összefüggés, annál kisebb a kovariancia értéke.

Idősorok elemzése

Az idősorok elemzésénél gyakran a következőképpen járunk el. Az idősort az alábbi három komponens összegére bontjuk (a 2. ábrán egy olyan idősor látszik, ami három ilyen tag összegeként lett előállítva):

- lineáris trend: $at + b$ alakú determinisztikus lineáris függvény;
- szezonális komponens: $f(t)$ determinisztikus periodikus függvény, melyre valamilyen h periódussal az igaz, hogy $f(t+h) = f(t)$ teljesül minden t-re;
- egy olyan X_t véletlen tag, melynek az eloszlása már t-től minél kevésbe függ, például a várható értéke és a szórása időben állandó, sőt például az X_s, X_t együttes eloszlása is csak attól függ, hogy s és t egymástól milyen messze vannak.

Ezek közül a harmadik komponens gyakran úgynevezett stacionárius folyamat.

Stacionárius folyamatok

Definíció

Az $X_0, X_1, X_2, \ldots$ *idősor* **gyengén stacionárius**, *ha*

- *várható értéke állandó:* $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_0)$ *minden* t*-re;*
- *a kovariancia csak az időpontok távolságától függ:*

$$R(s,t) = \operatorname{cov}(X_s, X_t) = \operatorname{cov}(X_0, X_{t-s}) = R(0, t-s).$$

Az $X_0, X_1, X_2, \ldots$ *idősor* **erősen stacionárius**, *ha tetszőleges* $n, t_1, t_2, \ldots, t_n$ *és* h *nemnegatív egészek esetén az*

$$\left(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}\right) \text{ és } \left(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \ldots, X_{t_n+h}\right)$$

valószínűségi vektorváltozók eloszlása megegyezik.

Egy erősen stacionárius idősor gyengén stacionárius, fordítva nem feltétlenül.

Autokorrelációs függvény

Stacionárius esetben a szórás is állandó, ezért az autokovariancia függvény mellett az autokorrelációs függvényt is gyakran használják.

Definíció

Egy gyengén stacioniárius idősor **autokorrelációs függvénye***:*

$$r(t) = \frac{R(0,t)}{R(0,0)} = \mathrm{corr}(X_s, X_{s+t}) = \frac{\mathrm{cov}(X_s, X_{s+t})}{D(X_s)^2}$$
$$= \frac{\mathbb{E}\big((X_s - \mathbb{E}(X_s))(X_{s+t} - \mathbb{E}(X_{s+t})\big)}{D^2(X_s)},$$

ahol $s \geq 0$ tetszőlegesen válaszható a gyenge stacionaritás tulajdonsága miatt, és corr *a két valószínűségi változó korrelációs együtthatóját jelöli.*

Az autokorrelációs függvény becslése

A várható érték a stacionárius esetben állandó, így az átlaggal torzítatlanul becsülhető.

Az autokorrelációs függvény becslése

A várható érték a stacionárius esetben állandó, így az átlaggal torzítatlanul becsülhető.

Legyen $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$ stacionárius idősorból származó n elemű minta. Az autokorrelációs függvény becslése:

$$\hat{r}(t) = \frac{\sum_{j=0}^{n-t-1} (X_j - \overline{X}) \cdot (X_{j+t} - \overline{X})}{(n-t) \cdot s_n^{*2}}.$$

Az autokorrelációs függvény becslése

A várható érték a stacionárius esetben állandó, így az átlaggal torzítatlanul becsülhető.

Legyen $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$ stacionárius idősorból származó n elemű minta. Az autokorrelációs függvény becslése:

$$\hat{r}(t) = \frac{\sum_{j=0}^{n-t-1}(X_j - \overline{X}) \cdot (X_{j+t} - \overline{X})}{(n-t) \cdot s_n^{*2}}.$$

Egy másik lehetőség, hogy a tagok száma helyett n-nel osztunk:

$$\hat{r}(t) = \frac{\sum_{j=0}^{n-t-1}(X_j - \overline{X}) \cdot (X_{j+t} - \overline{X})}{n \cdot s_n^{*2}}.$$

Az autokorrelációs függvény becslése

A várható érték a stacionárius esetben állandó, így az átlaggal torzítatlanul becsülhető.

Legyen $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$ stacionárius idősorból származó n elemű minta. Az autokorrelációs függvény becslése:

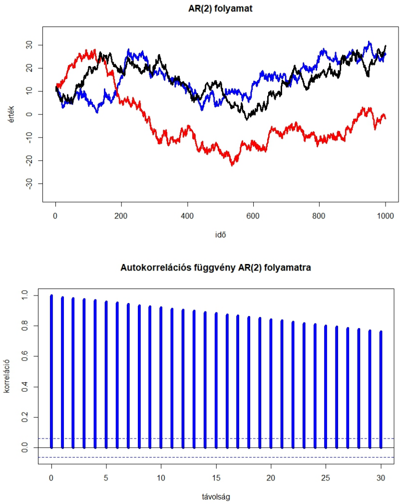
$$\hat{r}(t) = \frac{\sum_{j=0}^{n-t-1}(X_j - \overline{X}) \cdot (X_{j+t} - \overline{X})}{(n-t) \cdot s_n^{*2}}.$$

Egy másik lehetőség, hogy a tagok száma helyett n-nel osztunk:

$$\hat{r}(t) = \frac{\sum_{j=0}^{n-t-1}(X_j - \overline{X}) \cdot (X_{j+t} - \overline{X})}{n \cdot s_n^{*2}}.$$

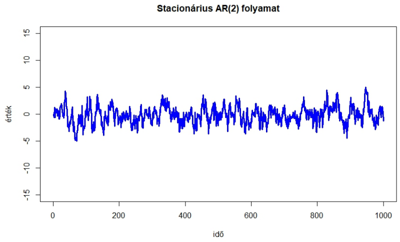
Egyik becslés sem torzítatlan $r(t)$-re, azaz $\mathbb{E}(\hat{r}(t))$ eltér $r(t)$-től. Ha `x` a megfigyelésekből álló vektor, akkor az R-ben az `acf(x)` paranccsal ábrázolható az autokorrelációs függvény becslése.

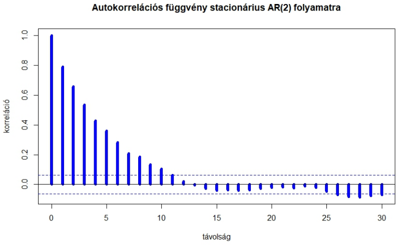
Az autokorrelációs függvény becslése



Az $X(t) = 0,7 \cdot X(t-1) + 0,3 \cdot X(t-2) + \varepsilon(t)$ folyamat három példánya, illetve az autokorrelációs függvényének becslése

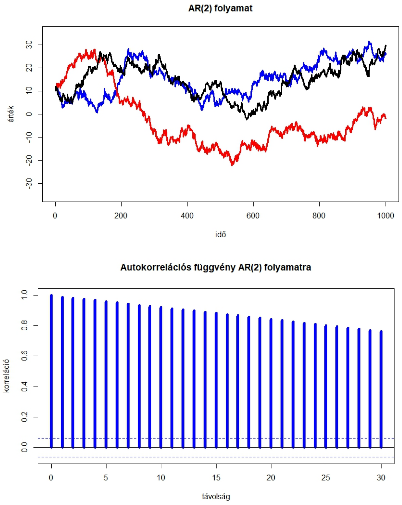
Az autokorrelációs függvény becslése





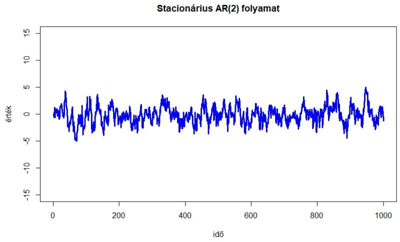
Az $X(t) = 0,7 \cdot X(t-1) + 0,1 \cdot X(t-2) + \varepsilon(t)$ egyenletű stacionárius $\mathrm{AR}(2)$ folyamat, illetve az autokorrelációs függvényének becslése

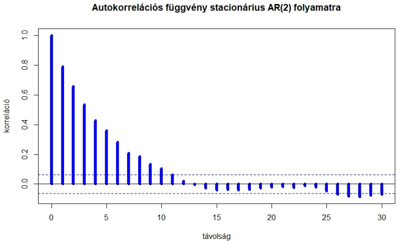
Az autokorrelációs függvény becslése



Az $X(t) = 0,7 \cdot X(t-1) + 0,3 \cdot X(t-2) + \varepsilon(t)$ folyamat három példánya, illetve az autokorrelációs függvényének becslése

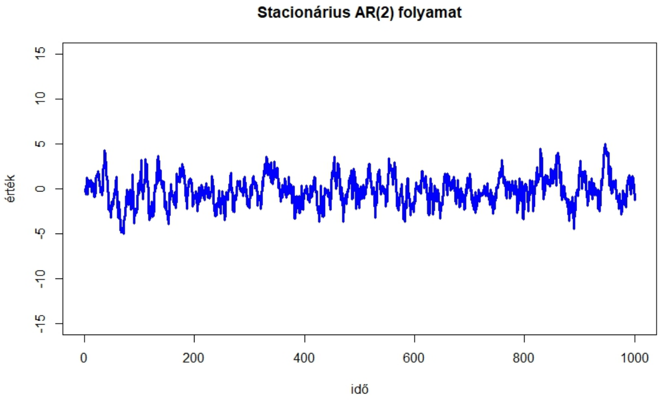
Az autokorrelációs függvény becslése





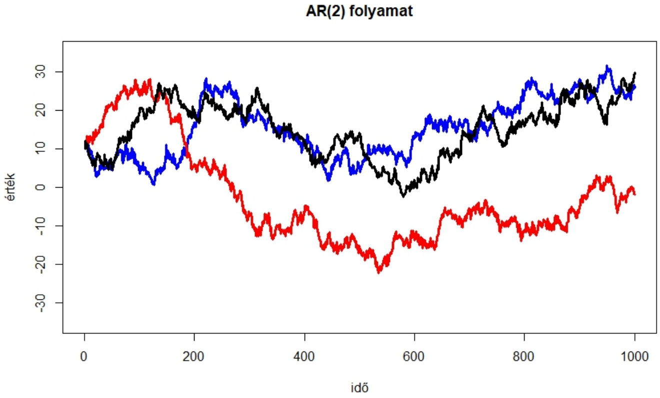
Az $X(t) = 0,7 \cdot X(t-1) + 0,1 \cdot X(t-2) + \varepsilon(t)$ egyenletű stacionárius $\mathrm{AR}(2)$ folyamat, illetve az autokorrelációs függvényének becslése

Autoregressziós folyamatok: stacionárius eset



$X(t) = 0,7 \cdot X(t-1) + 0,1 \cdot X(t-2) + \varepsilon(t)$ egyenletű $\mathrm{AR}(2)$-folyamat: $\varepsilon(t)$ független 0 várható értékű 1 szórású valószínűségi változó $t \geq 0$-ra (például normális eloszlásúak), és független $(X(0), \dots, X(t-1), \varepsilon(0), \dots, \varepsilon(t-1))$-től

Autoregressziós folyamatok: nem stacionárius eset



Az $X(t) = 0,7 \cdot X(t-1) + 0,3 \cdot X(t-2) + \varepsilon(t)$ egyenletű $\mathrm{AR}(2)$ folyamat három trajektóriája – **ez nem stacionárius**

Autoregressziós folyamatok

Definíció

Az $X(t)$ folyamat p **rendű autoregressziós folyamat**, *ha minden $t \geq p$-re*

$$X(t) = \alpha_1 X(t-1) + \alpha_2 X(t-2) + \ldots + \alpha_p X(t-p) + \sigma \cdot \varepsilon(t),$$

ahol $\varepsilon(t)$ minden $t \geq 0$-ra $N(0,1)$ eloszlású valószínűségi változó, és $X(0), \ldots, X(t-1)$-től és $\varepsilon(0), \ldots, \varepsilon(t-1)$-től is független. Jelölés: $\mathrm{AR}(p)$.

Az előző példában tehát $p = 2$ a rend, $\alpha_1 = 0,7$, $\alpha_2 = 0,3$ és $\sigma = 1$, valamint $\varepsilon(t)$ minden t-re normális eloszlású.

Autoregressziós folyamatok stacionárius megoldása

Állítás

Az elsőrendű autoregressziós folyamatnak pontosan akkor van erősen stacionárius megoldása, ha $|\alpha_1| < 1$.

Általában, egy $\mathrm{AR}(p)$ *folyamatnak pontosan akkor van erősen stacionárius megoldása, ha az* $x^p + \alpha_1 x^{p-1} + \alpha_2 x^{p-2} + \ldots + \alpha_p = 0$ *egyenlet minden gyökének (megoldásának) egynél kisebb az abszolút értéke.*

Autoregressziós folyamatok stacionárius megoldása

Állítás

Az elsőrendű autoregressziós folyamatnak pontosan akkor van erősen stacionárius megoldása, ha $|\alpha_1| < 1$*.*

Általában, egy $\mathrm{AR}(p)$ *folyamatnak pontosan akkor van erősen stacionárius megoldása, ha az* $x^p + \alpha_1 x^{p-1} + \alpha_2 x^{p-2} + \ldots + \alpha_p = 0$ *egyenlet minden gyökének (megoldásának) egynél kisebb az abszolút értéke.*

A stacionárius példában: $X(t) = 0,7 \cdot X(t-1) + 0,1 \cdot X(t-2) + \varepsilon(t)$

Autoregressziós folyamatok stacionárius megoldása

Állítás

Az elsőrendű autoregressziós folyamatnak pontosan akkor van erősen stacionárius megoldása, ha $|\alpha_1| < 1$.

Általában, egy $\mathrm{AR}(p)$ *folyamatnak pontosan akkor van erősen stacionárius megoldása, ha az* $x^p + \alpha_1 x^{p-1} + \alpha_2 x^{p-2} + \ldots + \alpha_p = 0$ *egyenlet minden gyökének (megoldásának) egynél kisebb az abszolút értéke.*

A stacionárius példában: $X(t) = 0,7 \cdot X(t-1) + 0,1 \cdot X(t-2) + \varepsilon(t)$

A másodfokú egyenlet: $x^2 + 0,7x + 0,1 = 0$

A megoldások:

$$\frac{-0,7 \pm \sqrt{0,7^2 - 4 \cdot 0,1}}{2} = -0,2 \text{ és } -0,5$$

Ezek egynél kisebb abszolút értékűek.

Autoregressziós folyamatok és rövid emlékezet

Állítás

Ha egy p-rendű autoregressziós folyamat gyengén stacionárius, azaz várható értéke állandó és a kovariancia csak a távolságtól függ, akkor az alábbiak teljesülnek az autokovariancia-függvényére:

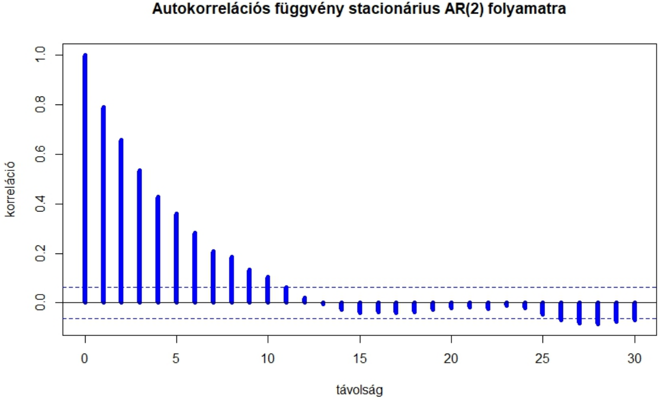
$$R(0) = \alpha_1 R(1) + \alpha_2 R(2) + \ldots + \alpha_p R(p) + \sigma^2;$$
$$R(t) = \alpha_1 R(t-1) + \alpha_2 R(t-2) + \ldots + \alpha_p R(t-p),$$

ahol $t \geq 1$ tetszőleges egész. Itt σ a hibatag szórása. Ebből az autokorrelációs függvényre az alábbi összefüggés adódik:

$$r(t) = \alpha_1 r(t-1) + \alpha_2 r(t-2) + \ldots + \alpha_p r(t-p).$$

A stacionárius autoregressziós folyamatok úgynevezett rövid emlékezetű folyamatok: $\sum_{t=0}^{\infty} R(t) < \infty$, azaz $\sum_{t=0}^{\infty} r(t) < \infty$.

Autoregressziós folyamatok és rövid emlékezet



Az $X(t) = 0,7 \cdot X(t-1) + 0,1 \cdot X(t-2) + \varepsilon(t)$ egyenletű stacionárius $\mathrm{AR}(2)$ folyamat autokorrelációs függvényének becslése

Az autokorrelációs függvény becslése

Általában az idősort leíró modellt nem ismerjük, és ezért a várható értéket, szórást, korrelációkat sem. A várható érték a stacionárius esetben állandó, így az átlaggal torzítatlanul becsülhető. Az autokorrelációs függvény becslésére az alábbi módszerek szokásosak.

Legyen $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$ stacionárius idősorból származó n elemű minta. Az autokorrelációs függvény becslése:

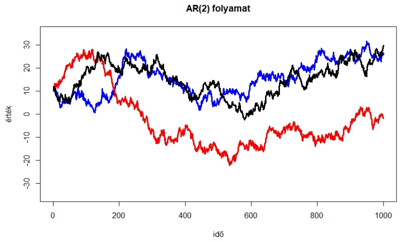
$$\hat{r}(t) = \frac{\sum_{j=0}^{n-t-1}(X_j - \overline{X}) \cdot (X_{j+t} - \overline{X})}{(n-t) \cdot s_n^{*2}}.$$

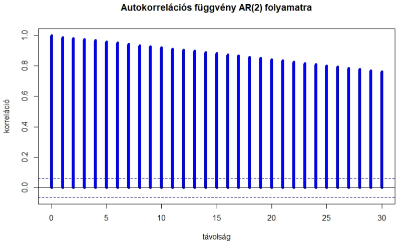
Egy másik lehetőség, hogy a tagok száma helyett n-nel osztunk:

$$\hat{r}(t) = \frac{\sum_{j=0}^{n-t-1}(X_j - \overline{X}) \cdot (X_{j+t} - \overline{X})}{n \cdot s_n^{*2}}.$$

Egyik becslés sem torzítatlan $r(t)$-re, azaz $\mathbb{E}(\hat{r}(t))$ eltér $r(t)$-től. Ha `x` a megfigyelésekből álló vektor, akkor az R-ben az `acf(x)` paranccsal ábrázolható az autokorrelációs függvény becslése.

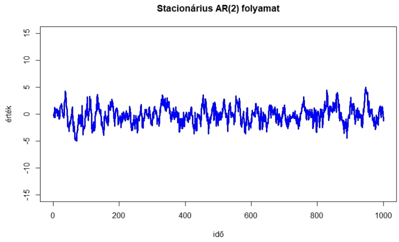
Az autokorrelációs függvény becslése

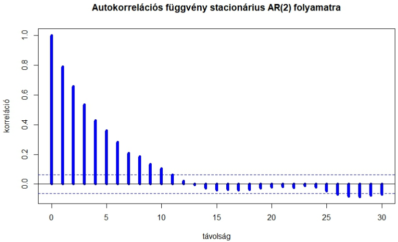




Az $X(t) = 0,7 \cdot X(t-1) + 0,3 \cdot X(t-2) + \varepsilon(t)$ folyamat három példánya, illetve az autokorrelációs függvényének becslése

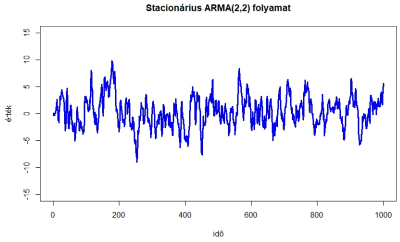
Az autokorrelációs függvény becslése

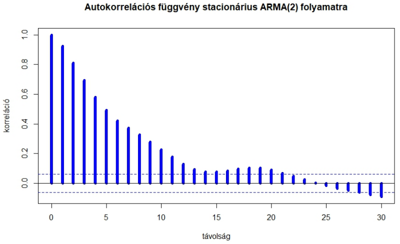




Az $X(t) = 0,7 \cdot X(t-1) + 0,1 \cdot X(t-2) + \varepsilon(t)$ egyenletű stacionárius $\mathrm{AR}(2)$ folyamat, illetve az autokorrelációs függvényének becslése

ARMA-folyamatok





Az $X(t) = 0,7 \cdot X(t-1) + 0,3 \cdot X(t-2) + 0,7 \cdot \varepsilon(t) + 0,2 \cdot \varepsilon(t-1) + 0,2 \cdot \varepsilon(t-2)$ egyenletű $\mathrm{ARMA}(2,2)$ stacioniárius folyamat

ARMA-folyamatok (általánosabb lineáris folyamatok)

Definíció

Legyenek $\varepsilon(t)$ *független* 0 *várható értékű* 1 *szórású valószínűségi változók* $t \geq 0$*-ra (például normális eloszlásúak). Az* $X(t)$ *folyamat* p, q*-rendű autoregressziós mozgóátlag-folyamat, ha minden* $t \geq p$*-re*

$$X(t) = \alpha_1 X(t-1) + \alpha_2 X(t-2) + \ldots + \alpha_p X(t-p) + \sum_{m=0}^{q} \beta_m \varepsilon(t-m).$$

Jelölés: $\mathrm{ARMA}(p, q)$.

ARMA-folyamatok (általánosabb lineáris folyamatok)

Definíció

Legyenek $\varepsilon(t)$ *független* 0 *várható értékű* 1 *szórású valószínűségi változók* $t \geq 0$*-ra (például normális eloszlásúak). Az* $X(t)$ *folyamat* p, q*-rendű autoregressziós mozgóátlag-folyamat, ha minden* $t \geq p$*-re*

$$X(t) = \alpha_1 X(t-1) + \alpha_2 X(t-2) + \ldots + \alpha_p X(t-p) + \sum_{m=0}^{q} \beta_m \varepsilon(t-m).$$

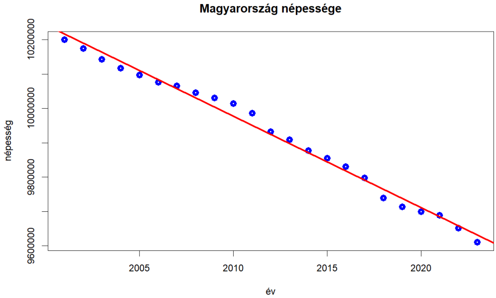
Jelölés: $\mathrm{ARMA}(p, q)$.

Például egy másodrendű autoregressziós $\mathrm{ARMA}(2,2)$ folyamat ($\alpha_1 = 0,7, \alpha_2 = 0,3, \beta_0 = 0,7, \beta_1 = 0,2, \beta_2 = 0,2$):

$$X(t) = 0,7 \cdot X(t-1) + 0,3 \cdot X(t-2) + 0,7 \cdot \varepsilon(t) + 0,2 \cdot \varepsilon(t-1) + 0,2 \cdot \varepsilon(t-2).$$

A stacionárius ARMA-folyamatok **rövid emlékezetűek**: $\sum_{t=1}^{\infty} R(t) < \infty$, azaz $\sum_{t=1}^{\infty} r(t) < \infty$.

Autoregressziós folyamat illesztése



Magyarország népessége 2001-től 2023-ig (forrás: Központi Statisztikai Hivatal) és a regressziós egyenes

Autoregressziós folyamat illesztése és előrejelzés

- Feltételezés (itt $N(t)$ a népesség a t időpontban, és szezonális komponens nem várható):
$$N(t) = at + b + X(t),$$
ahol $X(t)$ stacionárius (ebből következik, hogy az eloszlása minden t-re azonos);
- lineáris regresszióval meghatározzuk az a és b paraméterek becslését;
- az $X(t) = N(t) - \hat{a}t - \hat{b}$ folyamatra egy autoregressziós folyamatot illesztünk:
$$X(t) = \hat{\alpha}_1 X(t-1) + \hat{\alpha}_2 X(t-2) + \ldots + \hat{\alpha}_p X(t-p) + \hat{\sigma}\varepsilon(t);$$
- ebből $N(t)$-re is megkapjuk az illesztett modellt, a lineáris trend $X(t)$-hez való hozzáadásával;

Autoregressziós folyamat illesztése és előrejelzés

- Feltételezés (itt $N(t)$ a népesség a t időpontban, és szezonális komponens nem várható):
$$N(t) = at + b + X(t),$$
ahol $X(t)$ stacionárius (ebből következik, hogy az eloszlása minden t-re azonos);
- lineáris regresszióval meghatározzuk az a és b paraméterek becslését;
- az $X(t) = N(t) - \hat{a}t - \hat{b}$ folyamatra egy autoregressziós folyamatot illesztünk:
$$X(t) = \hat{\alpha}_1 X(t-1) + \hat{\alpha}_2 X(t-2) + \ldots + \hat{\alpha}_p X(t-p) + \hat{\sigma}\varepsilon(t);$$
- ebből $N(t)$-re is megkapjuk az illesztett modellt, a lineáris trend $X(t)$-hez való hozzáadásával;
- előrejelzés: az újabb hibatagokat nullának tekintjük (hiszen 0 várható értékűek, és függetlenek az előző megfigyelésektől, hibatagoktól):
$$\hat{X}(t+1) = \hat{\alpha}_1 X(t) + \hat{\alpha}_2 X(t-1) + \ldots + \hat{\alpha}_p X(t-p+1).$$
Ebből:
$$\hat{N}(t+s) = \hat{a}(t+s) + \hat{b} + \hat{X}(t+s).$$

Autoregressziós folyamat illesztése

```
ev<-2001:2023
```

```
nep<-c(10200298, 10174853, 10142362, 10116742, 10097549, 10076581,
10066158, 10045401, 10030975, 10014324, 9985722, 9931925, 9908798,
9877365, 9855571, 9830485, 9797561, 9739857, 9713655, 9700272, 96893
9651461, 9610403)
```

```
summary(lm(nep~ev))
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(>|t|)
(Intercept)	63442461.4	1202606.9	52.75	<2e-16 ***
ev	-26599.5	597.7	-44.50	<2e-16 ***

```
plot(nep~ev, lwd="5", col="blue", main="Magyarország népessége",
xlab="év", ylab="népesség")
```

```
lines(abline(b=-26599.5, a=63442461.4, lwd="3", col="red"),
xlim=c(2000, 2020))
```

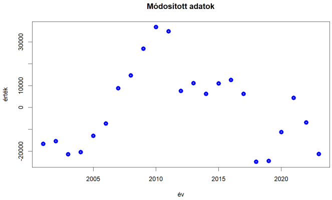
Autoregressziós folyamat illesztése a népesség adatokra

$$X(t) = N(t) - \hat{a} \cdot t - \hat{b},$$

ahol $N(t)$ a népesség a t időpontban, a regressziós egyenes pedig $\hat{a}x + \hat{b}$ egyenletű.

```
x<-nep+26599.5*ev-63442461.4
```

```
plot(x~ev, lwd="5", col="blue", main="Módosított adatok", xlab="év"
ylab="érték")
```



Magyarország népessége 2001-től 2023-ig a lineáris trend eltávolítása után

Autoregressziós folyamat illesztése a népesség adatokra

$$X(t) = N(t) - \hat{a}t - \hat{b}.$$

Erről feltételezzük, hogy stacionárius eloszlású autoregressziós folyamat.

$$X(t) = \alpha_1 X(t-1) + \alpha_2 X(t-2) + \ldots + \alpha_p X(t-p) + \sigma\varepsilon(t),$$

ahol $\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \sigma$ és maga p is ismeretlenek, a $\varepsilon(t)$ valószínűségi változók pedig függetlenek, 0 várható értékűek, 1 szórásúak.

- adott p mellett hogyan becsüljük a paramétereket?

Autoregressziós folyamat illesztése a népesség adatokra

$$X(t) = N(t) - \hat{a}t - \hat{b}.$$

Erről feltételezzük, hogy stacionárius eloszlású autoregressziós folyamat.

$$X(t) = \alpha_1 X(t-1) + \alpha_2 X(t-2) + \ldots + \alpha_p X(t-p) + \sigma\varepsilon(t),$$

ahol $\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \sigma$ és maga p is ismeretlenek, a $\varepsilon(t)$ valószínűségi változók pedig függetlenek, 0 várható értékűek, 1 szórásúak.

- adott p mellett hogyan becsüljük a paramétereket? például maximumlikelihood-becsléssel
- hogyan válasszuk ki a legjobb p-t? minél nagyobb, annál több paraméter van, annál jobb lehet az illeszkedés
- ha p-t nagyra választjuk, előfordulhat a **túltanulás (overfitting)** jelensége: túl sok szabad paraméter van az adatsor méretéhez képest, és valójában nem az összefüggési struktúrát, hanem a véletlen hibákat "tanuljuk meg", ez viszont nem jó az előrejelzésnél

A rend és a paraméterek becslése

Az autoregressziós folyamat illesztése ezért a következő módon működhet (ez az **Akaike-féle információs kritérium** elve, de lehetnek más módszerek is természetesen):

- többféle különböző p-t tekintünk külön-külön
- ezekre a rögzített p-re meghatározzuk, hogy melyik az $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \sigma$ paraméterbeállítás, amire a megfigyelt folyamat likelihood-függvénye a legnagyobb, vagyis maximumlikelihood-becslést végzünk
- minden p-re az így kapott maximális likelihood értéket megszorozzuk egy p-től függő tényezővel, ami annál kisebb, minél nagyobb p (ez a tag „bünteti” a túl sok paraméter választását)
- végül azt a p-t és azokat az együtthatókat választjuk, ahol a szorzat a legnagyobb.

Autoregressziós folyamat illesztése a népesség adatokra

A példában a kiválasztott rend $p = 1$ lesz (itt $n = 23$, így a paraméterek száma sem lehet túl nagy):

```
> ar(x)     # autoregressziós modellt illesztünk

Call:  ar(x = x)

Coefficients:
     1
 0.7391

Order selected 1     sigma^2 estimated as 164066222
```

Tehát az Akaike-féle információs kritérium szerint illesztett autoregressziós folyamat:

$$X(t) = 0,74 \cdot X(t-1) + 12808 \cdot \varepsilon(t),$$

ahol $\varepsilon(t)$ korrelálatlan, 0 várható értékű 1 szórású valószínűségi változók.

A népesség létszámának előrejelzése

Az előrejelzés a módosított idősorban az $X(2024)$ várható értéke (`predict(ar(x), n.ahead=1)`):

$$\hat{X}(2024) = 0,74 \cdot X(2023) = 0,74 \cdot (-21269,9) = -15725$$

A népesség létszámának előrejelzése

Az előrejelzés a módosított idősorban az $X(2024)$ várható értéke (`predict(ar(x), n.ahead=1)`):

$$\hat{X}(2024) = 0,74 \cdot X(2023) = 0,74 \cdot (-21269,9) = -15725$$

Ahhoz, hogy az eredeti idősorra vonatkozó előrejelzést megkapjuk, hozzá kell adni a regressziós egyenesből kapott értéket:

$$\begin{aligned}\hat{N}(2024) &= \hat{a} \cdot 2024 + \hat{b} + \hat{X}(2024) = \\ &= -26599,5 \cdot 2024 + 63442461,4 - 15725 = 9589348.\end{aligned}$$

A népesség létszámának előrejelzése

Az előrejelzés a módosított idősorban az $X(2024)$ várható értéke (`predict(ar(x), n.ahead=1)`):

$$\hat{X}(2024) = 0,74 \cdot X(2023) = 0,74 \cdot (-21269,9) = -15725$$

Ahhoz, hogy az eredeti idősorra vonatkozó előrejelzést megkapjuk, hozzá kell adni a regressziós egyenesből kapott értéket:

$$\hat{N}(2024) = \hat{a} \cdot 2024 + \hat{b} + \hat{X}(2024) =$$
$$= -26599,5 \cdot 2024 + 63442461,4 - 15725 = 9589348.$$

A valós adat: $N(2024) = 9584627$. Ez $0,05\%$-os relatív hibát jelent.

Ha az idősorelemzést kihagyva, csak a lineáris regresszióval számoltunk volna:

$$-26599,5 \cdot 2024 + 63442461,4 = 9605073.$$

Ez $0,2\%$-os relatív hiba, lényegesen nagyobb (természetesen az adatsor kis mérete miatt esetleges, hogy melyik becslés vezet jobb eredményhez).