Momentummódszer (5. előadás)

Legyen $X_1, \ldots, X_n$ független azonos eloszlású minta.

1. Az eloszlás k. momentuma, ha ϑ az ismeretlen paraméter: $\mu_{k,\vartheta} = \mathbb{E}_\vartheta(X_1^k)$.
2. Legyen $\hat{\mu}_k = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j^k$ az eloszlás k. tapasztalati momentuma.
3. Írjuk fel az alábbi egyenleteket a legkisebb olyan k-ig, amire az egyenletrendszer egyértelműen meghatározza ϑ-t (**bár nincs mindig ilyen k**):

$$\mathbb{E}_\vartheta(X_1) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j;$$

$$\mathbb{E}_\vartheta(X_1^2) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j^2;$$

$$\ldots$$

$$\mathbb{E}_\vartheta(X_1^k) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j^k.$$

4. A ϑ momentummódszerrel kapott becslése az a $\hat{\vartheta}$, ami megoldása a fenti egyenletrendszernek. **Nem mindig létezik, nem mindig egyértelmű, nem feltétlenül hatásos.**

Momentummódszer: Poisson– és exponenciális eloszlás

$X_1, \ldots, X_n$ független **Poisson-eloszlásúak** ismeretlen $\lambda > 0$ paraméterrel. A $k = 1$-hez tartozó egyenlet:

$$\mathbb{E}_\lambda(X_1) = \overline{X}.$$

Mivel a λ paraméterű Poisson-eloszlás várható értéke λ:

$$\hat{\lambda} = \overline{X}.$$

Momentummódszer: Poisson– és exponenciális eloszlás

$X_1, \ldots, X_n$ független **Poisson-eloszlásúak** ismeretlen $\lambda > 0$ paraméterrel. A $k = 1$-hez tartozó egyenlet:

$$\mathbb{E}_\lambda(X_1) = \overline{X}.$$

Mivel a λ paraméterű Poisson-eloszlás várható értéke λ:

$$\hat{\lambda} = \overline{X}.$$

$X_1, \ldots, X_n$ független **exponenciális** eloszlásúak ismeretlen $\lambda > 0$ paraméterrel. A $k = 1$-hez tartozó egyenlet:

$$\mathbb{E}_\lambda(X_1) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j = \overline{X}.$$

Ez egyértelműen oldható meg λ-ra:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\overline{X}}.$$

Momentummódszer: normális eloszlás

$X_1, \ldots, X_n$ független $N(m, \sigma^2)$ eloszlású minta (azaz normális eloszlású m várható értékkel és σ szórással).

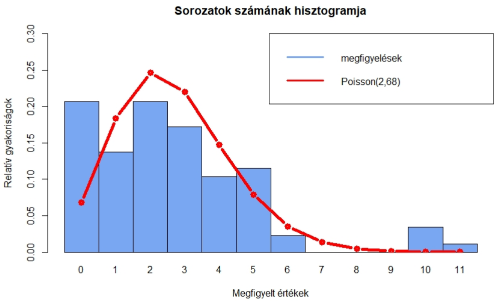
A $k = 1$-hez és $k = 2$-höz tartozó egyenletek:

$$\mathbb{E}_{m,\sigma}(X_1) = m = \overline{X};$$
$$\mathbb{E}_{m,\sigma}(X_1^2) = \sigma^2 + m^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j^2.$$

A másodikba beírva az elsőt: $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j^2 - \overline{X}^2 = s_n^2$ (a tapasztalati szórásnégyzet). Tehát az első két egyenlet együtt egyértelműen oldható meg, a momentummódszerrel kapott becslés:

$$\hat{m} = \overline{X}; \qquad \hat{\sigma} = s_n.$$

Poisson-eloszlás paraméterének becslése



A sorozatok számának hisztogramja és Poisson-eloszlás $\hat{\lambda} = \overline{X} = 2,68$ becsült paraméterrel

$n = 87$, $\sum_{j=1}^{n} X_j = 237$, és $\overline{X} = 2,68$

Maximumlikelihood-módszer

Definíció (Likelihood-függvény)

Ha az $(Y_1, \ldots, Y_n)$ *független minta diszkrét (a lehetséges értékeinek száma véges vagy megszámlálható sok), akkor a likelihood-függvénye:*

$$L_{n,\vartheta}(k_1, \ldots, k_n) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}_{j,\vartheta}(Y_j = k_j) \qquad ((k_1, \ldots, k_n) \in H).$$

Maximumlikelihood-módszer

Definíció (Likelihood-függvény)

Ha az $(Y_1, \ldots, Y_n)$ *független minta diszkrét (a lehetséges értékeinek száma véges vagy megszámlálható sok), akkor a likelihood-függvénye:*

$$L_{n,\vartheta}(k_1, \ldots, k_n) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}_{j,\vartheta}(Y_j = k_j) \qquad ((k_1, \ldots, k_n) \in H).$$

Ha az $(Y_1, \ldots, Y_n)$ *független minta abszolút folytonos, és* Y_j *sűrűségfüggvénye (a* $\mathbb{P}_\vartheta$ *valószínűség mellett)* $f_{j,\vartheta}$*, akkor a minta likelihood-függvénye:*

$$L_{n,\vartheta}(t_1, \ldots, t_n) = \prod_{j=1}^{n} f_{j,\vartheta}(t_j) \qquad (t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}).$$

Maximumlikelihood-módszer

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ statisztikai mező, ahol $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$, vagyis az ismeretlen eloszlás a ϑ paraméterrel jellemezhető.

Definíció (Maximum-likelihood becslés)

A ϑ maximumlikelihood-becslése (ML-becslése) az $X_1, \dots, X_n$ mintából $\hat{\vartheta}$, ha $\hat{\vartheta}$ maximalizálja a $\vartheta \mapsto L_{n,\vartheta}(X_1, \dots, X_n)$ függvényt, ahol $L_{n,\vartheta}$ a minta likelihood-függvénye. Azaz, ha

$$L_{n,\hat{\vartheta}}(X_1, \dots, X_n) \geq L_{n,\vartheta}(X_1, \dots, X_n) \text{ minden } \vartheta \in \Theta\text{-ra.}$$

Maximum-likelihood becslések

- binomiális eloszlás ismert k renddel: $\hat{p} = \overline{X}/k$
- Poisson-eloszlás: $\hat{\lambda} = \overline{X}$
- geometriai eloszlás: $\hat{p} = 1/\overline{X}$
- normális eloszlás: $\hat{m} = \overline{X}, \hat{\sigma} = s_n$
- exponenciális eloszlás: $\hat{\lambda} = 1/\overline{X}$
- egyenletes eloszlás: $\hat{a} = \min_j X_j$; $\qquad \hat{b} = \max_j X_j$

Elégséges statisztika

Definíció

Legyen $X_1, \ldots, X_n$ *független minta* ϑ *paraméterű eloszlásból. A* T *statisztika elégséges, ha a likelihood-függvény felírható a következő alakban megfelelő* h *és* g *függvényekkel:*

$$L_{n,\vartheta}(X_1, \ldots, X_n) = h(X_1, \ldots, X_n) \cdot g_\vartheta(T(X_1, \ldots, X_n)).$$

Elégséges statisztika

Definíció

Legyen $X_1, \dots, X_n$ *független minta* ϑ *paraméterű eloszlásból. A* T *statisztika elégséges, ha a likelihood-függvény felírható a következő alakban megfelelő* h *és* g *függvényekkel:*

$$L_{n,\vartheta}(X_1, \dots, X_n) = h(X_1, \dots, X_n) \cdot g_\vartheta(T(X_1, \dots, X_n)).$$

- Poisson-eloszlás esetén az összeg és az átlag is elégséges statisztika.
- Normális eloszlásnál elégséges statisztika: $(\overline{X}, s_n)$, vagy $\left(\sum_{j=1}^n X_j^2, \sum_{j=1}^n X_j\right)$.
- Az elégséges statisztika nem egyértelmű.
- Ha létezik maximumlikelihood-becslés, T pedig elégséges statisztika, akkor az ML-becslés felírható $u(T(X_1, \dots, X_n))$ alakban valamely u függvényre. Azaz, ahogy a példákban is láttuk, az elégséges statisztikából kifejezhető a maximumlikelihood-becslés.

Hatásos becslés az elégséges statisztika segítségével

A következő tétel alapján egy

- torzítatlan becslésből kiindulva
- az elégséges statisztika függvényeként, arra feltételes várható értéket véve.
- egy hatásosabb, vagyis kisebb szórású, szintén torzítatlan becslés is készíthető.

Például Poisson-eloszlás esetén, ha a λ paramétert szeretnénk becsülni:

- $\mathbb{E}_\lambda(X_1) = \lambda$, ezért X_1 torzítatlan becslése λ-nak;
- $\sum_{j=1}^{n} X_j$ elégséges statisztika

Hatásos becslés az elégséges statisztika segítségével

A következő tétel alapján egy

- torzítatlan becslésből kiindulva
- az elégséges statisztika függvényeként, arra feltételes várható értéket véve.
- egy hatásosabb, vagyis kisebb szórású, szintén torzítatlan becslés is készíthető.

Például Poisson-eloszlás esetén, ha a λ paramétert szeretnénk becsülni:

- $\mathbb{E}_\lambda(X_1) = \lambda$, ezért X_1 torzítatlan becslése λ-nak;
- $\sum_{j=1}^n X_j$ elégséges statisztika
- tekintsük az alábbi feltételes várható értéket (ha az összeget tudjuk, mennyi lehetett X_1:
$$\mathbb{E}(X_1 | X_1 + \ldots + X_n) = \overline{X}$$
- továbbra is torzítatlan becslést kaptunk, de a szórás lényegesen kisebb lett:

$$\mathbb{E}_\lambda(\overline{X}) = \mathbb{E}_\lambda(X_1) = \lambda; \qquad D_\lambda(\overline{X}) = \frac{D_\lambda(X_1)}{\sqrt{n}} < D_\lambda(X_1).$$

Rao–Blackwell-tétel

Tétel (Rao–Blackwell)

Tegyük fel, hogy a T statisztika torzítatlan becslés a ϑ paraméterre, valamint S elégséges statisztika ϑ-ra. Ekkor megadható olyan T^* becslés, melyre

- $T^* = h(S)$ *megfelelő h függvénnyel;*
- T^* *torzítatlan ϑ-ra: $\mathbb{E}_\vartheta(T^*) = \vartheta$ minden $\vartheta \in \Theta$-ra;*
- T^* *hatásosabb, mint T: $D_\vartheta(T^*) \le D_\vartheta(T)$ minden $\vartheta \in \Theta$-ra.*

Ha az S statisztika teljes is (azaz minden olyan f függvény, melyre $\mathbb{E}_\vartheta(f(S)) = 0$ minden ϑ-ra, „majdnem mindenütt” nulla), akkor T^* hatásos, azaz minden torzítatlan becslésnél hatásosabb.

A megoldás az $\mathbb{E}(T|S)$ feltételes várható érték lesz. Például Poisson-eloszlásnál $\mathbb{E}(X_1|\sum_{j=1}^n X_j) = \overline{X}$ hatásos.

Állítás

Poisson-eloszlásnál, illetve normális eloszlásnál (m-re) a mintaelemek összege teljes elégséges statisztika, a mintaátlag pedig hatásos becslése a paraméternek.

Fisher-információ

Egy mintaelem **Fisher-információja**:

$$I_1(\vartheta) = \mathbb{E}_\vartheta\left(\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}\log f_\vartheta(X_1)\right)^2\right),$$

ahol f_ϑ a likelihoodfüggvény $\mathbb{P}_\vartheta$ mellett.

Fisher-információ

Egy mintaelem **Fisher-információja**:

$$I_1(\vartheta) = \mathbb{E}_\vartheta\left(\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}\log f_\vartheta(X_1)\right)^2\right),$$

ahol f_ϑ a likelihoodfüggvény $\mathbb{P}_\vartheta$ mellett.

- Megfelelő (regularitási) feltételek mellett a független azonos eloszlású, n elemű minta Fisher-információja: $I_n(\vartheta) = n \cdot I_1(\vartheta)$.
- Ha T elégséges statisztika, akkor $T(X_1, \ldots, X_n)$ Fisher-információja ugyanaz, mint $(X_1, \ldots, X_n)$ Fisher-információja (például Poisson-eloszlásnál az átlag Fisher-információja ugyanaz, mint a teljes mintáé).
- **Cramér–Rao-egyenlőtlenség**: megfelelő (regularitási) feltételek mellett, ha T torzítatlan becslés ϑ-ra, akkor

$$D^2(T(X)) \geq \frac{1}{I_n(\vartheta)} = \frac{1}{nI_1(\vartheta)}.$$

(Ebben az értelemben feleakkora szóráshoz négyszer annyi mintaelem kell.)

Fisher-információ

Egy mintaelem **Fisher-információja**:

$$I_1(\vartheta) = \mathbb{E}_\vartheta\left(\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}\log f_\vartheta(X_1)\right)^2\right),$$

ahol f_ϑ a likelihoodfüggvény $\mathbb{P}_\vartheta$ mellett.

Néhány nevezetes eloszlás Fisher-információja egy mintaelemből:

- binomiális eloszlás n renddel és p paraméterrel:

$$\frac{n}{p(1-p)}.$$

- Poisson-eloszlás λ paraméterrel: $1/\lambda$
- normális eloszlás, ha $\vartheta = (m, \sigma)$:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sigma^2} \end{pmatrix}.$$

Fisher-információ: Poisson-eloszlás

Egy mintaelem **Fisher-információja** (az f_λ likelihood-függvény most a valószínűség):

$$I_1(\lambda) = \mathbb{E}_\lambda\left(\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\log f_\lambda(X_1)\right)^2\right) = \mathbb{E}_\lambda\left(\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\log\left(\frac{\lambda^{X_1}}{X_1!}e^{-\lambda}\right)\right)^2\right) =$$

$$= \mathbb{E}_\lambda\left(\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(X_1\log\lambda - \log X_1! - \lambda\right)\right)^2\right) = \mathbb{E}_\lambda\left(\left(\frac{X_1}{\lambda} - 1\right)^2\right) =$$

$$= \mathbb{E}_\lambda\left(\frac{X_1^2}{\lambda^2} - 2\frac{X_1}{\lambda} + 1\right) = \frac{\lambda+\lambda^2}{\lambda^2} - 2 + 1 = \frac{1}{\lambda}.$$

Felhasználtuk, hogy Poisson-eloszlásnál $\mathbb{E}_\lambda(X_1) = D_\lambda(X_1) = \lambda$, így

$$\mathbb{E}_\lambda(X_1^2) = D_\lambda^2(X_1) + \mathbb{E}_\lambda^2(X_1) = \lambda + \lambda^2.$$

Következmény a **Cramér–Rao-egyenlőtlenség** alapján: ha T torzítatlan becslése λ-nak n elemű független mintából, akkor

$$D^2(T(X_1,\dots,X_n)) \geq \frac{\lambda}{n}.$$

Konfidenciaintervallum az ML-becslés alapján

Gyakran az ismeretlen paraméterre egyetlen becslés helyett konfidenciaintervallumot adhatunk meg, amire például az igaz, hogy

$$\mathbb{P}_\vartheta(T_1 \leq \vartheta \leq T_2) \geq 0,95 \qquad (\vartheta \in \Theta)$$

. Ez egy olyan véletlen intervallum, ami 95%-os megbízhatóságú, azaz legalább ennyi valószínűséggel tartalmazza a becsülni kívánt paramétert.

Konfidenciaintervallum az ML-becslés alapján

Gyakran az ismeretlen paraméterre egyetlen becslés helyett konfidenciaintervallumot adhatunk meg, amire például az igaz, hogy

$$\mathbb{P}_\vartheta(T_1 \leq \vartheta \leq T_2) \geq 0,95 \qquad (\vartheta \in \Theta)$$

. Ez egy olyan véletlen intervallum, ami 95%-os megbízhatóságú, azaz legalább ennyi valószínűséggel tartalmazza a becsülni kívánt paramétert.

Állítás

Ha likelihoodfüggvény teljesít bizonyos regularitási feltételeket, akkor a ϑ paraméternek az $X_1, X_2, \ldots, X_n$ mintából számolt $\hat{\vartheta}_n$ maximumlikelihood-becslése

- *létezik;*
- *aszimptotikusan torzítatlan:* $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_\vartheta(\hat{\vartheta}_n) = \vartheta$ *minden* $\vartheta \in \Theta$*-ra;*
- *aszimptotikusan hatásos:* $\lim_{n\to\infty} \sqrt{nI_1(\vartheta)} D_\vartheta(\hat{\vartheta}_n) = 1$ *minden* $\vartheta \in \Theta$*-ra;*
- *aszimptotikusan normális eloszlású:* $\sqrt{nI_1(\vartheta)}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta)$ *eloszlásban tart a standard normális eloszláshoz minden* $\vartheta \in \Theta$*-ra* $n \to \infty$ *esetén.*

Itt $I_1(\vartheta)$ az egyelemű mintából számolt Fisher-információt jelöli.

Konfidenciaintervallum az ML-becslés alapján

Ez alapján **aszimptotikus konfidenciaintervallum**, ami $n \to \infty$ esetén $1-\alpha$-hoz tartó valószínűséggel tartalmazza ϑ-t:

$$\left(\hat{\vartheta}_n - \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{\hat{I}_n(\vartheta)}};\ \hat{\vartheta}_n + \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{\hat{I}_n(\vartheta)}}\right),$$

ahol $\hat{I}_n(\vartheta) = n \cdot I_1(\hat{\vartheta}_n)$, vagyis a Fisher-információ kifejezésébe a maximumlikelihood-becslést írjuk be.

Másképpen felírva:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_\vartheta\left(\hat{\vartheta}_n - \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{\hat{I}_n(\vartheta)}} \le \vartheta \le \hat{\vartheta}_n + \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{\hat{I}_n(\vartheta)}}\right) = 1-\alpha.$$

Itt is vegyük észre, hogy ϑ ismeretlen, de rögzített paraméter, és az intervallum alsó és felső végpontjai véletlenek, az eloszlásuk is ϑ-tól függ (ezt jelöli a ϑ az alsó indexben).

Konfidenciaintervallum az ML-becslés alapján

Tekintsünk egy n elemű független mintát az alábbi sűrűségfüggvénnyel, ahol $\lambda > 0$ ismeretlen paraméter:

$$f_\lambda(x) = \frac{\lambda^4}{6} x^3 e^{-\lambda x} \mathbb{I}(x > 0).$$

Konfidenciaintervallum az ML-becslés alapján

Tekintsünk egy n elemű független mintát az alábbi sűrűségfüggvénnyel, ahol $\lambda > 0$ ismeretlen paraméter:

$$f_\lambda(x) = \frac{\lambda^4}{6} x^3 e^{-\lambda x} \mathbb{I}(x > 0).$$

A likelihood-függvény, felhasználva, hogy az X_j-k 1 valószínűséggel pozitívak:

$$f(\lambda) = \prod_{j=1}^{n} f_\lambda(X_j) = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\lambda^4}{6} X_j^3 e^{-\lambda X_j} \right) = \frac{\prod_{j=1}^{n} X_j^3}{6^n} \cdot \lambda^{4n} \cdot e^{-\lambda \sum_{j=1}^{n} X_j}.$$

Konfidenciaintervallum az ML-becslés alapján

Tekintsünk egy n elemű független mintát az alábbi sűrűségfüggvénnyel, ahol $\lambda > 0$ ismeretlen paraméter:

$$f_\lambda(x) = \frac{\lambda^4}{6} x^3 e^{-\lambda x} \mathbb{I}(x > 0).$$

A likelihood-függvény, felhasználva, hogy az X_j-k 1 valószínűséggel pozitívak:

$$f(\lambda) = \prod_{j=1}^{n} f_\lambda(X_j) = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\lambda^4}{6} X_j^3 e^{-\lambda X_j} \right) = \frac{\prod_{j=1}^{n} X_j^3}{6^n} \cdot \lambda^{4n} \cdot e^{-\lambda \sum_{j=1}^{n} X_j}.$$

$$\log f(\lambda) = \log \frac{\prod_{j=1}^{n} X_j^3}{6^n} + 4n \log \lambda - \lambda \cdot \sum_{j=1}^{n} X_j.$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \log f(\lambda) = \frac{4n}{\lambda} - \sum_{j=1}^{n} X_j.$$

Konfidenciaintervallum az ML-becslés alapján

Tekintsünk egy n elemű független mintát az alábbi sűrűségfüggvénnyel, ahol $\lambda > 0$ ismeretlen paraméter:

$$f_\lambda(x) = \frac{\lambda^4}{6} x^3 e^{-\lambda x} \mathbb{I}(x > 0).$$

A likelihood-függvény, felhasználva, hogy az X_j-k 1 valószínűséggel pozitívak:

$$f(\lambda) = \prod_{j=1}^{n} f_\lambda(X_j) = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\lambda^4}{6} X_j^3 e^{-\lambda X_j} \right) = \frac{\prod_{j=1}^{n} X_j^3}{6^n} \cdot \lambda^{4n} \cdot e^{-\lambda \sum_{j=1}^{n} X_j}.$$

$$\log f(\lambda) = \log \frac{\prod_{j=1}^{n} X_j^3}{6^n} + 4n \log \lambda - \lambda \cdot \sum_{j=1}^{n} X_j.$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \log f(\lambda) = \frac{4n}{\lambda} - \sum_{j=1}^{n} X_j.$$

Ez pontosan akkor pozitív, ha $\lambda < \frac{4}{\overline{X}}$, és negatív különben. Ezért a $\log f(\lambda)$ függvény globális maximumhelye $\lambda = \frac{4}{\overline{X}}$, és a logaritmusfüggvény monotonitása miatt ez lesz a maximumlikelihood-becslés is.

Konfidenciaintervallum az ML-becslés alapján

Az előző alapján a Fisher-információt is kiszámíthatjuk, ha tudjuk, hogy

$$\mathbb{E}_\lambda(X_j) = \frac{4}{\lambda}, \text{ és } D^2_\lambda(X_j) = \frac{4}{\lambda^2}.$$

Ugyanis

$$I_1(\vartheta) = \mathbb{E}_\lambda\left(\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\log f_\lambda(X_1)\right)^2\right) = \mathbb{E}_\lambda\left(\left(\frac{4n}{\lambda} - \sum_{j=1}^n X_j\right)^2\right) =$$

$$= D^2_\lambda\left(\sum_{j=1}^n X_j\right) = n \cdot D^2_\lambda(X_1) = n \cdot \frac{4}{\lambda^2}.$$

Konfidenciaintervallum az ML-becslés alapján

Az előző alapján a Fisher-információt is kiszámíthatjuk, ha tudjuk, hogy

$$\mathbb{E}_\lambda(X_j) = \frac{4}{\lambda}, \text{ és } D^2_\lambda(X_j) = \frac{4}{\lambda^2}.$$

Ugyanis

$$I_1(\vartheta) = \mathbb{E}_\lambda\left(\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\log f_\lambda(X_1)\right)^2\right) = \mathbb{E}_\lambda\left(\left(\frac{4n}{\lambda} - \sum_{j=1}^n X_j\right)^2\right) =$$

$$= D^2_\lambda\left(\sum_{j=1}^n X_j\right) = n \cdot D^2_\lambda(X_1) = n \cdot \frac{4}{\lambda^2}.$$

A fentiek alapján 95%-os megbízhatósági szintű aszimptotikus konfidenciainterval-lum λ-ra:

$$\left(\frac{4}{\overline{X}} - 1,96 \cdot \frac{4\overline{X}^2}{\sqrt{n}}, \frac{4}{\overline{X}} + 1,96 \cdot \frac{4\overline{X}^2}{\sqrt{n}}\right).$$

Házi feladat március 18., kedd, 10:15-ig

Tekintsünk egy $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független mintát az alábbi sűrűségfüggvénnyel, ahol $a > 0$ ismeretlen paraméter:

$$f_a(x) = \frac{4}{a^4} x^3 \mathbb{I}(0 \leq x \leq a).$$

Adjunk becslést momentummódszerrel az ismeretlen $a > 0$ paraméterre.