

## Momentum módszer (5. előadás)

Legyen  $X_1, \dots, X_n$  független azonos eloszlású minta.

- 1 Az eloszlás  $k$ . momentuma, ha  $\vartheta$  az ismeretlen paraméter:  $\mu_{k,\vartheta} = \mathbb{E}_{\vartheta}(X_1^k)$ .
- 2 Legyen  $\hat{\mu}_k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^k$  az eloszlás  $k$ . tapasztalati momentuma.
- 3 Írjuk fel az alábbi egyenleteket a legkisebb olyan  $k$ -ig, amire az egyenletrendszer egyértelműen meghatározza  $\vartheta$ -t (**bár nincs mindig ilyen  $k$** ):

$$\mathbb{E}_{\vartheta}(X_1) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j;$$

$$\mathbb{E}_{\vartheta}(X_1^2) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^2;$$

...

$$\mathbb{E}_{\vartheta}(X_1^k) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^k.$$

- 4 A  $\vartheta$  momentum módszerrel kapott becslése az a  $\hat{\vartheta}$ , ami megoldása a fenti egyenletrendszernek. **Nem mindig létezik, nem mindig egyértelmű, nem feltétlenül hatásos.**

## Momentum módszer: Poisson- és exponenciális eloszlás

$X_1, \dots, X_n$  független **Poisson-eloszlásúak** ismeretlen  $\lambda > 0$  paraméterrel. A  $k = 1$ -hez tartozó egyenlet:

$$\mathbb{E}_\lambda(X_1) = \bar{X}.$$

Mivel a  $\lambda$  paraméterű Poisson-eloszlás várható értéke  $\lambda$ :

$$\hat{\lambda} = \bar{X}.$$

## Momentum módszer: Poisson- és exponenciális eloszlás

$X_1, \dots, X_n$  független **Poisson-eloszlásúak** ismeretlen  $\lambda > 0$  paraméterrel. A  $k = 1$ -hez tartozó egyenlet:

$$\mathbb{E}_\lambda(X_1) = \bar{X}.$$

Mivel a  $\lambda$  paraméterű Poisson-eloszlás várható értéke  $\lambda$ :

$$\hat{\lambda} = \bar{X}.$$

$X_1, \dots, X_n$  független **exponenciális** eloszlásúak ismeretlen  $\lambda > 0$  paraméterrel. A  $k = 1$ -hez tartozó egyenlet:

$$\mathbb{E}_\lambda(X_1) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j = \bar{X}.$$

Ez egyértelműen oldható meg  $\lambda$ -ra:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}}.$$

## Momentum módszer: normális eloszlás

$X_1, \dots, X_n$  független  $N(m, \sigma^2)$  eloszlású minta (azaz normális eloszlású  $m$  várható értékkel és  $\sigma$  szórással).

A  $k = 1$ -hez és  $k = 2$ -höz tartozó egyenletek:

$$\mathbb{E}_{m,\sigma}(X_1) = m = \bar{X};$$

$$\mathbb{E}_{m,\sigma}(X_1^2) = \sigma^2 + m^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^2.$$

A másodikba beírva az elsőt:  $\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^2 - \bar{X}^2 = s_n^2$  (a tapasztalati szórásnégyzet). Tehát az első két egyenlet együtt egyértelműen oldható meg, a momentum módszerrel kapott becslés:

$$\hat{m} = \bar{X}; \quad \hat{\sigma} = s_n.$$

## Az egyenletes eloszlás várható értéke és szórása

Az egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénye:  $f(x) = \frac{1}{b-a}$ , ha  $a \leq x \leq b$ , és 0 különben.

A várható értéke:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \left[ \frac{x^2}{2(b-a)} \right]_{x=a}^b \\ &= \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.\end{aligned}$$

## Az egyenletes eloszlás várható értéke és szórása

Az egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénye:  $f(x) = \frac{1}{b-a}$ , ha  $a \leq x \leq b$ , és 0 különben.

A várható értéke:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \left[ \frac{x^2}{2(b-a)} \right]_{x=a}^b \\ &= \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.\end{aligned}$$

A négyzetének a várható értéke:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{x=a}^b \\ &= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}.\end{aligned}$$

## Az egyenletes eloszlás várható értéke és szórása

Az egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénye:  $f(x) = \frac{1}{b-a}$ , ha  $a \leq x \leq b$ , és 0 különben.

A várható értéke:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}.$$

A négyzetének a várható értéke:

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}.$$

A szórásnégyzete:

$$\begin{aligned} D^2(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \\ &= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}. \end{aligned}$$

## Momentum módszer: egyenletes eloszlás

Legyen  $X_1, \dots, X_n$  független minta az  $[a, b]$  intervallumon egyenletes eloszlásból. Ennek várható értéke  $(a + b)/2$ , szórása  $(b - a)/\sqrt{12}$ . Ezek alapján a  $k = 1$ -hez és  $k = 2$ -höz tartozó egyenlet:

$$\mathbb{E}_{a,b}(X_1) = \frac{a + b}{2} = \bar{X};$$
$$\mathbb{E}_{a,b}(X_1^2) = \frac{(b - a)^2}{12} + \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^2.$$

A másodikba beírva az elsőt:  $\frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^2 - \bar{X}^2 = s_n^2$ , amiből

$$\hat{a} = \bar{X} - \sqrt{3}s_n; \quad \hat{b} = \bar{X} + \sqrt{3}s_n.$$

Hátránya: előfordulhat, hogy ezek nem is lehetséges értékek: ha  $\hat{a}$  nagyobb a legkisebb megfigyelésnél, vagy  $\hat{b}$  kisebb a legnagyobb megfigyelésnél.

# Maximumlikelihood-módszer

## Definíció (Likelihood-függvény)

Ha az  $(Y_1, \dots, Y_n)$  független minta diszkrét (a lehetséges értékeinek száma véges vagy megszámlálható sok), akkor a likelihood-függvénye:

$$L_{n,\vartheta}(k_1, \dots, k_n) = \prod_{j=1}^n \mathbb{P}_{j,\vartheta}(Y_j = k_j) \quad ((k_1, \dots, k_n) \in H).$$

# Maximumlikelihood-módszer

## Definíció (Likelihood-függvény)

Ha az  $(Y_1, \dots, Y_n)$  független minta diszkrét (a lehetséges értékeinek száma véges vagy megszámlálható sok), akkor a likelihood-függvénye:

$$L_{n,\vartheta}(k_1, \dots, k_n) = \prod_{j=1}^n \mathbb{P}_{j,\vartheta}(Y_j = k_j) \quad ((k_1, \dots, k_n) \in H).$$

Ha az  $(Y_1, \dots, Y_n)$  független minta abszolút folytonos, és  $Y_j$  sűrűségfüggvénye (a  $\mathbb{P}_\vartheta$  valószínűség mellett)  $f_{j,\vartheta}$ , akkor a minta likelihood-függvénye:

$$L_{n,\vartheta}(t_1, \dots, t_n) = \prod_{j=1}^n f_{j,\vartheta}(t_j) \quad (t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}).$$

# Maximumlikelihood-módszer

Legyen  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  statisztikai mező, ahol  $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$ , vagyis az ismeretlen eloszlás a  $\vartheta$  paraméterrel jellemezhető.

## Definíció (Maximum-likelihood becslés)

A  $\vartheta$  maximumlikelihood-becslése (ML-becslése) az  $X_1, \dots, X_n$  mintából  $\hat{\vartheta}$ , ha maximalizálja a  $\vartheta \mapsto L_{n,\vartheta}(X_1, \dots, X_n)$  függvényt, ahol  $L_{n,\vartheta}$  a minta likelihood-függvénye. Azaz, ha

$$L_{n,\hat{\vartheta}}(X_1, \dots, X_n) \geq L_{n,\vartheta}(X_1, \dots, X_n) \text{ minden } \vartheta \in \Theta\text{-ra.}$$

## Maximum-likelihood becslések

- binomiális eloszlás ismert  $k$  renddel:  $\hat{p} = \bar{X}/k$
- Poisson-eloszlás:  $\hat{\lambda} = \bar{X}$
- geometriai eloszlás:  $\hat{p} = 1/\bar{X}$
- normális eloszlás:  $\hat{m} = \bar{X}, \hat{\sigma} = s_n$
- exponenciális eloszlás:  $\hat{\lambda} = 1/\bar{X}$
- egyenletes eloszlás:  $\hat{a} = \min_j X_j; \quad \hat{b} = \max_j X_j$

## ML-becslés: exponenciális eloszlás

$X_1, \dots, X_n$  függetlenek, eloszlásuk exponenciális eloszlás  $\lambda > 0$  paraméterrel. Ekkor

$$L_{n,\lambda}(X_1, \dots, X_n) = \prod_{j=1}^n f_{j,\lambda}(X_j) = \prod_{j=1}^n \left[ \lambda \exp(-\lambda X_j) \mathbb{I}(X_j > 0) \right].$$

$$L_{n,\lambda}(X_1, \dots, X_n) = \lambda^n \exp\left(-\lambda \sum_{j=1}^n X_j\right).$$

## ML-becslés: exponenciális eloszlás

$X_1, \dots, X_n$  függetlenek, eloszlásuk exponenciális eloszlás  $\lambda > 0$  paraméterrel. Ekkor

$$L_{n,\lambda}(X_1, \dots, X_n) = \prod_{j=1}^n f_{j,\lambda}(X_j) = \prod_{j=1}^n \left[ \lambda \exp(-\lambda X_j) \mathbb{I}(X_j > 0) \right].$$

$$L_{n,\lambda}(X_1, \dots, X_n) = \lambda^n \exp \left( -\lambda \sum_{j=1}^n X_j \right).$$

$$\log L_{n,\lambda}(X_1, \dots, X_n) = n \log \lambda - \lambda \sum_{j=1}^n X_j$$

## ML-becslés: exponenciális eloszlás

$X_1, \dots, X_n$  függetlenek, eloszlásuk exponenciális eloszlás  $\lambda > 0$  paraméterrel. Ekkor

$$L_{n,\lambda}(X_1, \dots, X_n) = \prod_{j=1}^n f_{j,\lambda}(X_j) = \prod_{j=1}^n \left[ \lambda \exp(-\lambda X_j) \mathbb{I}(X_j > 0) \right].$$

$$L_{n,\lambda}(X_1, \dots, X_n) = \lambda^n \exp\left(-\lambda \sum_{j=1}^n X_j\right).$$

$$\log L_{n,\lambda}(X_1, \dots, X_n) = n \log \lambda - \lambda \sum_{j=1}^n X_j$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \log L_{n,\lambda}(X_1, \dots, X_n) = \frac{n}{\lambda} - n\bar{X} > 0 \Leftrightarrow \lambda < 1/\bar{X} \Rightarrow \hat{\lambda} = 1/\bar{X}.$$

## ML-becslés: exponenciális eloszlás

$X_1, \dots, X_n$  függetlenek, eloszlásuk exponenciális eloszlás  $\lambda > 0$  paraméterrel. Ekkor

$$L_{n,\lambda}(X_1, \dots, X_n) = \prod_{j=1}^n f_{j,\lambda}(X_j) = \prod_{j=1}^n \left[ \lambda \exp(-\lambda X_j) \mathbb{I}(X_j > 0) \right].$$

$$L_{n,\lambda}(X_1, \dots, X_n) = \lambda^n \exp\left(-\lambda \sum_{j=1}^n X_j\right).$$

$$\log L_{n,\lambda}(X_1, \dots, X_n) = n \log \lambda - \lambda \sum_{j=1}^n X_j$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \log L_{n,\lambda}(X_1, \dots, X_n) = \frac{n}{\lambda} - n\bar{X} > 0 \Leftrightarrow \lambda < 1/\bar{X} \Rightarrow \hat{\lambda} = 1/\bar{X}.$$

**A likelihood-függvényben csak a  $\sum_{j=1}^n X_j$  összeg szerepel a paraméterrel együtt.** Ezt elég ismerni az ML-becsléshez.

## Poisson-eloszlás paraméterének becslése

Tegyük fel, hogy  $X_1, X_2, \dots, X_n$  független, azonos  $\lambda$  paraméterű Poisson-eloszlású minta, ahol  $\lambda > 0$  ismeretlen paraméter,  $n = 95$ , és  $\bar{X} = 1,379$ .

Poisson-eloszlásnál:

$$\mathbb{P}_\lambda(X_j = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}; \quad \mathbb{E}(X_j) = \lambda; \quad D(X_j) = \sqrt{\lambda}.$$

A megfigyelések az alábbiak (a gólok száma összesen  $\sum_{j=1}^n X_j = 131$ ):

$$3, \quad 0, \quad 2, \quad 2, \quad 1, \quad 3, \dots, 2.$$

Annak valószínűsége  $\lambda$  paraméter mellett, hogy éppen ezt a sorozatot kaptuk:

$$\begin{aligned} L_{95,\lambda}(3, 0, 2, \dots, 2) &= \frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} \cdot \dots \cdot \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} = \\ &= \frac{\lambda^{3+0+2+2\dots+2}}{3! \cdot 0! \cdot 2! \cdot \dots \cdot 2!} e^{-95 \cdot \lambda} = \frac{\lambda^{131}}{3! \cdot 0! \cdot 2! \cdot \dots \cdot 2!} e^{-95 \cdot \lambda} \end{aligned}$$

## Poisson-eloszlás paraméterének becslése

Tegyük fel, hogy  $X_1, X_2, \dots, X_n$  független, azonos  $\lambda$  paraméterű Poisson-eloszlású minta, ahol  $\lambda > 0$  ismeretlen paraméter,  $n = 95$ , és  $\bar{X} = 1,379$ .

Poisson-eloszlásnál:

$$\mathbb{P}_\lambda(X_j = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}; \quad \mathbb{E}(X_j) = \lambda; \quad D(X_j) = \sqrt{\lambda}.$$

A megfigyelések az alábbiak (a gólok száma összesen  $\sum_{j=1}^n X_j = 131$ ):

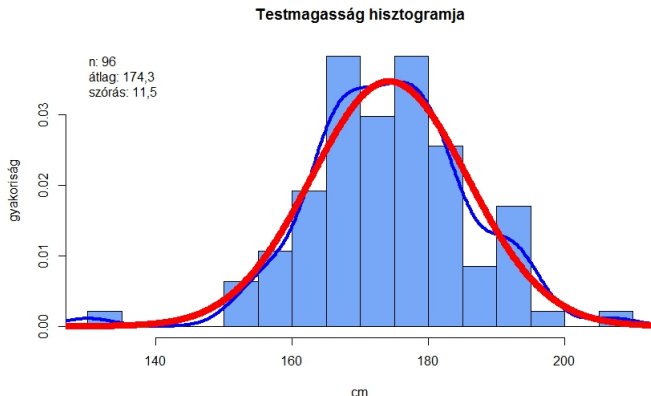
$$3, \quad 0, \quad 2, \quad 2, \quad 1, \quad 3, \dots, 2.$$

Annak valószínűsége  $\lambda$  paraméter mellett, hogy éppen ezt a sorozatot kaptuk:

$$\begin{aligned} L_{95,\lambda}(3, 0, 2, \dots, 2) &= \frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} \cdot \dots \cdot \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} = \\ &= \frac{\lambda^{3+0+2+2\dots+2}}{3! \cdot 0! \cdot 2! \cdot \dots \cdot 2!} e^{-95 \cdot \lambda} = \frac{\lambda^{131}}{3! \cdot 0! \cdot 2! \cdot \dots \cdot 2!} e^{-95 \cdot \lambda} \end{aligned}$$

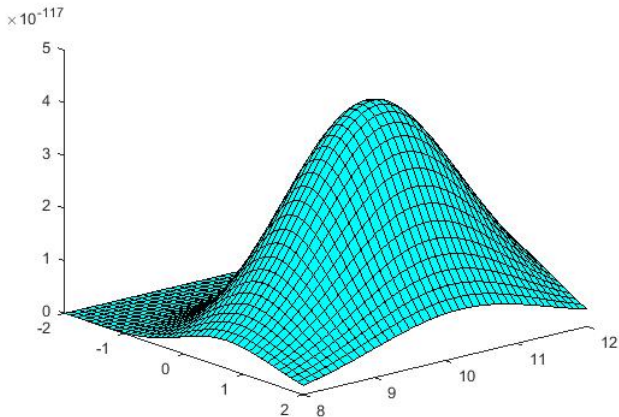
**A likelihood-függvényben csak  $n$  és a  $\sum_{j=1}^n X_j$  összeg szerepel a paraméterrel együtt.**

# Testmagasság hisztogramja



A testmagasság hisztogramja  $n = 96$  elemű mintából és az  $\bar{X} = 174,3$  várható értékű és  $s_n^* = 11,5$  szórású normális eloszlás sűrűségfüggvénye (pirossal).

# Likelihoodfüggvény



$n = 94$  elemű minta testmagasság-adatok alapján, normális eloszlást feltételezve.  
Az átlag:  $\bar{X} = 174,8$ , a tapasztalati szórás  $s_n = 10,5$ .

## ML-becslés: normális eloszlás

$X_1, \dots, X_n$  függetlenek, eloszlásuk normális eloszlás  $m, \sigma > 0$  paraméterekkel. Ekkor

$$L_{n,m,\sigma}(X_1, \dots, X_n) = \prod_{j=1}^n f_{j,\vartheta}(X_j) = \prod_{j=1}^n \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(X_j - m)^2}{2\sigma^2}\right) \right].$$

## ML-becslés: normális eloszlás

$X_1, \dots, X_n$  függetlenek, eloszlásuk normális eloszlás  $m, \sigma > 0$  paraméterekkel. Ekkor

$$L_{n,m,\sigma}(X_1, \dots, X_n) = \prod_{j=1}^n f_{j,\vartheta}(X_j) = \prod_{j=1}^n \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(X_j - m)^2}{2\sigma^2}\right) \right].$$

$$L_{n,m,\sigma}(X_1, \dots, X_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left(-\sum_{j=1}^n \frac{(X_j - m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

## ML-becslés: normális eloszlás

$X_1, \dots, X_n$  függetlenek, eloszlásuk normális eloszlás  $m, \sigma > 0$  paraméterekkel. Ekkor

$$L_{n,m,\sigma}(X_1, \dots, X_n) = \prod_{j=1}^n f_{j,\vartheta}(X_j) = \prod_{j=1}^n \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(X_j - m)^2}{2\sigma^2}\right) \right].$$

$$L_{n,m,\sigma}(X_1, \dots, X_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left(-\sum_{j=1}^n \frac{(X_j - m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

$$\log L_{n,m,\sigma}(X_1, \dots, X_n) = -n \log(\sqrt{2\pi}) - n \log \sigma - \sum_{j=1}^n \frac{(X_j - m)^2}{2\sigma^2}.$$

## ML-becslés: normális eloszlás

$X_1, \dots, X_n$  függetlenek, eloszlásuk normális eloszlás  $m, \sigma > 0$  paraméterekkel. Ekkor

$$L_{n,m,\sigma}(X_1, \dots, X_n) = \prod_{j=1}^n f_{j,\vartheta}(X_j) = \prod_{j=1}^n \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(X_j - m)^2}{2\sigma^2}\right) \right].$$

$$L_{n,m,\sigma}(X_1, \dots, X_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left(-\sum_{j=1}^n \frac{(X_j - m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

$$\log L_{n,m,\sigma}(X_1, \dots, X_n) = -n \log(\sqrt{2\pi}) - n \log \sigma - \sum_{j=1}^n \frac{(X_j - m)^2}{2\sigma^2}.$$

A likelihood-függvényben csak a  $\sum_{j=1}^n X_j^2$  **négyzetösszeg** és a  $\sum_{j=1}^n X_j$  **összeg** szerepel a mintából a paraméterrel együtt:

$$\sum_{j=1}^n (X_j - m)^2 = \sum_{j=1}^n X_j^2 - 2m \sum_{j=1}^n X_j + m^2.$$

# Elégséges statisztika

## Definíció

Legyen  $X_1, \dots, X_n$  független minta  $\vartheta$  paraméterű eloszlásból. A  $T$  statisztika elég-séges, ha a likelihood-függvény felírható a következő alakban megfelelő  $h$  és  $g$  függvényekkel:

$$L_{n,\vartheta}(X_1, \dots, X_n) = h(X_1, \dots, X_n) \cdot g_{\vartheta}(T(X_1, \dots, X_n)).$$

# Elégséges statisztika

## Definíció

Legyen  $X_1, \dots, X_n$  független minta  $\vartheta$  paraméterű eloszlásból. A  $T$  statisztika elég-séges, ha a likelihood-függvény felírható a következő alakban megfelelő  $h$  és  $g$  függvényekkel:

$$L_{n,\vartheta}(X_1, \dots, X_n) = h(X_1, \dots, X_n) \cdot g_{\vartheta}(T(X_1, \dots, X_n)).$$

- Poisson-eloszlás esetén az összeg és az átlag is elég-séges statisztika.
- Normális eloszlásnál elég-séges statisztika:  $(\bar{X}, s_n)$ , vagy  $(\sum_{j=1}^n X_j^2, \sum_{j=1}^n X_j)$ .
- Az elég-séges statisztika nem egyértelmű.
- Ha létezik maximumlikelihood-becslés,  $T$  pedig elég-séges statisztika, akkor az ML-becslés felírható  $u(T(X_1, \dots, X_n))$  alakban valamely  $u$  függvényre. Azaz, ahogy a példákban is láttuk, az elég-séges statisztikából kifejezhető a maximumlikelihood-becslés.

# Hatásos becslés az elégséges statisztika segítségével

A következő tétel alapján egy

- torzítatlan becslésből kiindulva
- az elégséges statisztika függvényeként, arra feltételes várható értéket véve.
- egy hatásosabb, vagyis kisebb szórású, szintén torzítatlan becslés is készíthető.

Például Poisson-eloszlás esetén, ha a  $\lambda$  paramétert szeretnénk becsülni:

- $\mathbb{E}_\lambda(X_1) = \lambda$ , ezért  $X_1$  torzítatlan becslése  $\lambda$ -nak;
- $\sum_{j=1}^n X_j$  elégséges statisztika

## Hatásos becslés az elégséges statisztika segítségével

A következő tétel alapján egy

- torzítatlan becslésből kiindulva
- az elégséges statisztika függvényeként, arra feltételes várható értéket véve.
- egy hatásosabb, vagyis kisebb szórású, szintén torzítatlan becslés is készíthető.

Például Poisson-eloszlás esetén, ha a  $\lambda$  paramétert szeretnénk becsülni:

- $\mathbb{E}_\lambda(X_1) = \lambda$ , ezért  $X_1$  torzítatlan becslése  $\lambda$ -nak;
- $\sum_{j=1}^n X_j$  elégséges statisztika
- tekintsük az alábbi feltételes várható értéket (ha az összeget tudjuk, mennyi lehetett  $X_1$ ):

$$\mathbb{E}(X_1 | X_1 + \dots + X_n) = \bar{X}$$

- továbbra is torzítatlan becslést kaptunk, de a szórás lényegesen kisebb lett:

$$\mathbb{E}_\lambda(\bar{X}) = \mathbb{E}_\lambda(X_1) = \lambda; \quad D_\lambda(\bar{X}) = \frac{D_\lambda(X_1)}{\sqrt{n}} < D_\lambda(X_1).$$

# Rao–Blackwell-tétel

## Tétel (Rao–Blackwell)

*Tegyük fel, hogy a  $T$  statisztika torzítatlan becslés a  $\vartheta$  paraméterre, valamint  $S$  elégséges statisztika  $\vartheta$ -ra. Ekkor megadható olyan  $T^*$  becslés, melyre*

- $T^* = h(S)$  megfelelő  $h$  függvénnyel;
- $T^*$  torzítatlan  $\vartheta$ -ra:  $\mathbb{E}_{\vartheta}(T^*) = \vartheta$  minden  $\vartheta \in \Theta$ -ra;
- $T^*$  hatásosabb, mint  $T$ :  $D_{\vartheta}(T^*) \leq D_{\vartheta}(T)$  minden  $\vartheta \in \Theta$ -ra.

*Ha az  $S$  statisztika teljes is (azaz minden olyan  $f$  függvény, melyre  $\mathbb{E}_{\vartheta}(f(S)) = 0$  minden  $\vartheta$ -ra, „majdnem mindenütt” nulla), akkor  $T^*$  hatásos, azaz minden torzítatlan becslésnél hatásosabb.*

A megoldás az  $\mathbb{E}(T|S)$  feltételes várható érték lesz. Például Poisson-eloszlásnál  $\mathbb{E}(X_1 | \sum_{j=1}^n X_j) = \bar{X}$  hatásos.

## Állítás

*Poisson-eloszlásnál, illetve normális eloszlásnál ( $m$ -re) a mintaelemek összege teljes elégséges statisztika, a mintaátlag pedig hatásos becslése a paraméternek.*

# Fisher-információ

Egy mintaelem **Fisher-információja**:

$$I_1(\vartheta) = \mathbb{E}_{\vartheta} \left( \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta} \log f_{\vartheta}(X_1) \right)^2 \right),$$

ahol  $f_{\vartheta}$  a likelihoodfüggvény  $\mathbb{P}_{\vartheta}$  mellett.

# Fisher-információ

Egy mintaelem **Fisher-információja**:

$$I_1(\vartheta) = \mathbb{E}_{\vartheta} \left( \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta} \log f_{\vartheta}(X_1) \right)^2 \right),$$

ahol  $f_{\vartheta}$  a likelihoodfüggvény  $\mathbb{P}_{\vartheta}$  mellett.

- Megfelelő (regularitási) feltételek mellett a független azonos eloszlású,  $n$  elemű minta Fisher-információja:  $I_n(\vartheta) = n \cdot I_1(\vartheta)$ .
- Ha  $T$  elégséges statisztika, akkor  $T(X_1, \dots, X_n)$  Fisher-információja ugyanaz, mint  $(X_1, \dots, X_n)$  Fisher-információja (például Poisson-eloszlásnál az átlag Fisher-információja ugyanaz, mint a teljes mintáé).
- **Cramér–Rao-egyenlőtlenség**: megfelelő (regularitási) feltételek mellett, ha  $T$  torzítatlan becslés  $\vartheta$ -ra, akkor

$$D^2(T(X)) \geq \frac{1}{I_n(\vartheta)} = \frac{1}{nI_1(\vartheta)}.$$

(Ebben az értelemben feleakkora szóráshoz négyszer annyi mintaelem kell.)

# Fisher-információ

Egy mintaelem **Fisher-információja**:

$$I_1(\vartheta) = \mathbb{E}_{\vartheta} \left( \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta} \log f_{\vartheta}(X_1) \right)^2 \right),$$

ahol  $f_{\vartheta}$  a likelihoodfüggvény  $\mathbb{P}_{\vartheta}$  mellett.

Néhány nevezetes eloszlás Fisher-információja egy mintaelemből:

- binomiális eloszlás  $n$  renddel és  $p$  paraméterrel:

$$\frac{n}{p(1-p)}.$$

- Poisson-eloszlás  $\lambda$  paraméterrel:  $1/\lambda$
- normális eloszlás, ha  $\vartheta = (m, \sigma)$ :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sigma^2} \end{pmatrix}.$$

## Fisher-információ: Poisson-eloszlás

Egy mintaelem **Fisher-információja** (az  $f_\lambda$  likelihood-függvény most a valószínűség):

$$\begin{aligned} I_1(\lambda) &= \mathbb{E}_\lambda \left( \left( \frac{\partial}{\partial \lambda} \log f_\lambda(X_1) \right)^2 \right) = \mathbb{E}_\lambda \left( \left( \frac{\partial}{\partial \lambda} \log \left( \frac{\lambda^{X_1}}{X_1!} e^{-\lambda} \right) \right)^2 \right) = \\ &= \mathbb{E}_\lambda \left( \left( \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( X_1 \log \lambda - \log X_1! - \lambda \right) \right)^2 \right) = \mathbb{E}_\lambda \left( \left( \frac{X_1}{\lambda} - 1 \right)^2 \right) = \\ &= \mathbb{E}_\lambda \left( \frac{X_1^2}{\lambda^2} - 2 \frac{X_1}{\lambda} + 1 \right) = \frac{\lambda + \lambda^2}{\lambda^2} - 2 + 1 = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Felhasználtuk, hogy Poisson-eloszlásnál  $\mathbb{E}_\lambda(X_1) = D_\lambda(X_1) = \lambda$ , így

$$\mathbb{E}_\lambda(X_1^2) = D_\lambda^2(X_1) + \mathbb{E}_\lambda^2(X_1) = \lambda + \lambda^2.$$

Következmény a **Cramér–Rao-egyenlőtlenség** alapján: ha  $T$  torzítatlan becslése  $\lambda$ -nak  $n$  elemű független mintából, akkor

$$D^2(T(X_1, \dots, X_n)) \geq \frac{\lambda}{n}.$$

## Konfidenciaintervallum az ML-bebecslés alapján

Gyakran az ismeretlen paraméterre egyetlen bebecslés helyett konfidenciaintervallumot adhatunk meg, amire például az igaz, hogy

$$\mathbb{P}_\vartheta(T_1 \leq \vartheta \leq T_2) \geq 0,95 \quad (\vartheta \in \Theta)$$

. Ez egy olyan véletlen intervallum, ami 95%-os megbízhatóságú, azaz legalább ennyi valószínűséggel tartalmazza a bebecsülni kívánt paramétert.

## Konfidenciaintervallum az ML-becslés alapján

Gyakran az ismeretlen paraméterre egyetlen becslés helyett konfidenciaintervallumot adhatunk meg, amire például az igaz, hogy

$$\mathbb{P}_\vartheta(T_1 \leq \vartheta \leq T_2) \geq 0,95 \quad (\vartheta \in \Theta)$$

. Ez egy olyan véletlen intervallum, ami 95%-os megbízhatóságú, azaz legalább ennyi valószínűséggel tartalmazza a becsülni kívánt paramétert.

### Állítás

*Ha likelihoodfüggvény teljesít bizonyos regularitási feltételeket, akkor a  $\vartheta$  paraméternek az  $X_1, X_2, \dots, X_n$  mintából számolt  $\hat{\vartheta}_n$  maximumlikelihood-becslése*

- létezik;
- aszimptotikusan torzítatlan:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_\vartheta(\hat{\vartheta}_n) = \vartheta$  minden  $\vartheta \in \Theta$ -ra;
- aszimptotikusan hatásos:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{nl_1(\vartheta)} D_\vartheta(\hat{\vartheta}_n) = 1$  minden  $\vartheta \in \Theta$ -ra;
- aszimptotikusan normális eloszlású:  $\sqrt{nl_1(\vartheta)}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta)$  eloszlásban tart a standard normális eloszláshoz minden  $\vartheta \in \Theta$ -ra  $n \rightarrow \infty$  esetén.

*Itt  $l_1(\vartheta)$  az egyelemű mintából számolt Fisher-információt jelöli.*

## Konfidenciaintervallum az ML-becslés alapján

Ez alapján **aszimptotikus konfidenciaintervallum**, ami  $n \rightarrow \infty$  esetén  $1 - \alpha$ -hoz tartó valószínűséggel tartalmazza  $\vartheta$ -t:

$$\left( \hat{\vartheta}_n - \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\hat{I}_n(\vartheta)}}; \hat{\vartheta}_n + \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\hat{I}_n(\vartheta)}} \right),$$

ahol  $\hat{I}_n(\vartheta) = n \cdot I_1(\hat{\vartheta}_n)$ , vagyis a Fisher-információ kifejezésébe a maximumlikelihood-becslést írjuk be.

Másképpen felírva:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\vartheta} \left( \hat{\vartheta}_n - \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\hat{I}_n(\vartheta)}} \leq \vartheta \leq \hat{\vartheta}_n + \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\hat{I}_n(\vartheta)}} \right) = 1 - \alpha.$$

Itt is vegyük észre, hogy  $\vartheta$  ismeretlen, de rögzített paraméter, és az intervallum alsó és felső végpontjai véletlenek, az eloszlásuk is  $\vartheta$ -tól függ (ezt jelöli a  $\vartheta$  az alsó indexben).

## Házi feladat március 19., kedd, 12:00-ig

Definiáljuk az alábbi diszkrét eloszlást:  $\mathbb{P}(X = -1) = c$ ,  $\mathbb{P}(X = 1) = 3c$ ,  $\mathbb{P}(X = 2) = 1 - 4c$ , ahol  $0 < c < 1/4$  az ismeretlen paraméter.

- (a) Határozzuk meg  $c$  momentummódszeres módszeres becslését.
- (b) Sorsoljunk 1000 elemű mintát a fenti eloszlásból két különböző  $c$  értékkel, és mind a két esetben számítsuk ki az (a) feladatban kapott becslés, illetve a valódi  $c$  érték eltérését.