

Fisher–Bartlett-tétel (8. előadás)

Valójában az eloszlás valódi szórása a legtöbb esetben nem ismert. A σ szórást az s_n^* korrigált tapasztalati szórással helyettesítjük. Kérdés, hogyan változik így az eloszlás.

Tétel (Fisher–Bartlett)

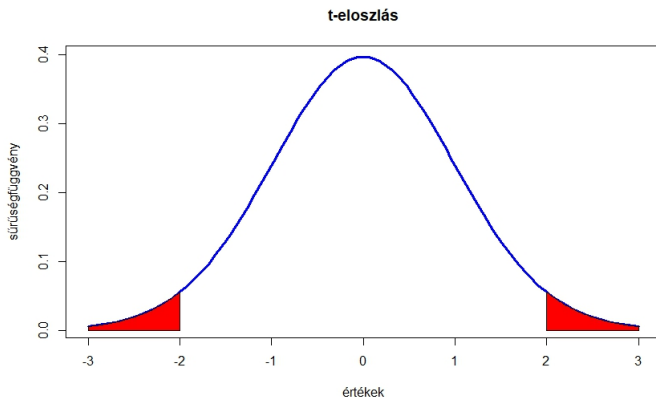
Tegyük fel, hogy X_1, X_2, \dots, X_n független m várható értékű, σ szórású, **normális eloszlású** valószínűségi változók. Ekkor

- 1 $\bar{X} \sim N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$;
- 2 \bar{X} és s_n^* függetlenek;
- 3 $(n-1)s_n^{*2}/\sigma^2$ eloszlása $n-1$ szabadsági fokú χ^2 -eloszlás;
- 4 $\frac{\bar{X}-m}{s_n^*} \cdot \sqrt{n}$ eloszlása $n-1$ szabadsági fokú t -eloszlás.

Itt

$$s_n^* = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2} = \sqrt{\frac{n}{n-1} \left(\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^2 \right) - \bar{X}^2 \right)}.$$

t -eloszlás kritikus értékei



Az $f = 59$ szabadsági fokú $\alpha = 0,05$ terjedelmű kétoldali t -próba kritikus értéke:
 $t_{59,0,05} = 2,001$.

Konfidenciaintervallum a várható értékre

Legyenek Z_0, Z_1, \dots, Z_n független $N(0, 1)$ eloszlásúak, és $t_{f, \alpha}$ az f szabadsági fokú α terjedelmű kétoldali t -próba kritikus értéke, azaz az f szabadsági fokú t -eloszlás $1 - \alpha/2$ -kvantilise:

$$1 - \alpha/2 = \mathbb{P}(Y \leq t_{f, \alpha}) = \mathbb{P}\left(\frac{Z_0}{\sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_f^2}} \leq t_{f, \alpha}\right).$$

Az $Y = \frac{Z_0}{\sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_f^2}}$ valószínűségi változó eloszlása f szabadsági fokú **t -eloszlás**.

Konfidenciaintervallum a várható értékre

Legyenek Z_0, Z_1, \dots, Z_n független $N(0, 1)$ eloszlásúak, és $t_{f, \alpha}$ az f szabadsági fokú α terjedelmű kétoldali t -próba kritikus értéke, azaz az f szabadsági fokú t -eloszlás $1 - \alpha/2$ -kvantilise:

$$1 - \alpha/2 = \mathbb{P}(Y \leq t_{f, \alpha}) = \mathbb{P}\left(\frac{Z_0}{\sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_f^2}} \leq t_{f, \alpha}\right).$$

Az $Y = \frac{Z_0}{\sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_f^2}}$ valószínűségi változó eloszlása f szabadsági fokú **t -eloszlás**.

Állítás (Konfidenciaintervallum a várható értékre, ismeretlen szórás)

Tegyük fel, hogy X_1, \dots, X_n független $N(m, \sigma^2)$ normális eloszlású valószínűségi változók (m, σ ismeretlenek). Ekkor a

$$(T_1, T_2) = \left(\bar{X} - t_{n-1, \alpha} \cdot \frac{S_n^*}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{n-1, \alpha} \cdot \frac{S_n^*}{\sqrt{n}} \right)$$

intervallum $1 - \alpha$ megbízhatósági szintű kétoldali konfidenciaintervallum az eloszlás várható értékére.

Példa konfidenciaintervallumra

Minta: vércukorszint-értékek, tegyük fel, hogy ez **normális eloszlású**, szórása nem ismert.

$n = 60$ (méret), $\bar{X} = 5,99$ (átlag), $s_n^* = 0,18$ (korigált tapasztalati szórás)

Adjunk meg olyan intervallumot, ami legalább 95% valószínűséggel tartalmazza a vércukorszint valódi várható értékét.

megbízhatósági szint: $1 - \alpha = 95\%$, azaz $\alpha = 0,05$. Az $f = 59$ szabadsági fokú $\alpha = 0,05$ terjedelmű kétoldali t -próba kritikus értéke: $t_{59,0,975} = 2$.

95 %-os megbízhatósági szintű konfidenciaintervallum a várható értékre:

$$\left(5,99 - 2 \cdot \frac{0,18}{\sqrt{60}}, 5,99 + 2 \cdot \frac{0,18}{\sqrt{60}} \right) = (5,94; 6,04).$$

Hosszabb intervallumot kaptunk, mint ismert szórás esetén.

Egyoldali konfidenciaintervallum a várható értékre

Állítás (Egyoldali konfidenciaintervallum)

Tegyük fel, hogy X_1, \dots, X_n független $N(m, \sigma^2)$ normális eloszlású valószínűségi változók (m, σ ismeretlenek). Ekkor a

$$\left(-\infty, \bar{X} + \bar{t}_{n-1, 1-\alpha} \cdot \frac{s_n^*}{\sqrt{n}} \right)$$

intervallum $1 - \alpha$ megbízhatósági szintű **egyoldali konfidenciaintervallum** az eloszlás várható értékére.

Itt $\bar{t}_{n-1, 1-\alpha/2}$ az $f = n-1$ szabadsági fokú α terjedelmű **egyoldali t-próba** kritikus értéke.

Konfidenciaintervallum a szórásra

Fisher–Bartlett-tétel:

$$\frac{(n-1)s_n^{*2}}{\sigma^2} = \frac{\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2,$$

azaz a hányados eloszlása $n-1$ szabadsági fokú χ^2 -eloszlás (ami megegyezik $Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_{n-1}^2$ eloszlásával, ahol Z_j -k független standard normális eloszlásúak).

Állítás

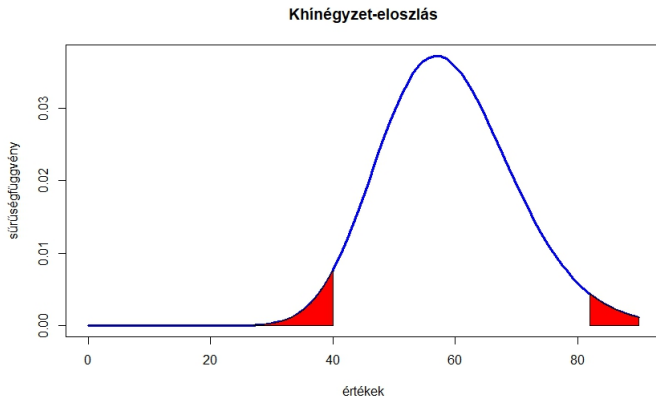
Legyen X_1, X_2, \dots, X_n független normális eloszlású minta. Ekkor az eloszlás σ^2 szórásnégyzetére $1 - \alpha$ megbízhatósági szintű konfidenciaintervallum az alábbi:

$$(T_1, T_2) = \left(\frac{\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2}{c_{n-1, 1-\alpha/2}}; \frac{\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2}{c_{n-1, \alpha/2}} \right),$$

ahol $c_{f,q}$ az f -szabadsági fokú q terjedelmű χ^2 -próba kritikus értéke, azaz az f szabadsági fokú χ^2 -eloszlás q -kvantilise.

Ezzel a választással nem a legrövidebb intervallumot kapjuk.

A χ^2 -eloszlás kvantilisei



Az $f = 59$ szabadsági fokú χ^2 -próba kvantilisei $q = \alpha/2 = 0,025$ -tel és $q = 1 - \alpha/2 = 0,975$ -tel.

Konfidenciaintervallum a valószínűsége

Az A esemény valószínűsége $p \in [0, 1]$ ismeretlen paraméter. Ezt szeretnénk megbecsülni. Ha n kísérletből az A esemény X -szer következett be:

$$\mathbb{E}_p(X) = np; \quad D_p(X) = \sqrt{np(1-p)}; \quad \mathbb{E}_p\left(\frac{X}{n}\right) = p; \quad D_p\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}.$$

$X \sim \text{Bin}(n, p)$ binomiális eloszlású, viszont a relatív gyakoriságot, X/n -t nem tudjuk egyetlen eloszlással közelíteni.

Viszont a centrális határeloszlástétel alapján X/n eloszlását \hat{p} várható értékű, $\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{\sqrt{n}}$ szórású normális eloszlással közelíthetjük, ahol \hat{p} az esemény relatív gyakorisága a mintában.

$1 - \alpha$ megbízhatósági szintű konfidenciaintervallum p -re:

$$\left(\hat{p} - \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}}; \hat{p} + \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}} \right).$$

Konfidenciaintervallum az ML-becslés alapján

Ha likelihoodfüggvény teljesít bizonyos regularitási feltételeket, akkor a ϑ paraméternek az X_1, X_2, \dots, X_n mintából számolt $\hat{\vartheta}_n$ maximumlikelihood-becslése

- létezik;
- aszimptotikusan torzítatlan: $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\vartheta}(\hat{\vartheta}_n) = \vartheta$ minden $\vartheta \in \Theta$ -ra;
- aszimptotikusan hatásos: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{nl_1(\vartheta)} D_{\vartheta}(\hat{\vartheta}_n) = 1$ minden $\vartheta \in \Theta$ -ra;
- aszimptotikusan normális eloszlású: $\sqrt{nl_1(\vartheta)}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta)$ eloszlásban tart a standard normális eloszláshoz minden $\vartheta \in \Theta$ -ra $n \rightarrow \infty$ esetén.

Konfidenciaintervallum az ML-becslés alapján

Ha likelihoodfüggvény teljesít bizonyos regularitási feltételeket, akkor a ϑ paraméternek az X_1, X_2, \dots, X_n mintából számolt $\hat{\vartheta}_n$ maximumlikelihood-becslése

- létezik;
- aszimptotikusan torzítatlan: $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\vartheta}(\hat{\vartheta}_n) = \vartheta$ minden $\vartheta \in \Theta$ -ra;
- aszimptotikusan hatásos: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{nI_1(\vartheta)}D_{\vartheta}(\hat{\vartheta}_n) = 1$ minden $\vartheta \in \Theta$ -ra;
- aszimptotikusan normális eloszlású: $\sqrt{nI_1(\vartheta)}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta)$ eloszlásban tart a standard normális eloszláshoz minden $\vartheta \in \Theta$ -ra $n \rightarrow \infty$ esetén.

Ez alapján **aszimptotikus** konfidenciaintervallum, ami $n \rightarrow \infty$ esetén $1 - \alpha$ -hoz tartó valószínűséggel tartalmazza ϑ -t:

$$\left(\hat{\vartheta}_n - \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\hat{I}_n(\vartheta)}}; \hat{\vartheta}_n + \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\hat{I}_n(\vartheta)}} \right),$$

ahol $\hat{I}_n(\vartheta) = n \cdot I_1(\hat{\vartheta}_n)$, vagyis a Fisher-információ kifejezésébe a maximumlikelihood-becslést írjuk be.

Hipotézisvizsgálat

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ paraméteres statisztikai mező, azaz $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$ valamilyen Θ paraméterterrel. A paraméterteret bontsuk fel két diszjunkt halmaz uniójára: $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$, ahol tehát $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$.

Nullhipotézis. $H_0 : \vartheta \in \Theta_0$.

Ellenhipotézis. $H_1 : \vartheta \in \Theta_1$.

Hipotézisvizsgálat

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ paraméteres statisztikai mező, azaz $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$ valamilyen Θ paraméterterrel. A paraméterteret bontsuk fel két diszjunkt halmaz uniójára: $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$, ahol tehát $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$.

Nullhipotézis. $H_0 : \vartheta \in \Theta_0$.

Ellenhipotézis. $H_1 : \vartheta \in \Theta_1$.

A minta $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$, a mintatér legyen B (vagyis (X_1, \dots, X_n) a $B \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz egy véletlen eleme). A mintatérrel is felbontjuk két diszjunkt halmaz uniójára: $B = B_0 \cup B_1$, ahol $B_0 \cap B_1 = \emptyset$.

Elfogadási tartomány: B_0 . Ha $(X_1, \dots, X_n) \in B_0$, akkor H_0 -t elfogadjuk.

Elutasítási (kritikus) tartomány: B_1 . Ha $(X_1, \dots, X_n) \in B_1$, akkor H_0 -t elutasítjuk.

Tehát a nullhipotézist akkor fogadjuk el, ha a minta az elfogadási tartományba esik, különben elutasítjuk.

Hipotézisvizsgálat

Nullhipotézis (null hypothesis). $H_0 : \vartheta \in \Theta_0$.

Ellenhipotézis (alternative hypothesis). $H_1 : \vartheta \in \Theta_1$.

- **Elsőfajú hibát** vétünk, ha H_0 igaz, és elutasítjuk.
- A próba **szignifikanciaszintje vagy terjedelme** (level of significance):

$$\alpha = \sup_{\vartheta \in \Theta_0} \mathbb{P}_{\vartheta}(\underline{X} \in B_1).$$

- **Másodfajú hibát** vétünk, ha H_0 nem igaz, és elfogadjuk.
- A próba **erőfüggvénye** az alábbi $\beta : \Theta_1 \rightarrow [0, 1]$ függvény:

$$\beta(\vartheta) = \mathbb{P}_{\vartheta}(\underline{X} \in B_1) \quad (\vartheta \in \Theta_1).$$

Hipotézisvizsgálat: p -érték

Definíció

Egy hipotézisvizsgálati feladatban a p -érték (p -value) a legnagyobb olyan szignifikanciaszint, ami mellett H_0 -t elfogadjuk.

Vagyis ha α a szignifikanciaszint, akkor

$p < \alpha$ esetén elutasítjuk H_0 -t, szignifikáns eltérés H_0 -tól.

$p \geq \alpha$ esetén elfogadjuk H_0 -t, nincs szignifikáns eltérés H_0 -tól, nem volt elég bizonyíték H_1 -re.

A szokásos $\alpha = 0,05$ értékkel: $p < 0,05$ esetén **elutasítjuk a nullhipotézist, szignifikáns eltérés van**, különben elfogadjuk a nullhipotézist, nincs szignifikáns eltérés.

Nagy mintaelemszám esetén kis eltérés is szignifikáns. A próba ereje használható annak ellenőrzésére, hogy nem volt-e túl érzékeny az eljárás.

Próbák tulajdonságai

- A próba **szignifikanciaszintje vagy terjedelme** (level of significance) az elsőfajú hiba valószínűségének szuprémuma:

$$\alpha = \sup_{\vartheta \in \Theta_0} \mathbb{P}_{\vartheta}(\underline{X} \in B_1).$$

- A próba **erőfüggvénye** az alábbi $\beta : \Theta_1 \rightarrow [0, 1]$ függvény:

$$\beta(\vartheta) = \mathbb{P}_{\vartheta}(\underline{X} \in B_1) \quad (\vartheta \in \Theta_1).$$

- Azonos terjedelmű próbák közül az az **erősebb**, amelynek az erőfüggvénye minden $\vartheta \in \Theta_1$ -re nagyobb vagy egyenlő, mint a másiké:

$$\beta^*(\vartheta) = \mathbb{P}_{\vartheta}(\underline{X} \in B_1^*) \geq \beta(\vartheta) = \mathbb{P}_{\vartheta}(\underline{X} \in B_1) \quad (\vartheta \in \Theta_1).$$

- Egy próbából álló sorozat **konzisztens**, ha az erőfüggvénye 1-hez tart minden $\vartheta \in \Theta_1$ -re.
- Egy próba **torzítatlan**, ha

$$\mathbb{P}_{\vartheta_0}(\underline{X} \in B_1) \leq \mathbb{P}_{\vartheta_1}(\underline{X} \in B_1)$$

minden $\vartheta_0 \in \Theta_0$ -ra és $\vartheta_1 \in \Theta_1$ -re.

Neyman–Pearson-lemma

Tegyük fel, hogy a paraméterter két elemből áll: $\Theta = \{\vartheta_0, \vartheta_1\}$. A likelihood-függvények: $L_{n,0}$ illetve $L_{n,1}$.

Likelihood-hányados próba: válasszunk egy c számot. Ha

$$\frac{L_{n,1}(X_1, \dots, X_n)}{L_{n,0}(X_1, \dots, X_n)} \geq c$$

akkor utasítsuk el a nullhipotézist, különben fogadjuk el.

Lemma (Neyman–Pearson-lemma, 1. rész)

Tegyük fel, hogy a likelihood-hányados próba szignifikanciaszintje α . Ekkor a likelihood-hányados próba a legerősebb próba a legfeljebb α szignifikanciaszintű próbák között.

Például: ϑ_0 esetén indikátor eloszlás 0,2 paraméterrel, ϑ_1 esetén indikátor eloszlás 0,9 paraméterrel. Ha 10 megfigyelésből k -nál következik be az esemény:

$$\frac{L_{n,1}(X_1, \dots, X_n)}{L_{n,0}(X_1, \dots, X_n)} = \frac{\binom{10}{k} 0,9^k 0,1^{n-k}}{\binom{10}{k} 0,2^k 0,8^{n-k}} = \left(\frac{0,9}{0,2}\right)^k \left(\frac{0,1}{0,8}\right)^{n-k}.$$

Ez annál nagyobb, minél nagyobb k . Elutasítjuk H_0 -t, ha $k \geq k_0$ megfelelő k_0 -al.

Neyman–Pearson-lemma

Például: ϑ_0 esetén indikátor eloszlás 0,2 paraméterrel, ϑ_1 esetén indikátor eloszlás 0,9 paraméterrel. Legyen X az, hogy 10 megfigyelésből hányszor következik be az esemény. A Neyman–Pearson-lemma szerint akkor utasítjuk el H_0 -t, ha $X \geq k_0$ megfelelő k_0 -al.

Ha $k_0 = 5$: az elsőfajú hiba valószínűsége még megfelelő:

$$\mathbb{P}_0(X \geq 5) = \sum_{j=5}^{10} \binom{10}{j} 0,2^j 0,8^{10-j} = 0,033 \leq 0,05.$$

Ha $k_0 = 4$: az elsőfajú hiba valószínűsége túl nagy:

$$\mathbb{P}_0(X \geq 4) = \sum_{j=4}^{10} \binom{10}{j} 0,2^j 0,8^{10-j} = 0,12 > 0,05.$$

Neyman–Pearson-lemma

Például: ϑ_0 esetén indikátor eloszlás 0,2 paraméterrel, ϑ_1 esetén indikátor eloszlás 0,9 paraméterrel. Legyen X az, hogy 10 megfigyelésből hányszor következik be az esemény. A Neyman–Pearson-lemma szerint akkor utasítjuk el H_0 -t, ha $X \geq k_0$ megfelelő k_0 -al.

Ha $k_0 = 5$: az elsőfajú hiba valószínűsége még megfelelő:

$$\mathbb{P}_0(X \geq 5) = \sum_{j=5}^{10} \binom{10}{j} 0,2^j 0,8^{10-j} = 0,033 \leq 0,05.$$

Ha $k_0 = 4$: az elsőfajú hiba valószínűsége túl nagy:

$$\mathbb{P}_0(X \geq 4) = \sum_{j=4}^{10} \binom{10}{j} 0,2^j 0,8^{10-j} = 0,12 > 0,05.$$

Pontosan $\alpha = 0,05$ terjedelem: $X \geq 5$ esetén biztosan, $X = 4$ esetén 19% valószínűséggel utasítjuk el a nullhipotézist ($0,19 \cdot \mathbb{P}_0(X = 4) = 0,05 - 0,03$). Ez legerősebb próba a legfeljebb $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszintű próbák között, és erősebb, mint a $k_0 = 5$ -tel kapott determinisztikus próbáé.

Véletlenített próba

Tegyük fel, hogy a paramétertér két elemből áll: $\Theta = \{\vartheta_0, \vartheta_1\}$. A likelihood-függvények: $L_{n,0}$ illetve $L_{n,1}$.

Likelihood-hányados próba: válasszunk egy c számot. Ha

$$\frac{L_{n,1}(X_1, \dots, X_n)}{L_{n,0}(X_1, \dots, X_n)} > c$$

akkor utasítsuk el a nullhipotézist. Ha a hányados egyenlő c -vel, akkor p valószínűséggel utasítsuk el, és $1 - p$ valószínűséggel fogadjuk el. Ha kisebb c -nél, fogadjuk el a nullhipotézist.

Lemma (Neyman–Pearson-lemma, 2. rész)

Legyen $\alpha \in (0, 1)$ tetszőleges. Ekkor lehet olyan c és p számokat választani, hogy a likelihood-hányados próba a szignifikanciaszintje éppen α , és így ez a legerősebb próba a legfeljebb α szignifikanciaszintű próbák között.

Szekvenciális próbák

A valószínűséghányados n elemű mintából:

$$V_n = \frac{L_{n,1}(X_1, \dots, X_n)}{L_{n,0}(X_1, \dots, X_n)} = \frac{\prod_{j=1}^n f_1(X_j)}{\prod_{j=1}^n f_0(X_j)},$$

ha az eloszlás abszolút folytonos.

A, B rögzített, a próbára jellemző számok. Addig veszünk mintaelemeket, amíg $V_n \geq B$ vagy $V_n \leq A$ nem teljesül. Vagyis:

- ha $V_n \geq B$, elutasítjuk H_0 -t;
- ha $V_n \leq A$, elfogadjuk H_0 -t;
- ha $A < V_n < B$: új mintaelemet veszünk.

Kétlépcsős változat: n_1 elemű mintát veszünk. Ha $V_{n_1} \geq B$, elutasítjuk H_0 -t, ha $V_{n_1} \leq A$, elfogadjuk H_0 -t, különben további n_2 darab mintaelemet veszünk, és akkor utasítjuk el a nullhipotézist, ha $V_{n_1+n_2} > C$ teljesül.

Neyman–Pearson-lemma

Példa: legyen $\Theta = \{m_0, m_1\}$, és \mathcal{P} álljon az $N(m_0, \sigma)$ és $N(m_1, \sigma)$ eloszlásokból. A likelihood-hányados:

$$\begin{aligned}\frac{L_{n,1}(X_1, \dots, X_n)}{L_{n,0}(X_1, \dots, X_n)} &= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\right)^n \prod_{j=1}^n \exp(-(X_j - m_1)^2/(2\sigma^2))}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\right)^n \prod_{j=1}^n \exp(-(X_j - m_0)^2/(2\sigma^2))} = \\ &= \exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^n (X_j - m_1)^2}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{j=1}^n (X_j - m_0)^2}{2\sigma^2}\right) = \\ &= \exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^n (X_j^2 - 2m_1X_j + m_1^2)}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{j=1}^n (X_j^2 - 2m_0X_j + m_0^2)}{2\sigma^2}\right) = \\ &= \exp\left(\frac{2(m_1 - m_0) \sum_{j=1}^n X_j + (m_0^2 - m_1^2)n}{2\sigma^2}\right).\end{aligned}$$

Ha $m_1 > m_0$: akkor utasítjuk el a nullhipotézist, ha $\frac{L_{n,1}}{L_{n,0}}$ nagyobb egy c kritikus értéknél, vagyis ha $\sum_{j=1}^n X_j$ nagyobb egy c' kritikus értéknél. Ezért a lesz a z-próba legerősebb próba: ez is ilyen alakú.

Normális eloszlás paramétereire vonatkozó próbák

Az alábbi próbák akkor használhatók, ha

- a megfigyelések függetlenek, és feltételezhetjük, hogy normális eloszlásúak
- a megfigyelések függetlenek, véges szórású eloszlásból származnak, és a minta mérete, azaz n "elég nagy", például $n \geq 100$ (hogy a centrális határeloszlástétel alapján az átlag közel normális eloszlású legyen), de nem túlságosan nagy (túl érzékenyvé válik a próba)

Normális eloszlás paramétereire vonatkozó próbák

Az alábbi próbák akkor használhatók, ha

- a megfigyelések függetlenek, és feltételezhetjük, hogy normális eloszlásúak
- a megfigyelések függetlenek, véges szórású eloszlásból származnak, és a minta mérete, azaz n "elég nagy", például $n \geq 100$ (hogy a centrális határeloszlástétel alapján az átlag közel normális eloszlású legyen), de nem túlságosan nagy (túl érzékennyé válik a próba)
- **z -próba** (vagy u -próba): **várható értékre** vonatkozó hipotézis esetén, ha **μ** **σ szórás ismert** – egymintás esetben legerősebb próba

Normális eloszlás paramétereire vonatkozó próbák

Az alábbi próbák akkor használhatók, ha

- a megfigyelések függetlenek, és feltételezhetjük, hogy normális eloszlásúak
- a megfigyelések függetlenek, véges szórású eloszlásból származnak, és a minta mérete, azaz n "elég nagy", például $n \geq 100$ (hogy a centrális határeloszlástétel alapján az átlag közel normális eloszlású legyen), de nem túlságosan nagy (túl érzékenyvé válik a próba)
- **z -próba** (vagy u -próba): **várható értékre** vonatkozó hipotézis esetén, ha **μ várható érték és σ szórás ismert** – egymintás esetben legerősebb próba
- **t -próba** (vagy Student-próba): **várható értékre** vonatkozó hipotézis esetén, ha **μ várható érték és σ szórás nem ismert** (csak az s_n^* tapasztalati szórás)
- **F -próba**: **szórásra** vonatkozó hipotézis esetén

Kapcsolat a konfidenciaintervallummal: egymintás próbánál akkor fogadjuk el a nullhipotézist α terjedelem mellett, ha a benne megadott érték (várható érték vagy szórás) az $1 - \alpha$ megbízhatósági szintű konfidenciaintervallumba esik.

Egymintás egyoldali z-próba (one-sample one-sided z test)

A próba a normális eloszlás várható értékére vonatkozik ismert szórás mellett. Torzítatlan, konzisztens, **legerősebb próba** egyoldali esetben (a Neyman–Pearson-lemma alapján bizonyítható).

- $X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(m, \sigma^2)$, ahol m ismeretlen paraméter, $\sigma > 0$ ismert.
- Próbastatisztika (eloszlása standard normális H_0 mellett, ezt beláttuk):

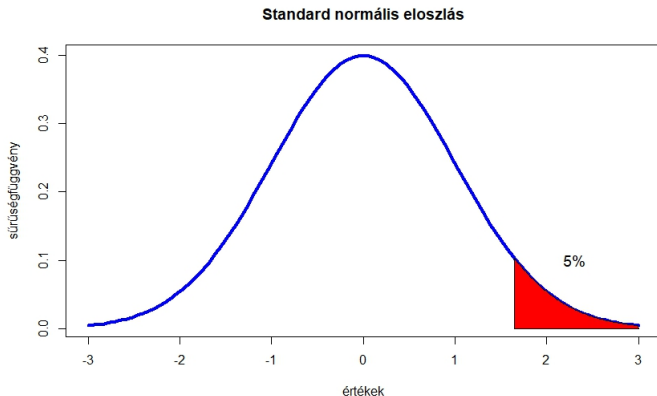
$$z = \frac{\bar{X} - m_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n}.$$

- **Egyoldali ellenhipotézis** (one-sided): $H_0 : m \leq m_0$; $H_1 : m > m_0$.
- Ha $z > \Phi^{-1}(1 - \alpha)$, akkor elvetjük a nullhipotézist, különben elfogadjuk.
- A p -érték ilyenkor $1 - \Phi(z)$.

$p < 0,05$: a várható érték szignifikánsan több m_0 -nál.

$p \geq 0,05$: a várható érték nem több szignifikánsan m_0 -nál.

Az egyoldali z-próba kritikus értéke



Az $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszintű egyoldali z-próba kritikus értéke:
 $\Phi^{-1}(1 - \alpha) = \Phi^{-1}(0,95) = 1,645$.

Példa: egymintás egyoldali z-próba

Feltételezés: a testmagasság normális eloszlású.

- Az európai férfiak átlagos testmagassága 177,6 cm.
- Megmértük 90 holland férfi testmagasságát, a magasságok átlaga 181,7 cm lett. A szórást 8,5 cm-nek feltételezve mondhatjuk-e, hogy a holland férfiak testmagassága szignifikánsan több az európai átlagnál?

Példa: egymintás egyoldali z-próba

Feltételezés: a testmagasság normális eloszlású.

- Az európai férfiak átlagos testmagassága 177,6 cm.
- Megmértük 90 holland férfi testmagasságát, a magasságok átlaga 181,7 cm lett. A szórást 8,5 cm-nek feltételezve mondhatjuk-e, hogy a holland férfiak testmagassága szignifikánsan több az európai átlagnál?

- $H_0 : m \leq 177,6$; $H_1 : m > 177,6$.

-

$$z = \frac{\bar{X} - m_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n} = \frac{181,7 - 177,6}{8,5} \sqrt{90} = 4,57.$$

- $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett $\Phi^{-1}(1 - \alpha) = 1,645$, így $z > \Phi^{-1}(1 - \alpha)$.
 p -érték: $1 - \Phi(4,57) < 0,0001 < 0,05$.
- Elutasítjuk a nullhipotézist. Az adatok alapján a holland férfiak testmagasságának várható értéke szignifikánsan több 177,6 cm-nél, vagyis az európai átlagnál.

Egymintás kétoldali z-próba

A próba a normális eloszlás várható értékére vonatkozik ismert szórás mellett. Nem legerősebb (nincs legerősebb próba ebben a feladatban).

- $X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(m, \sigma^2)$, ahol m ismeretlen paraméter, $\sigma > 0$ ismert.
- Próbastatisztika (eloszlása standard normális H_0 mellett):

$$z = \frac{\bar{X} - m_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n}.$$

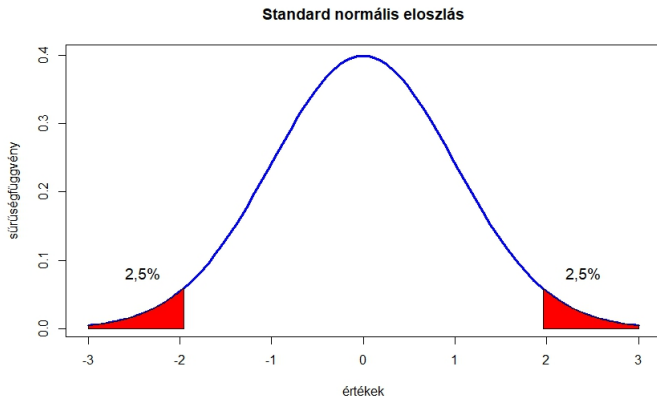
- **Kétoldali ellenhipotézis** (two-sided): $H_0 : m = m_0$; $H_1 : m \neq m_0$.
- Ha $|z| > \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$, akkor elvetjük a nullhipotézist, különben elfogadjuk.
- A p -érték ilyenkor $2 - 2\Phi(|z|)$.

Φ a standard normális eloszlásfüggvény: $\Phi(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$.

$p < 0,05$: a várható érték szignifikánsan eltér m_0 -tól.

$p \geq 0,05$: nincs szignifikáns eltérés m_0 -tól.

A kétoldali z-próba kritikus értéke



Az $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszintű kétoldali z-próba kritikus értéke:

$$\Phi^{-1}(1 - \alpha/2) = \Phi^{-1}(0,975) = 1,96.$$

Példa: egymintás z-próba

Egy gyárban a minőségellenőrzésnél olyan mérleget használnak, melynél egy m tömegű tárgyat mérve a mérési eredmények független normális eloszlású valószínűségi változók m várható értékkel és $\sigma = 3$ gramm szórással.

- A termékkatalógus szerint egy adott típusú kalapács fejének 364 g tömegűnek kell lennie.
- A fenti mérlegen megmérték 20 kalapács fejének tömegét. Az átlag 367,2 gramm lett. Ez alapján állítható-e, hogy a kalapácsok fejének tömege szignifikánsan eltér az előírt 364 grammtól?

Példa: egymintás z-próba

Egy gyárban a minőségellenőrzésnél olyan mérleget használnak, melynél egy m tömegű tárgyat mérve a mérési eredmények független normális eloszlású valószínűségi változók m várható értékkel és $\sigma = 3$ gramm szórással.

- A termékkatalógus szerint egy adott típusú kalapács fejének 364 g tömegűnek kell lennie.
- A fenti mérlegen megmérték 20 kalapács fejének tömegét. Az átlag 367,2 gramm lett. Ez alapján állítható-e, hogy a kalapácsok fejének tömege szignifikánsan eltér az előírt 364 grammtól?

- $H_0 : m = 364$; $H_1 : m \neq 364$.

-

$$z = \frac{\bar{X} - m_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n} = \frac{367,2 - 364}{3} \sqrt{20} = 4,77.$$

- $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett $\Phi^{-1}(1 - \alpha/2) = 1,96$. $p = 1,84 \cdot 10^{-6} < 0,05$.
- $|z| < \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$, elutasítjuk a nullhipotézist. A kalapácsok fejének tömegének várható értéke a minta alapján szignifikánsan eltér az előírt 364 grammtól.

Fisher–Bartlett-tétel

Valójában az eloszlás valódi szórása a legtöbb esetben nem ismert. A σ szórást az s_n^* korrigált tapasztalati szórással helyettesítjük. Kérdés, hogyan változik így az eloszlás.

Tétel (Fisher–Bartlett)

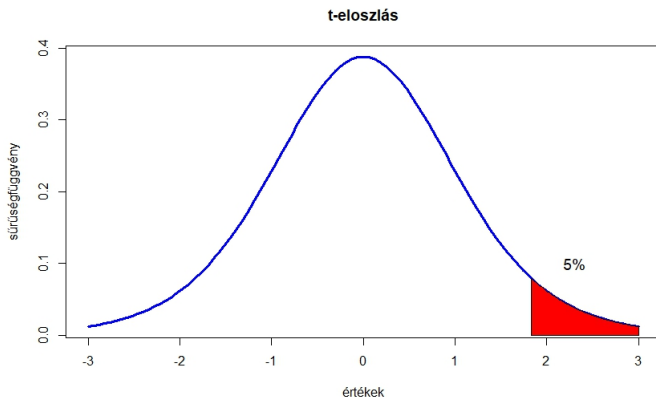
Tegyük fel, hogy X_1, X_2, \dots, X_n független m várható értékű, σ szórású, **normális eloszlású** valószínűségi változók. Ekkor

- 1 $\bar{X} \sim N(m, \frac{\sigma^2}{n})$;
- 2 \bar{X} és s_n^* függetlenek;
- 3 $(n-1)s_n^{*2}/\sigma^2$ eloszlása $n-1$ szabadsági fokú χ^2 -eloszlás;
- 4 $(\bar{X} - m)\sqrt{n}/s_n^*$ eloszlása $n-1$ szabadsági fokú t -eloszlás.

Itt

$$s_n^* = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2} = \sqrt{\frac{n}{n-1} \left(\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^2 \right) - \bar{X}^2 \right)}.$$

t -eloszlás egyoldali kritikus értékei



Az $f = 9$ szabadsági fokú $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszintű egyoldali t -próba kritikus értéke: $\bar{t}_{9,0,05} = 1,83$.

Egymintás egyoldali t -próba (one-sample one-sided t -test)

- **A normális eloszlás várható értékére, ismeretlen szórás esetén – legerősebb próba.**
- $X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(m, \sigma^2)$, ahol m, σ ismeretlen paraméterek.
- Próbastatisztika, aminek eloszlása t -eloszlás H_0 mellett a Fisher–Bartlett-tétel szerint:

$$t = \frac{\bar{X} - m_0}{s_n^*} \cdot \sqrt{n}.$$

- **Egyoldali ellenhipotézis (one-sided):** $H_0 : m \leq m_0$; $H_1 : m > m_0$.
- Ha $t > \bar{t}_{n-1, \alpha}$, azaz $p < \alpha$, elutasítjuk a nullhipotézist; ilyenkor a várható érték szignifikánsan több m_0 -nál.
- Ha $t \leq \bar{t}_{n-1, \alpha}$, azaz $p \geq \alpha$, elfogadjuk a nullhipotézist, a várható érték nem több szignifikánsan m_0 -nál az adatok alapján.
- A kritikus érték: $\bar{t}_{n-1, \alpha}$ az $f = n - 1$ szabadsági fokú (degree of freedom) t -eloszlás $1 - \alpha$ -kvantilise, vagyis az $f = n - 1$ szabadsági fokú egyoldali t -próba kritikus értéke α szignifikanciaszint (level of significance) mellett.

Példa: egymintás egyoldali t -próba

Egy adott helyen vett tíz mintából megmértük az ivóvíz keménységét. Az alábbi eredmények adódtak (mg/l CaO):

351 370 352 340 362 363 366 355 374 347

Állíthatjuk-e az adatok alapján, hogy az ivóvíz keménységének várható értéke szignifikánsan meghaladja a 350 mg/l egészségügyi határértéket?

Példa: egymintás egyoldali t -próba

Egy adott helyen vett tíz mintából megmértük az ivóvíz keménységét. Az alábbi eredmények adódtak (mg/l CaO):

351 370 352 340 362 363 366 355 374 347

Állíthatjuk-e az adatok alapján, hogy az ivóvíz keménységének várható értéke szignifikánsan meghaladja a 350 mg/l egészségügyi határértéket?

$$n = 10; \quad \bar{X} = 358; \quad s_n^* = 10,77$$

Feltételezzük, hogy a mérési eredmények normális eloszlásúak, **az egymintás egyoldali t -próbát** alkalmazzuk: $H_0 : m \leq 350$; $H_1 : m > 350$.

$$t = \frac{\bar{X} - m_0}{s_n^*} \cdot \sqrt{n} = \frac{358 - 350}{10,77} \sqrt{10} = 2,35.$$

Az $f = n - 1 = 9$ szabadsági fokú egyoldali t -próba kritikus értéke $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett $\bar{t}_{9;0,05} = 1,833$.

Példa: egymintás egyoldali t -próba

Egy adott helyen vett tíz mintából megmértük az ivóvíz keménységét. Az alábbi eredmények adódtak (mg/l CaO):

351 370 352 340 362 363 366 355 374 347

Állíthatjuk-e az adatok alapján, hogy az ivóvíz keménységének várható értéke szignifikánsan meghaladja a 350 mg/l egészségügyi határértéket?

$$n = 10; \quad \bar{X} = 358; \quad s_n^* = 10,77$$

Feltételezzük, hogy a mérési eredmények normális eloszlásúak, **az egymintás egyoldali t -próbát** alkalmazzuk: $H_0 : m \leq 350$; $H_1 : m > 350$.

$$t = \frac{\bar{X} - m_0}{s_n^*} \cdot \sqrt{n} = \frac{358 - 350}{10,77} \sqrt{10} = 2,35.$$

Az $f = n - 1 = 9$ szabadsági fokú egyoldali t -próba kritikus értéke $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett $\bar{t}_{9;0,05} = 1,833$.

Mivel $t > \bar{t}_{9;0,05}$, **elutasítjuk a nullhipotézist**, a vízkeménység szignifikánsan meghaladja 350 mg/l határértéket. A p -érték: $p = 0,0217 < 0,05$.

Hipotézisvizsgálat: példa az R szoftverben

Tíz mintából mértük meg a víz keménységét.

Nullhipotézis (null hypothesis, H_0): $m \leq 350$

Ellenhipotézis (alternative hypothesis, H_1): $m > 350$

```
> viz<-c(348, 367, 349, 337, 359, 360, 363, 352, 371, 344)
```

```
> t.test(viz, mu=350, alternative="greater")
```

Hipotézisvizsgálat: példa az R szoftverben

Tíz mintából mértük meg a víz keménységét.

Nullhipotézis (null hypothesis, H_0): $m \leq 350$

Ellenhipotézis (alternative hypothesis, H_1): $m > 350$

```
> viz<-c(348, 367, 349, 337, 359, 360, 363, 352, 371, 344)
```

```
> t.test(viz, mu=350, alternative="greater")
```

One Sample t-test

```
data: viz
```

```
t = 2.3489, df = 9, p-value = 0.02169
```

```
alternative hypothesis: true mean is greater than 350
```

```
95 percent confidence interval: 351.7566 Inf
```

```
mean of x : 358
```

Most $p = 0.02169 < 0,05 = \alpha$, elutasítjuk a nullhipotézist.

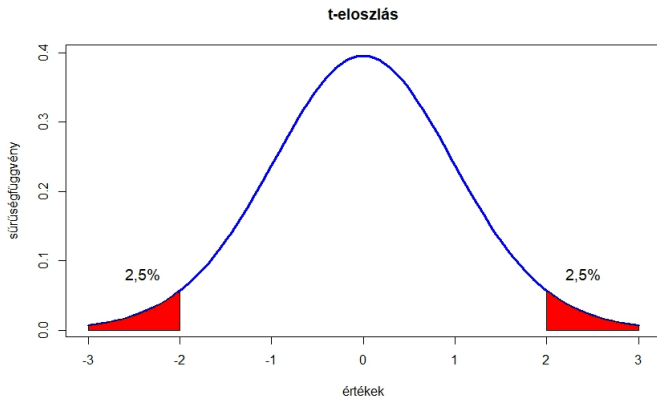
Egymintás kétoldali t -próba (one-sample two-sided t -test)

- **A normális eloszlás várható értékére, ismeretlen szórás esetén.** Nem legerősebb (nincs ilyen).
- $X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(m, \sigma^2)$, ahol m, σ ismeretlen paraméterek.
- Próbastatisztika (eloszlása t -eloszlás/Student-eloszlás H_0 mellett):

$$t = \frac{\bar{X} - m_0}{s_n^*} \cdot \sqrt{n}.$$

- **Kétoldali ellenhipotézis** (two-sided): $H_0 : m = m_0$; $H_1 : m \neq m_0$.
- Ha $|t| > t_{n-1, \alpha}$, azaz $p < \alpha$, akkor elutasítjuk a nullhipotézist, a várható érték szignifikánsan eltér m_0 -tól.
- Ha $|t| \leq t_{n-1, \alpha}$, azaz $p \geq \alpha$, akkor elfogadjuk H_0 -t, a várható érték nem tér el szignifikánsan m_0 -tól.
- A kritikus érték: $t_{n-1, \alpha}$ az $f = n - 1$ szabadsági fokú (degree of freedom) t -eloszlás $1 - \alpha/2$ -kvantilise, vagyis az $f = n - 1$ szabadsági fokú (degree of freedom) kétoldali t -próba kritikus értéke α szignifikanciaszint mellett.

Kétoldali t -próba kritikus értékei



Az $f = 29$ szabadsági fokú $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszintű kétoldali t -próba kritikus értéke: $t_{29;0,05} = 2,04$.

Példa: Egymintás kétoldali t -próba

Egy gyógyszer hatóanyagtartalma a csomagolás szerint 10 mg. Harminc tabletta hatóanyag-tartalmát megmérve a mérések átlaga 9,8, korrigált tapasztalati szórása 0,62 lett. A szignifikanciaszintet $\alpha = 0,05$ -nek választva az adatok alapján szignifikánsan eltér-e a hatóanyag-tartalom várható értéke a 10 mg-tól?

Példa: Egymintás kétoldali t -próba

Egy gyógyszer hatóanyagtartalma a csomagolás szerint 10 mg. Harminc tabletta hatóanyag-tartalmát megmérve a mérések átlaga 9,8, korrigált tapasztalati szórása 0,62 lett. A szignifikanciaszintet $\alpha = 0,05$ -nek választva az adatok alapján szignifikánsan eltér-e a hatóanyag-tartalom várható értéke a 10 mg-tól?

$$n = 30; \quad \bar{X} = 9,8; \quad s_n^* = 0,62$$

Egymintás kétoldali t -próbát végezhetünk, normális eloszlást feltételezve.

$$H_0 : m = 10; \quad H_1 : m \neq 10; \quad \alpha = 0,05; \quad f = n - 1 = 29.$$

$$t = \frac{\bar{X} - m_0}{s_n^*} \cdot \sqrt{n} = \frac{9,8 - 10}{0,62} \cdot \sqrt{30} = -1,77.$$

A kritikus érték: $t_{29,0,975} = 2,045 \Rightarrow |t| = 1,77 \leq 2,045$, nincs szignifikáns eltérés.
 p -érték: $p = 0,0867 \geq 0,05$.

Kétmintás, egyoldali, párosítatlan Student-féle t -próba

A **várható érték összehasonlítására** azonos szórás esetén (two-sample one-sided unpaired Student t -test).

$X_1, \dots, X_{n_1}, Y_1, \dots, Y_{n_2}$ **független normális eloszlású azonos szórású** valószínűségi változók: $X_i \sim N(m_1, \sigma^2)$, $Y_i \sim N(m_2, \sigma^2)$, ahol m_1, m_2, σ ismeretlen paraméterek.

Egyoldali ellenhipotézis: $H_0 : m_1 \leq m_2$; $H_1 : m_1 > m_2$.

Kétmintás, egyoldali, párosítatlan Student-féle t -próba

A **várható érték összehasonlítására** azonos szórás esetén (two-sample one-sided unpaired Student t -test).

$X_1, \dots, X_{n_1}, Y_1, \dots, Y_{n_2}$ **független normális eloszlású azonos szórású** valószínűségi változók: $X_i \sim N(m_1, \sigma^2)$, $Y_i \sim N(m_2, \sigma^2)$, ahol m_1, m_2, σ ismeretlen paraméterek.

Egyoldali ellenhipotézis: $H_0 : m_1 \leq m_2$; $H_1 : m_1 > m_2$.

Próbastatisztika (eloszlása t -eloszlás $m_1 = m_2$ mellett):

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(n_1 - 1)s_{n_1}^{*2}(X) + (n_2 - 1)s_{n_2}^{*2}(Y)}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}.$$

Ha $t > \bar{t}_{n_1+n_2-2, \alpha}$, akkor elvetjük a nullhipotézist, különben elfogadjuk. A $\bar{t}_{n_1+n_2-2, \alpha}$ kritikus érték az $f = n_1 + n_2 - 2$ szabadsági fokú **egyoldali** t -próba kritikus értéke α szignifikanciaszint mellett (a megfelelő eloszlás $1 - \alpha$ -kvantilise).

Ha $p < \alpha$: elvetjük H_0 -t, az első várható érték szignifikánsan nagyobb a másodiknál.

Kétmintás t -próba: példa

Két különböző márkájú vaj tömegét mértük meg, az X típusúét tízszer, az Y típusúét nyolcszor. Az átlagok és korrigált tapasztalati szórások (kg-ban):

$$\bar{X} = 0,217, \quad s_n^*(X) = 0,027, \quad \bar{Y} = 0,203, \quad s_n^*(Y) = 0,03.$$

Állíthatjuk-e $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett, hogy az X típusú vajak tömege szignifikánsan több az Y típusú vajénál? Feltételezzük, hogy a mérések **szórása azonos**.

Kétmintás t -próba: példa

Két különböző márkájú vaj tömegét mértük meg, az X típusúét tízszer, az Y típusúét nyolcszor. Az átlagok és korrigált tapasztalati szórások (kg-ban):

$$\bar{X} = 0,217, \quad s_n^*(X) = 0,027, \quad \bar{Y} = 0,203, \quad s_n^*(Y) = 0,03.$$

Állíthatjuk-e $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett, hogy az X típusú vajak tömege szignifikánsan több az Y típusú vajénál? Feltételezzük, hogy a mérések **szórása azonos**.

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(n_1 - 1)s_{n_1}^{*2}(X) + (n_2 - 1)s_{n_2}^{*2}(Y)}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}.$$

Behelyettesítve:

$$t = \frac{0,217 - 0,203}{\sqrt{9 \cdot 0,027^2 + 7 \cdot 0,03^2}} \cdot \sqrt{\frac{80 \cdot 16}{18}} = 1,04.$$

Kétmintás t -próba: példa

Két különböző márkájú vaj tömegét mértük meg, az X típusúét tízszer, az Y típusúét nyolcszor. Az átlagok és korrigált tapasztalati szórások (kg-ban):

$$\bar{X} = 0,217, \quad s_n^*(X) = 0,027, \quad \bar{Y} = 0,203, \quad s_n^*(Y) = 0,03.$$

Állíthatjuk-e $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett, hogy az X típusú vajak tömege szignifikánsan több az Y típusú vajénál? Feltételezzük, hogy a mérések **szórása azonos**.

$$H_0 : m_1 \leq m_2, \quad H_1 : m_1 > m_2$$

A próbastatisztika értéke: $t = 1,04$.

Az $f = n_1 + n_2 - 2 = 10 + 8 - 2 = 16$ szabadsági fokú egyoldali t -próba kritikus értéke $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett: $\bar{t}_{16,0,05} = 1,746$.

Kétmintás t -próba: példa

Két különböző márkájú vaj tömegét mértük meg, az X típusúét tízszer, az Y típusúét nyolcszor. Az átlagok és korrigált tapasztalati szórások (kg-ban):

$$\bar{X} = 0,217, \quad s_n^*(X) = 0,027, \quad \bar{Y} = 0,203, \quad s_n^*(Y) = 0,03.$$

Állíthatjuk-e $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett, hogy az X típusú vajak tömege szignifikánsan több az Y típusú vajénál? Feltételezzük, hogy a mérések **szórása azonos**.

$$H_0 : m_1 \leq m_2, \quad H_1 : m_1 > m_2$$

A próbastatisztika értéke: $t = 1,04$.

Az $f = n_1 + n_2 - 2 = 10 + 8 - 2 = 16$ szabadsági fokú egyoldali t -próba kritikus értéke $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett: $\bar{t}_{16,0,05} = 1,746$.

Itt $t = 1,04 < 1,746 = \bar{t}_{16,0,05}$, ezért **elfogadjuk H_0 -t**. Az X típusú vaj tömege **nem haladja meg szignifikánsan** az Y típusúét.

p -érték: $0,149 > 0,05$

Kétmintás t -próba: példa

Kétféle joghurt cukortartalmát szeretnénk összehasonlítani. Az elsőből $n_1 = 20$, a másodikból $n_2 = 12$ dobozban mértük meg a cukortartalmat (grammban).

Az átlagok és korrigált tapasztalati szórások grammban számolva (X_1, \dots, X_{20} az első minta, Y_1, \dots, Y_{12} a második):

$$\bar{X} = 18,4, \quad s_n^*(X) = 1,2, \quad \bar{Y} = 19,9, \quad s_n^*(Y) = 1,3.$$

Állíthatjuk-e $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett, hogy a kétféle joghurtban szignifikánsan eltérő a cukortartalom?

Kétmintás, kétoldali, párosítatlan Student-féle t -próba

A **várható érték összehasonlítására** azonos szórás esetén (two-sample two-sided unpaired Student t -test).

$X_1, \dots, X_{n_1}, Y_1, \dots, Y_{n_2}$ **független normális eloszlású azonos szórású** valószínűségi változók: $X_i \sim N(m_1, \sigma^2)$, $Y_i \sim N(m_2, \sigma^2)$, ahol m_1, m_2, σ ismeretlen paraméterek.

Kétoldali ellenhipotézis: $H_0 : m_1 = m_2$; $H_1 : m_1 \neq m_2$.

Kétmintás, kétoldali, párosítatlan Student-féle t -próba

A **várható érték összehasonlítására** azonos szórás esetén (two-sample two-sided unpaired Student t -test).

$X_1, \dots, X_{n_1}, Y_1, \dots, Y_{n_2}$ **független normális eloszlású azonos szórású** valószínűségi változók: $X_i \sim N(m_1, \sigma^2)$, $Y_i \sim N(m_2, \sigma^2)$, ahol m_1, m_2, σ ismeretlen paraméterek.

Kétoldali ellenhipotézis: $H_0 : m_1 = m_2$; $H_1 : m_1 \neq m_2$.

Próbastatisztika (eloszlása t -eloszlás H_0 mellett):

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(n_1 - 1)s_{n_1}^{*2}(X) + (n_2 - 1)s_{n_2}^{*2}(Y)}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}.$$

Ha $|t| > t_{n_1+n_2-2, 1-\alpha}$, akkor elvetjük a nullhipotézist, különben elfogadjuk. A $t_{n_1+n_2-2, 1-\alpha}$ kritikus érték az $f = n_1 + n_2 - 2$ szabadsági fokú **kétoldali** t -próba kritikus értéke α szignifikanciaszint mellett (a megfelelő eloszlás $1-\alpha/2$ -kvantilise).

Ha $p < \alpha$: elvetjük H_0 -t, az várható értékek szignifikánsan eltérnek egymástól.

Kétmintás t -próba: példa

Kétféle joghurt cukortartalmát szeretnénk összehasonlítani. Az elsőből $n_1 = 20$, a másodikból $n_2 = 12$ dobozban mértük meg a cukortartalmat (grammban).

Az átlagok és korrigált tapasztalati szórások grammban számolva (X_1, \dots, X_{20} az első minta, Y_1, \dots, Y_{12} a második):

$$\bar{X} = 18,4, \quad s_n^*(X) = 1,2, \quad \bar{Y} = 19,9, \quad s_n^*(Y) = 1,3.$$

Állíthatjuk-e $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett, hogy a kétféle joghurtban szignifikánsan eltérő a cukortartalom? Feltételezzük, hogy a minták **függetlenek**, **normális eloszlásúak**, **azonos szórásúak**.

Kétmintás t -próba: példa

Kétféle joghurt cukortartalmát szeretnénk összehasonlítani. Az elsőből $n_1 = 20$, a másodikból $n_2 = 12$ dobozban mértük meg a cukortartalmat (grammban).

Az átlagok és korrigált tapasztalati szórások grammban számolva (X_1, \dots, X_{20} az első minta, Y_1, \dots, Y_{12} a második):

$$\bar{X} = 18,4, \quad s_n^*(X) = 1,2, \quad \bar{Y} = 19,9, \quad s_n^*(Y) = 1,3.$$

Állíthatjuk-e $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett, hogy a kétféle joghurtban szignifikánsan eltérő a cukortartalom? Feltételezzük, hogy a minták **függetlenek**, **normális eloszlásúak**, **azonos szórásúak**.

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(n_1 - 1)s_{n_1}^{*2}(X) + (n_2 - 1)s_{n_2}^{*2}(Y)}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}.$$

Behelyettesítve:

$$t = \frac{18,4 - 19,9}{\sqrt{19 \cdot 1,2^2 + 11 \cdot 1,3^2}} \cdot \sqrt{\frac{20 \cdot 12 \cdot 30}{32}} = -3,3.$$

Kétmintás t -próba: példa

Kétféle joghurt cukortartalmát szeretnénk összehasonlítani. Az elsőből $n_1 = 20$, a másodikból $n_2 = 12$ dobozban mértük meg a cukortartalmat (grammban).

Az átlagok és korrigált tapasztalati szórások grammban számolva (X_1, \dots, X_{20} az első minta, Y_1, \dots, Y_{12} a második):

$$\bar{X} = 18,4, \quad s_n^*(X) = 1,2, \quad \bar{Y} = 19,9, \quad s_n^*(Y) = 1,3.$$

Állíthatjuk-e $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett, hogy a kétféle joghurtban szignifikánsan eltérő a cukortartalom? Feltételezzük, hogy a minták **függetlenek, normális eloszlásúak, azonos szórásúak**.

$$H_0 : m_1 = m_2, \quad H_1 : m_1 \neq m_2$$

A próbastatisztika értéke: $t = -3,3$.

Az $f = n_1 + n_2 - 2 = 20 + 12 - 2 = 30$ szabadsági fokú **kétoldali** t -próba kritikus értéke $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett: $t_{16,0,05} = 2,042$.

Kétmintás t -próba: példa

Kétféle joghurt cukortartalmát szeretnénk összehasonlítani. Az elsőből $n_1 = 20$, a másodikból $n_2 = 12$ dobozban mértük meg a cukortartalmat (grammban).

Az átlagok és korrigált tapasztalati szórások grammban számolva (X_1, \dots, X_{20} az első minta, Y_1, \dots, Y_{12} a második):

$$\bar{X} = 18,4, \quad s_n^*(X) = 1,2, \quad \bar{Y} = 19,9, \quad s_n^*(Y) = 1,3.$$

Állíthatjuk-e $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett, hogy a kétféle joghurtban szignifikánsan eltérő a cukortartalom? Feltételezzük, hogy a minták **függetlenek, normális eloszlásúak, azonos szórásúak**.

$$H_0 : m_1 = m_2, \quad H_1 : m_1 \neq m_2$$

A próbastatisztika értéke: $t = -3,3$.

Az $f = n_1 + n_2 - 2 = 20 + 12 - 2 = 30$ szabadsági fokú **kétoldali** t -próba kritikus értéke $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett: $t_{16,0,05} = 2,042$.

Itt $|t| = 3,3 > 2,042 = t_{30,0,05}$, ezért **elutasítjuk H_0 -t**. A kétféle joghurt cukortartalma **szignifikánsan különböző**

Kétmintás t -próba: példa

Kétféle joghurt cukortartalmát szeretnénk összehasonlítani. Az elsőből $n_1 = 20$, a másodiktól $n_2 = 12$ dobozban mértük meg a cukortartalmat (grammban).

Az átlagok és korrigált tapasztalati szórások grammban számolva (X_1, \dots, X_{20} az első minta, Y_1, \dots, Y_{12} a második):

$$\bar{X} = 18,4, \quad s_n^*(X) = 1,2, \quad \bar{Y} = 19,9, \quad s_n^*(Y) = 1,3.$$

Állíthatjuk-e $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett, hogy a kétféle joghurtban szignifikánsan eltérő a cukortartalom? Feltételezzük, hogy a minták **függetlenek, normális eloszlásúak, azonos szórásúak**.

$$H_0 : m_1 = m_2, \quad H_1 : m_1 \neq m_2$$

A próbastatisztika értéke: $t = -3,3$.

Az $f = n_1 + n_2 - 2 = 20 + 12 - 2 = 30$ szabadsági fokú **kétoldali** t -próba kritikus értéke $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett: $t_{16,0,05} = 2,042$.

Itt $|t| = 3,3 > 2,042 = t_{30,0,05}$, ezért **elutasítjuk H_0 -t**. A kétféle joghurt cukortartalma **szignifikánsan különböző** – ha a szórások azonosak, és a próba alkalmazható (ezt eddig feltettük).

F-próba

Független normális eloszlású minták **szórásának** összehasonlítására.

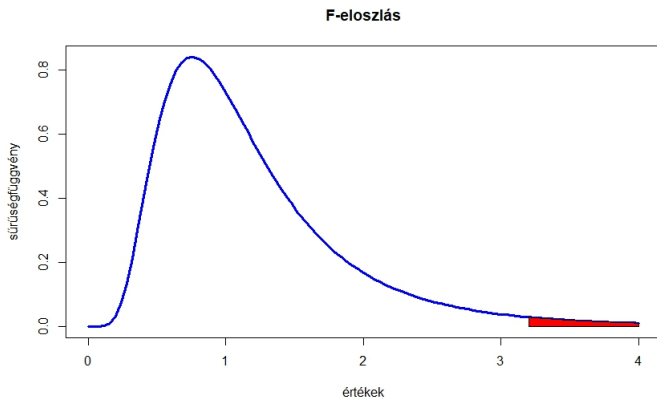
- Legyenek most $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}, Y_1, \dots, Y_{n_2}$ független normális eloszlású valószínűségi változók, ahol $X_i \sim N(m_1, \sigma_1^2)$, $Y_i \sim N(m_2, \sigma_2^2)$. Itt $m_1, m_2, \sigma_1, \sigma_2$ ismeretlen paraméterek.
- Kétoldali ellenhipotézis: $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$; $H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$.
- Próbastatisztika (eloszlása F -eloszlás H_0 mellett):

$$F = \frac{s_{n_1}^{*2}}{s_{n_2}^{*2}}.$$

- Ha $F > F_{n_1-1, n_2-1}$ vagy $1/F > F_{n_2-1, n_1-1}$, akkor elvetjük a nullhipotézist, különben elfogadjuk, ahol F_{f_1, f_2} az f_1, f_2 szabadsági fokú az F -eloszlás $1 - \alpha/2$ -kvantilise.

$p < 0,05$: a szórások szignifikánsan eltérnek.

Az F -próba kritikus értéke



Az F -próba kritikus értéke: $F_{19,11} = 3,24$, ez az eloszlás $1 - \alpha/2 = 0,975$ -kvantilise

Kétmintás F -próba: példa

Kétféle joghurt cukortartalmát szeretnénk összehasonlítani. Az elsőből $n_1 = 20$, a másodikból $n_2 = 12$ dobozban mértük meg a cukortartalmat (grammban). Az átlagok és korrigált tapasztalati szórások (X_1, \dots, X_{20} az első minta, Y_1, \dots, Y_{12} a második):

$$\bar{X} = 18,4, \quad s_n^*(X) = 1,2, \quad \bar{Y} = 19,9, \quad s_n^*(Y) = 1,3.$$

Állíthatjuk-e $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett, hogy a kétféle joghurtban szignifikánsan eltérő a cukortartalom szórása? Feltételezzük, hogy a minták **függetlenek, normális eloszlásúak**.

Kétmintás F -próba: példa

Kétféle joghurt cukortartalmát szeretnénk összehasonlítani. Az elsőből $n_1 = 20$, a másodikból $n_2 = 12$ dobozban mértük meg a cukortartalmat (grammban). Az átlagok és korrigált tapasztalati szórások (X_1, \dots, X_{20} az első minta, Y_1, \dots, Y_{12} a második):

$$\bar{X} = 18,4, \quad s_n^*(X) = 1,2, \quad \bar{Y} = 19,9, \quad s_n^*(Y) = 1,3.$$

Állíthatjuk-e $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett, hogy a kétféle joghurtban szignifikánsan eltérő a cukortartalom szórása? Feltételezzük, hogy a minták **függetlenek, normális eloszlásúak**.

$$H_0 : \sigma_1 = \sigma_2, \quad H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$$

A próbastatisztika értéke: $F = \frac{s_{n_1}^{*2}}{s_{n_2}^{*2}} = \frac{1,2^2}{1,3^2} = 0,85$, és $\frac{1}{F} = \frac{1,3^2}{1,2^2} = 1,17$.

Az $(f_1, f_2) = (n_1 - 1, n_2 - 1) = (19, 11)$ szabadsági fokú F -próba kritikus értéke $\alpha = 0,05$ esetén: 3,24, míg az $(f_2, f_1) = (n_2 - 1, n_1 - 1) = (11, 19)$ szabadsági fok esetén 2,76.

Kétmintás F -próba: példa

Kétféle joghurt cukortartalmát szeretnénk összehasonlítani. Az elsőből $n_1 = 20$, a másodikból $n_2 = 12$ dobozban mértük meg a cukortartalmat (grammban). Az átlagok és korrigált tapasztalati szórások (X_1, \dots, X_{20} az első minta, Y_1, \dots, Y_{12} a második):

$$\bar{X} = 18,4, \quad s_n^*(X) = 1,2, \quad \bar{Y} = 19,9, \quad s_n^*(Y) = 1,3.$$

Állíthatjuk-e $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett, hogy a kétféle joghurtban szignifikánsan eltérő a cukortartalom szórása? Feltételezzük, hogy a minták **függetlenek, normális eloszlásúak**.

$$H_0 : \sigma_1 = \sigma_2, \quad H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$$

A próbastatisztika értéke: $F = \frac{s_{n_1}^{*2}}{s_{n_2}^{*2}} = \frac{1,2^2}{1,3^2} = 0,85$, és $\frac{1}{F} = \frac{1,3^2}{1,2^2} = 1,17$.

Az $(f_1, f_2) = (n_1 - 1, n_2 - 1) = (19, 11)$ szabadsági fokú F -próba kritikus értéke $\alpha = 0,05$ esetén: 3,24, míg az $(f_2, f_1) = (n_2 - 1, n_1 - 1) = (11, 19)$ szabadsági fok esetén 2,76.

Mivel $F < 3,24$ és $1/F < 2,76$, **elfogadjuk a nullhipotézist**, a szórások nem térnek el szignifikánsan, és **a kétmintás t -próba valóban alkalmazható**.

Normális eloszlásra vonatkozó kétmintás próbák

Az alábbiakat kell ellenőrizni kétmintás próbánál:

- A minta **normális eloszlású**, vagy a mintaelemszám elég nagy és a szórás feltehetően véges (a centrális határeloszlástétel alapján az átlag közel normális eloszlású).

Normális eloszlásra vonatkozó kétmintás próbák

Az alábbiakat kell ellenőrizni kétmintás próbánál:

- A minta **normális eloszlású**, vagy a mintaelemszám elég nagy és a szórás feltehetően véges (a centrális határeloszlástétel alapján az átlag közel normális eloszlású).
- Kétmintás esetben: a **két minta egymástól független** ("unpaired" eset). Ha a két minta természetes módon párosítható, **párosított** ("paired") próba alkalmazható. Példa: megmérjük húsz ember vérnyomását egy adott napon reggel és este. Igaz-e, hogy a reggeli érték jelentősen eltér az estitől?
- Ha a **szórásokról feltételezhetjük, hogy megegyeznek**: a Student-féle t -próba alkalmazható.
- Ha a **szórásokról nem tételezhetjük fel, hogy megegyeznek**: a Welch-féle t -próba alkalmazható.

Példa: párosított t -próba

1991 és 2010 között feljegyezték az éves csapadékösszeget Budapesten, illetve Szegeden. Az átlag Budapesten 533 mm, a korrigált tapasztalati szórás 139, Szegeden az átlag 540 mm, a korrigált tapasztalati szórás 143 lett (forrás: OMSZ). Állíthatjuk-e, hogy Szegeden szignifikánsan nagyobb a csapadékmennyiség várható értéke?

év	1991	1992	1993	1994	1995	...	átlag	s_n^*
Budapest	594	364	505	481	575	...	533	139
Szeged	617	457	408	399	562	...	540	143

Példa: párosított t -próba

1991 és 2010 között feljegyezték az éves csapadékösszeget Budapesten, illetve Szegeden. Az átlag Budapesten 533 mm, a korrigált tapasztalati szórás 139, Szegeden az átlag 540 mm, a korrigált tapasztalati szórás 143 lett (forrás: OMSZ). Állíthatjuk-e, hogy Szegeden szignifikánsan nagyobb a csapadékmennyiség várható értéke?

év	1991	1992	1993	1994	1995	...	átlag	s_n^*
Budapest	594	364	505	481	575	...	533	139
Szeged	617	457	408	399	562	...	540	143

A két adatsor **nem független**, mert egy éven belül a két város időjárása nem független (az egyes minták sem teljesen függetlenek, és nem biztos, hogy normális eloszlásúak). Ezért **párosított** (paired) t -próba alkalmazható, egyoldali nullhipotézissel. Ez általában a párok különbségét hasonlítja össze 0-val, egymintás próbát alkalmazva.

$H_0 : m_1 \geq m_2$, $H_1 : m_1 < m_2$, ahol m_1 a budapesti, m_2 a szegedi csapadékmennyiség várható értéke.

Példa: párosított t -próba

1991 és 2010 között feljegyezték az éves csapadékösszeget Budapesten, illetve Szegeden. Az átlag Budapesten 533 mm, a korrigált tapasztalati szórás 139, Szegeden az átlag 540 mm, a korrigált tapasztalati szórás 143 lett (forrás: OMSZ). Állíthatjuk-e, hogy Szegeden szignifikánsan nagyobb a csapadékmennyiség várható értéke?

év	1991	1992	1993	1994	1995	...	átlag	s_n^*
Budapest	594	364	505	481	575	...	533	139
Szeged	617	457	408	399	562	...	540	143

A két adatsor **nem független**, mert egy éven belül a két város időjárása nem független (az egyes minták sem teljesen függetlenek, és nem biztos, hogy normális eloszlásúak). Ezért **párosított** (paired) t -próba alkalmazható, egyoldali nullhipotézissel. Ez általában a párok különbségét hasonlítja össze 0-val, egymintás próbát alkalmazva.

$H_0 : m_1 \geq m_2$, $H_1 : m_1 < m_2$, ahol m_1 a budapesti, m_2 a szegedi csapadékmennyiség várható értéke.

A próbát elvégezve a p -értékre 0,366 adódott.

Példa: párosított t -próba


1991 és 2010 között feljegyezték az éves csapadékösszeget Budapesten, illetve Szegeden. Az átlag Budapesten 533 mm, a korrigált tapasztalati szórás 139, Szegeden az átlag 540 mm, a korrigált tapasztalati szórás 143 lett (forrás: OMSZ). Állíthatjuk-e, hogy Szegeden szignifikánsan nagyobb a csapadékmennyiség várható értéke?

év	1991	1992	1993	1994	1995	...	átlag	s_n^*
Budapest	594	364	505	481	575	...	533	139
Szeged	617	457	408	399	562	...	540	143

A két adatsor **nem független**, mert egy éven belül a két város időjárása nem független (az egyes minták sem teljesen függetlenek, és nem biztos, hogy normális eloszlásúak). Ezért **párosított** (paired) t -próba alkalmazható, egyoldali nullhipotézissel. Ez általában a párok különbségét hasonlítja össze 0-val, egymintás próbát alkalmazva.

$H_0 : m_1 \geq m_2$, $H_1 : m_1 < m_2$, ahol m_1 a budapesti, m_2 a szegedi csapadékmennyiség várható értéke.

A próbát elvégezve a p -értékre 0,366 adódott.

Elfogadjuk a nullhipotézist, az adatok alapján Szegeden nem több szignifikánsan a csapadékmennyiség várható értéke, mint Budapesten. 

Welch-féle t -próba

A **várható érték összehasonlítására** párosítatlan esetben (two-sample two-sided unpaired Welch t -test). Legyenek $X_1, \dots, X_{n_1}, Y_1, \dots, Y_{n_2}$ **független normális eloszlású** valószínűségi változók: $X_i \sim N(m_1, \sigma_1^2)$, $Y_i \sim N(m_2, \sigma_2^2)$, ahol $m_1, m_2, \sigma_1, \sigma_2$ ismeretlen paraméterek.

Kétoldali ellenhipotézis: $H_0 : m_1 = m_2$; $H_1 : m_1 \neq m_2$.

Próbastatisztika:

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{s_{n_1}^{*2}(X)}{n_1} + \frac{s_{n_2}^{*2}(Y)}{n_2}}}.$$

Ha $|t| > t_{f, 1-\alpha}$, akkor elvetjük a nullhipotézist, különben elfogadjuk. A $t_{f, 1-\alpha}$ kritikus érték az f szabadsági fokú **kétoldali** t -próba kritikus értéke α szignifikanciaszint mellett (a megfelelő eloszlás $1 - \alpha/2$ -kvantilise).

Szabadsági fok:

$$f \approx \frac{\left(\frac{s_{n_1}^{*2}(X)}{n_1} + \frac{s_{n_2}^{*2}(Y)}{n_2}\right)^2}{\frac{s_{n_1}^{*4}(X)}{n_1^2(n_1-1)} + \frac{s_{n_2}^{*4}(Y)}{n_2^2(n_2-1)}}.$$

Ha $p < \alpha$: elvetjük H_0 -t, az várható értékek szignifikánsan eltérnek egymástól.

Házi feladat április 8., kedd, 10:15-ig

A félév elején gyűjtött adatok alapján

(a) állíthatjuk-e, hogy azok, akik tanulnak, szignifikánsan több időt töltenek sorozatnézéssel, mint azok, akik nem tanulnak?

(b) állíthatjuk-e, hogy azok, akik tanulnak, szignifikánsan kevesebb időt töltenek sorozatnézéssel, mint azok, akik nem tanulnak?

(c) állíthatjuk-e, hogy a tanulók és nem tanulók utazással töltött ideje szignifikánsak eltérő?

A szignifikanciaszint legyen mindenhol $\alpha = 0,05$.