Statisztikai mező (4. előadás)

Definíció

Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ *hármast* **statisztikai mezőnek** *nevezzük, ha minden* $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$*-re* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *Kolmogorov-féle valószínűségi mező.*

Paraméteres statisztikai mező: $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$. Ekkor ϑ az ismeretlen paraméter, mely egy $\Theta \subseteq \mathbb{R}^q$ ismert halmaz eleme.

Például: $\mathcal{P}$ lehet például

- a λ paraméterű Poisson-eloszlások halmaza;
- a normális eloszlások halmaza (ekkor $\vartheta = (m, \sigma)$ az ismeretlen paraméter);
- az $[a, b]$ intervallumon egyenletes eloszlások halmaza (ekkor $\vartheta = (a, b)$ az ismeretlen paraméter).

Minta és statiszika

Definíció (Minta)

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ *statisztikai mező. Egy*

$$\underline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n) : \Omega \to B \subseteq \mathbb{R}^n$$

valószínűségi vektorváltozót (n elemű) **mintának** *nevezünk. Itt B a mintatér, n a minta elemszáma vagy nagysága. A minta független, ha az* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *valószínűségi változók függetlenek.*

Minta és statiszika

Definíció (Minta)

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ *statisztikai mező. Egy*

$$\underline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n) : \Omega \to B \subseteq \mathbb{R}^n$$

valószínűségi vektorváltozót (n elemű) **mintának** *nevezünk. Itt* B *a mintatér,* n *a minta elemszáma vagy nagysága. A minta független, ha az* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *valószínűségi változók függetlenek.*

Definíció (Statisztika)

Legyen $T : B \to \mathbb{R}^k$ *függvény. Ekkor a* $T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *valószínűségi változót statisztikának nevezzük.*

Például: $T(X_1, \ldots, X_n) = \overline{X}$ a mintaátlag, vagy $T(X_1, \ldots, X_n) = s_n^*$ a korrigált tapasztalati szórás.

Becslési módszerek

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ statisztikai mező, ahol $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$, vagyis az ismeretlen eloszlás a ϑ paraméterrel jellemezhető.

Található-e olyan általános módszereket, melyeket alkalmazva a ϑ ismeretlen paraméter becslésére egy megfelelő $T(X_1, \dots, X_n)$ statisztika

- torzítatlan: várható értéke megegyezik a becsülni kívánt ϑ paraméterrel?
- hatásos: szórása a lehető legkisebb?
- konzisztens: a mintaelemszámmal végtelenhez tartva a becsléseink sorozata ϑ-hoz tart: $T_n \to \vartheta$ sztochasztikusan $n \to \infty$ esetén?

Maximumlikelihood-módszer

Van két telefontöltőnk, melyek ránézésre megkülönböztethetlenek. A jó minden kipróbálásnál a többitől függetlenül 90%, a rossz 20% valószínűséggel működik.

Az egyik kábelt kiválasztottuk, 10 kipróbálásból pontosan 8-szor működött. Ez melyik kábel lehetett?

Maximumlikelihood-módszer

Van két telefontöltőnk, melyek ránézésre megkülönböztethetlenek. A jó minden kipróbálásnál a többitől függetlenül 90%, a rossz 20% valószínűséggel működik.

Az egyik kábelt kiválasztottuk, 10 kipróbálásból pontosan 8-szor működött. Ez melyik kábel lehetett?

$$\mathbb{P}(\text{a jó kábel 8-szor működik}) = \binom{10}{8} 0,9^8 0,1^2 = 19,8\%.$$

$$\mathbb{P}(\text{a rossz kábel 8-szor működik}) = \binom{10}{8} 0,2^8 0,8^2 = 0,00007\%.$$

Inkább a jó kábel lehetett, amit kiválasztottunk.

Maximumlikelihood-módszer

Van egy telefontöltőnk, mely minden kipróbálásnál a többitől függetlenül p való-színűséggel működik.

Itt az ismeretlen paraméter: $p \in [0, 1]$.

A kábel 10 kipróbálásból pontosan 8-szor működött. Mennyi lehet p értéke?

Maximumlikelihood-módszer

Van egy telefontöltőnk, mely minden kipróbálásnál a többitől függetlenül p valószínűséggel működik.

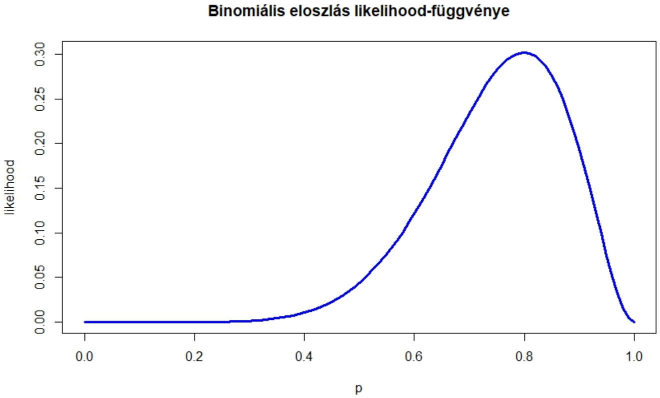
Itt az ismeretlen paraméter: $p \in [0, 1]$.

A kábel 10 kipróbálásból pontosan 8-szor működött. Mennyi lehet p értéke?

$$\mathbb{P}_p(\text{a kábel 8-szor működik}) = \binom{10}{8} p^8 (1-p)^2.$$

Kérdés: ez milyen $p \in [0, 1]$-re lesz a legnagyobb?

Maximumlikelihood-módszer



A likelihood-függvény: $\mathbb{P}_p(\text{a kábel 8-szor működik}) = \binom{10}{8} p^8 (1-p)^2$ a p ismeretlen paraméter függvényében. A maximumhelye: $\hat{p} = 0,8$.

Maximumlikelihood-módszer

Definíció (Likelihood-függvény)

Ha az $(Y_1, \ldots, Y_n)$ *független minta diszkrét (a lehetséges értékeinek száma véges vagy megszámlálható sok), akkor a likelihood-függvénye:*

$$L_{n,\vartheta}(k_1, \ldots, k_n) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}_{j,\vartheta}(Y_j = k_j) \qquad ((k_1, \ldots, k_n) \in H).$$

Maximumlikelihood-módszer

Definíció (Likelihood-függvény)

Ha az $(Y_1, \dots, Y_n)$ *független minta diszkrét (a lehetséges értékeinek száma véges vagy megszámlálható sok), akkor a likelihood-függvénye:*

$$L_{n,\vartheta}(k_1, \dots, k_n) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}_{j,\vartheta}(Y_j = k_j) \qquad ((k_1, \dots, k_n) \in H).$$

Ha az $(Y_1, \dots, Y_n)$ *független minta abszolút folytonos, és* Y_j *sűrűségfüggvénye (a* $\mathbb{P}_\vartheta$ *valószínűség mellett)* $f_{j,\vartheta}$*, akkor a minta likelihood-függvénye:*

$$L_{n,\vartheta}(t_1, \dots, t_n) = \prod_{j=1}^{n} f_{j,\vartheta}(t_j) \qquad (t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}).$$

Maximumlikelihood-módszer

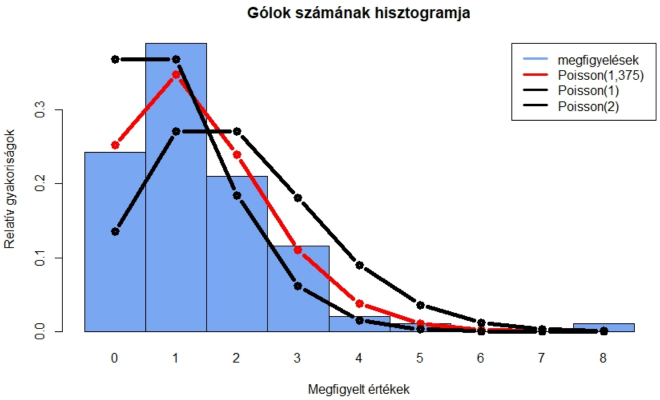
Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ statisztikai mező, ahol $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$, vagyis az ismeretlen eloszlás a ϑ paraméterrel jellemezhető.

Definíció (Maximum-likelihood becslés)

A ϑ maximumlikelihood-becslése (ML-becslése) az $X_1, \ldots, X_n$ mintából $\hat{\vartheta}$, ha $\hat{\vartheta}$ maximalizálja a $\vartheta \mapsto L_{n,\vartheta}(X_1, \ldots, X_n)$ függvényt, ahol $L_{n,\vartheta}$ a minta likelihood-függvénye. Azaz, ha

$$L_{n,\hat{\vartheta}}(X_1, \ldots, X_n) \geq L_{n,\vartheta}(X_1, \ldots, X_n) \text{ minden } \vartheta \in \Theta\text{-ra.}$$

Poisson-eloszlás paraméterének becslése



A gólok számának hisztogramja $n = 95$ mérkőzésen, és különböző paraméterű Poisson-eloszlások ($\mathbb{P}_\lambda(X = k) = \lambda^k/k! \cdot e^{-\lambda}$)

Poisson-eloszlás paraméterének becslése

Tegyük fel, hogy $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független, azonos λ paraméterű Poisson-eloszlású minta, ahol $\lambda > 0$ ismeretlen paraméter, $n = 95$, és $\overline{X} = 1,379$.

Poisson-eloszlásnál:

$$\mathbb{P}_\lambda(X_j = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}; \qquad \mathbb{E}(X_j) = \lambda; \qquad D(X_j) = \sqrt{\lambda}.$$

A megfigyelések az alábbiak (a gólok száma összesen $\sum_{j=1}^{n} X_j = 131$):

$$3, \quad 0, \quad 2, \quad 2, \quad 1, \quad 3, \ldots, 2.$$

Poisson-eloszlás paraméterének becslése

Tegyük fel, hogy $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független, azonos λ paraméterű Poisson-eloszlású minta, ahol $\lambda > 0$ ismeretlen paraméter, $n = 95$, és $\overline{X} = 1,379$.

Poisson-eloszlásnál:

$$\mathbb{P}_\lambda(X_j = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}; \qquad \mathbb{E}(X_j) = \lambda; \qquad D(X_j) = \sqrt{\lambda}.$$

A megfigyelések az alábbiak (a gólok száma összesen $\sum_{j=1}^n X_j = 131$):

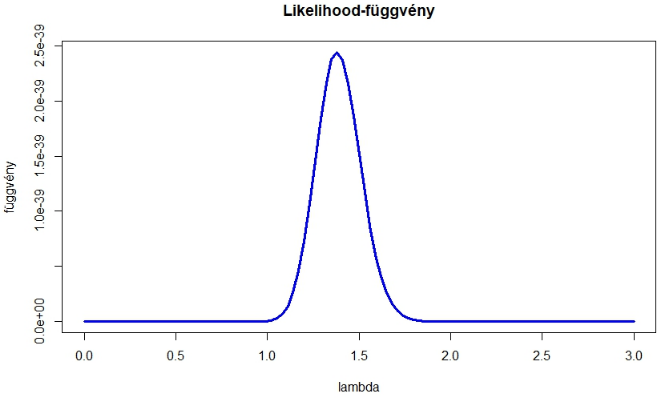
$$3, \quad 0, \quad 2, \quad 2, \quad 1, \quad 3, \ldots, 2.$$

Annak valószínűsége λ paraméter mellett, hogy éppen ezt a sorozatot kaptuk:

$$L_{95,\lambda}(3,0,2,\ldots,2) = \frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} =$$

$$= \frac{\lambda^{3+0+2+2\ldots+2}}{3! \cdot 0! \cdot 2! \cdot \ldots \cdot 2!}e^{-95\cdot\lambda} = \frac{\lambda^{131}}{3! \cdot 0! \cdot 2! \cdot \ldots \cdot 2!}e^{-95\cdot\lambda}$$

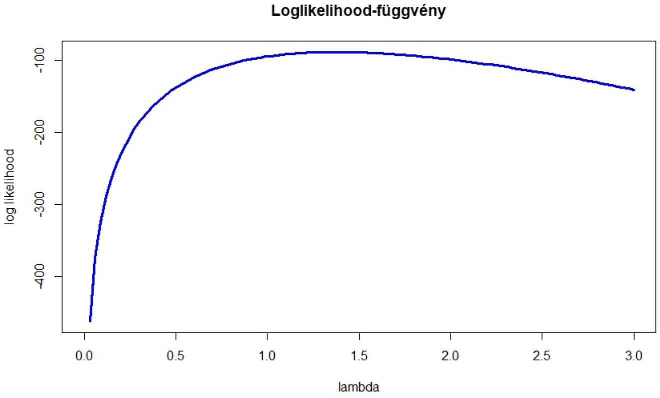
Poisson-eloszlás paraméterének becslése



A $\frac{\lambda^{131}}{3!\cdot 0!\cdot 2!\cdot \ldots \cdot 2!} e^{-95\cdot\lambda}$ likelihoodfüggvény a $\lambda > 0$ paraméter függvényében;

mintaátlag: $\overline{X} = \frac{131}{95} = 1,379$

Poisson-eloszlás paraméterének becslése



A $\log \frac{\lambda^{\mathbf{131}}}{3! \cdot 0! \cdot 2! \cdot \ldots \cdot 2!} e^{-95 \cdot \lambda}$ loglikelihoodfüggvény a $\lambda > 0$ paraméter függvényében;

mintaátlag: $\overline{X} = \frac{131}{95} = 1,379$

ML-becslés: Poisson-eloszlás

$X_1, \dots, X_n$ függetlenek, Poisson-eloszlás $\lambda > 0$ ismeretlen paraméterrel, azaz

$$\mathbb{P}(X_j = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Ekkor

$$L_{n,\lambda}(X_1, \dots, X_n) = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\lambda^{X_j}}{X_j!} e^{-\lambda} \right) = \frac{\lambda^{X_1}}{X_1!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{X_2}}{X_2!} e^{-\lambda} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda^{X_n}}{X_n!} e^{-\lambda}.$$

ML-becslés: Poisson-eloszlás

$X_1, \ldots, X_n$ függetlenek, Poisson-eloszlás $\lambda > 0$ ismeretlen paraméterrel, azaz

$$\mathbb{P}(X_j = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ekkor

$$L_{n,\lambda}(X_1, \ldots, X_n) = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\lambda^{X_j}}{X_j!} e^{-\lambda} \right) = \frac{\lambda^{X_1}}{X_1!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{X_2}}{X_2!} e^{-\lambda} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda^{X_n}}{X_n!} e^{-\lambda}.$$

$$L_{n,\lambda}(X_1, \ldots, X_n) = \lambda^{\sum_{j=1}^{n} X_j} e^{-n\lambda} \cdot \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{X_j!}.$$

ML-becslés: Poisson-eloszlás

$X_1, \ldots, X_n$ függetlenek, Poisson-eloszlás $\lambda > 0$ ismeretlen paraméterrel, azaz

$$\mathbb{P}(X_j = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ekkor

$$L_{n,\lambda}(X_1, \ldots, X_n) = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\lambda^{X_j}}{X_j!} e^{-\lambda} \right) = \frac{\lambda^{X_1}}{X_1!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{X_2}}{X_2!} e^{-\lambda} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda^{X_n}}{X_n!} e^{-\lambda}.$$

$$L_{n,\lambda}(X_1, \ldots, X_n) = \lambda^{\sum_{j=1}^{n} X_j} e^{-n\lambda} \cdot \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{X_j!}.$$

$$\log L_{n,\lambda}(X_1, \ldots, X_n) = \log \lambda \sum_{j=1}^{n} X_j - n\lambda + \log \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{X_j!}$$

ML-becslés: Poisson-eloszlás

$X_1, \ldots, X_n$ függetlenek, Poisson-eloszlás $\lambda > 0$ ismeretlen paraméterrel, azaz

$$\mathbb{P}(X_j = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ekkor

$$L_{n,\lambda}(X_1, \ldots, X_n) = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\lambda^{X_j}}{X_j!} e^{-\lambda} \right) = \frac{\lambda^{X_1}}{X_1!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{X_2}}{X_2!} e^{-\lambda} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda^{X_n}}{X_n!} e^{-\lambda}.$$

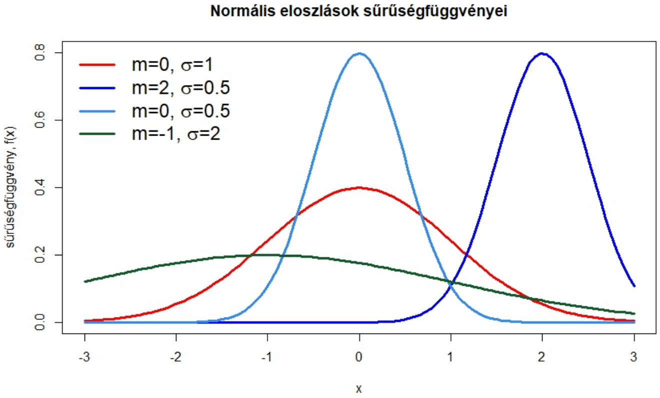
$$L_{n,\lambda}(X_1, \ldots, X_n) = \lambda^{\sum_{j=1}^{n} X_j} e^{-n\lambda} \cdot \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{X_j!}.$$

$$\log L_{n,\lambda}(X_1, \ldots, X_n) = \log \lambda \sum_{j=1}^{n} X_j - n\lambda + \log \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{X_j!}$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \log L_{n,\lambda}(X_1, \ldots, X_n) = \frac{\sum_{j=1}^{n} X_j}{\lambda} - n > 0 \Leftrightarrow \lambda < \overline{X}.$$

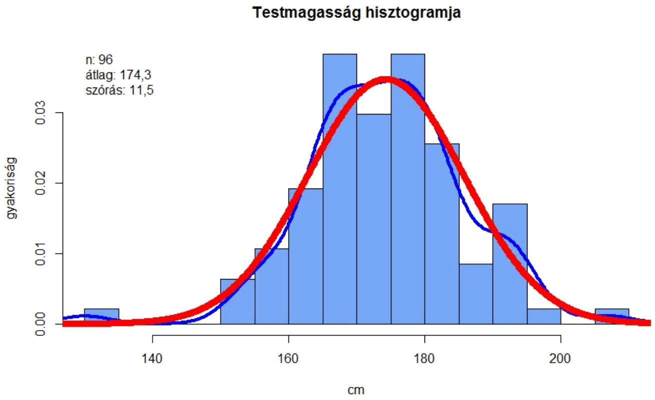
Ezért az ML-becslés: $\hat{\lambda} = \overline{X}$. A log monoton növekedését használtuk.

Normális eloszlás sűrűségfüggvénye



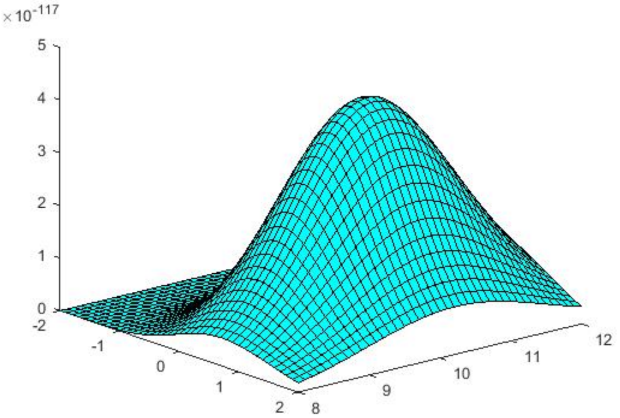
Különböző várható értékű és szórású normális eloszlások sűrűségfüggvénye

Testmagasság hisztogramja



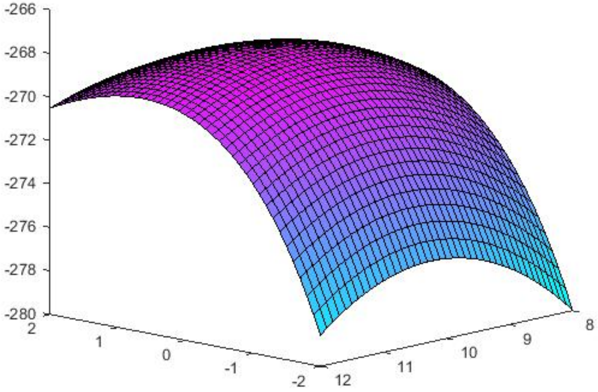
A testmagasság hisztogramja $n = 96$ elemű mintából és az $\overline{X} = 174,3$ várható értékű és $s_n^* = 11,5$ szórású normális eloszlás sűrűségfüggvénye (pirossal).

Likelihoodfüggvény



$n = 94$ elemű minta testmagasság-adatok alapján, normális eloszlást feltételezve. Az átlag: $\overline{X} = 174,8$, a tapasztalati szórás $s_n = 10,5$.

Log-likelihoodfüggvény



$n = 94$ elemű minta testmagasság-adatok alapján, normális eloszlást feltételezve. Az átlag: $\overline{X} = 174,8$, a tapasztalati szórás $s_n = 10,5$.

ML-becslés: normális eloszlás

$X_1, \ldots, X_n$ függetlenek, eloszlásuk normális eloszlás $m, \sigma > 0$ paraméterekkel. Ekkor

$$L_{n,m,\sigma}(X_1, \ldots, X_n) = \prod_{j=1}^{n} f_{j,\vartheta}(X_j) = \prod_{j=1}^{n} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(X_j - m)^2}{2\sigma^2} \right) \right].$$

ML-becslés: normális eloszlás

$X_1, \ldots, X_n$ függetlenek, eloszlásuk normális eloszlás $m, \sigma > 0$ paraméterekkel. Ekkor

$$L_{n,m,\sigma}(X_1, \ldots, X_n) = \prod_{j=1}^{n} f_{j,\vartheta}(X_j) = \prod_{j=1}^{n} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(- \frac{(X_j - m)^2}{2\sigma^2} \right) \right].$$

$$L_{n,m,\sigma}(X_1, \ldots, X_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n \exp\left(- \sum_{j=1}^{n} \frac{(X_j - m)^2}{2\sigma^2} \right).$$

ML-becslés: normális eloszlás

$X_1, \ldots, X_n$ függetlenek, eloszlásuk normális eloszlás $m, \sigma > 0$ paraméterekkel. Ekkor

$$L_{n,m,\sigma}(X_1, \ldots, X_n) = \prod_{j=1}^{n} f_{j,\vartheta}(X_j) = \prod_{j=1}^{n} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(X_j - m)^2}{2\sigma^2} \right) \right].$$

$$L_{n,m,\sigma}(X_1, \ldots, X_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n \exp\left(-\sum_{j=1}^{n} \frac{(X_j - m)^2}{2\sigma^2} \right).$$

$$\log L_{n,m,\sigma}(X_1, \ldots, X_n) = -n \log(\sqrt{2\pi}) - n \log \sigma - \sum_{j=1}^{n} \frac{(X_j - m)^2}{2\sigma^2}.$$

Rögzített σ mellett ez akkor maximális, ha a harmadik tagban $\sum_{j=1}^{n}(X_j - m)^2 = \sum_{j=1}^{n} X_j^2 - 2\sum_{j=1}^{n} X_j m + nm^2$ minimális $\Rightarrow \hat{m} = \overline{X}$.

ML-becslés: normális eloszlás

$$\log L_{n,\sigma}(X_1, \ldots, X_n) = -n \log(\sqrt{2\pi}) - n \log \sigma - \sum_{j=1}^{n} \frac{(X_j - \overline{X})^2}{2\sigma^2}.$$

A σ szerinti parciális derivált:

$$\frac{\partial}{d\sigma} \log L_{n,\sigma}(X_1, \ldots, X_n) = -\frac{n}{\sigma} + \sum_{j=1}^{n} \frac{(X_j - \overline{X})^2}{\sigma^3}.$$

Ez pontosan akkor pozitív, ha $\sigma^2 < \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (X_j - \overline{X})^2 = s_n^2$.

Tehát az ML-becslés:

$$\hat{m} = \overline{X}; \qquad \hat{\sigma} = s_n = \sqrt{\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j^2\right) - \overline{X}^2}.$$

Tehát normális eloszlásnál az m paraméter becslése a mintaátlag, a szórásé a tapasztalati szórás.

Az ML-becslés tulajdonságai

- Nem minden statisztikai mezőn létezik ML-becslés.
- Az ML-becslés nem feltétlenül egyértelmű.
- Az ML-becslés nem feltétlenül torzítatlan.
- A $\psi(\vartheta)$ függvény ML-becslése $\psi(\hat{\vartheta})$, ahol $\hat{\vartheta}$ ML-becslés ϑ-ra.
- **Megfelelő feltételek** (erős regularitási feltételek mellett) az ML-becslés aszimpotikusan torzítatlan: a várható értéke ϑ-hoz tart $n \to \infty$ esetén, **aszimptotikusan hatásos** (vagyis minimális szórású) és **aszimptotikusan normális eloszlású**, azaz $\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta)$ normális eloszláshoz konvergál eloszlásban $n \to \infty$ esetén (a $\mathbb{P}_\vartheta$ valószínűségre vonatkozóan).
- Az alábbi egyenlet a maximumlikelihood-egyenlet:

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} \log L_{n,\vartheta}(X_1, \ldots, X_n) = 0.$$

  Megfelelő feltételek mellett az ML-becslés a maximumlikelihood-egyenlet megoldása (ha az ML-becslés nem számítható ki, de az egyenlet megoldható, gyakran az egyenlet megoldásával helyettesítik az ML-becslést).

ML-becslés: egyenletes eloszlás

Ebben az esetben az ML-becslés nem számítható ki az ML-egyenlet gyökeként, vagyis nem kapható meg deriválással.

$X_1, \ldots, X_n$ függetlenek, eloszlásuk egyenletes eloszlás az $[a, b]$ intervallumon. Ekkor

$$L_{n,a,b}(X_1, \ldots, X_n) = \prod_{j=1}^{n} f_{j,\vartheta}(X_j) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{I}(a \leq X_j \leq b) \cdot \frac{1}{b-a}.$$

$$L_{n,a,b}(X_1, \ldots, X_n) = \left(\frac{1}{b-a}\right)^n \mathbb{I}(a \leq \min_j X_j \text{ és } \max_j X_j \leq b).$$

ML-becslés: egyenletes eloszlás

Ebben az esetben az ML-becslés nem számítható ki az ML-egyenlet gyökeként, vagyis nem kapható meg deriválással.

$X_1, \ldots, X_n$ függetlenek, eloszlásuk egyenletes eloszlás az $[a, b]$ intervallumon. Ekkor

$$L_{n,a,b}(X_1, \ldots, X_n) = \prod_{j=1}^{n} f_{j,\vartheta}(X_j) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{I}(a \leq X_j \leq b) \cdot \frac{1}{b-a}.$$

$$L_{n,a,b}(X_1, \ldots, X_n) = \left(\frac{1}{b-a}\right)^n \mathbb{I}(a \leq \min_j X_j \text{ és } \max_j X_j \leq b).$$

Az első tényező legyen minél nagyobb (vagyis $b-a$ minél kisebb) úgy, hogy a második tényező nem nulla. Ebből:

$$\hat{a} = \min_j X_j; \qquad \hat{b} = \max_j X_j.$$

Maximum-likelihood becslések

- binomiális eloszlás ismert k renddel: $\hat{p} = \overline{X}/k$
- Poisson-eloszlás: $\hat{\lambda} = \overline{X}$
- geometriai eloszlás: $\hat{p} = 1/\overline{X}$
- normális eloszlás: $\hat{m} = \overline{X}, \hat{\sigma} = s_n$
- exponenciális eloszlás: $\hat{\lambda} = 1/\overline{X}$
- egyenletes eloszlás: $\hat{a} = \min_j X_j; \qquad \hat{b} = \max_j X_j$

ML-becslés: exponenciális eloszlás

$X_1, \ldots, X_n$ függetlenek, eloszlásuk exponenciális eloszlás $\lambda > 0$ paraméterrel. Ekkor

$$L_{n,\lambda}(X_1, \ldots, X_n) = \prod_{j=1}^{n} f_{j,\lambda}(X_j) = \prod_{j=1}^{n} \Big[\lambda \exp(-\lambda X_j)\mathbb{I}(X_j > 0)\Big].$$

$$L_{n,\lambda}(X_1, \ldots, X_n) = \lambda^n \exp\left(-\lambda \sum_{j=1}^{n} X_j \right).$$

ML-becslés: exponenciális eloszlás

$X_1, \ldots, X_n$ függetlenek, eloszlásuk exponenciális eloszlás $\lambda > 0$ paraméterrel. Ekkor

$$L_{n,\lambda}(X_1, \ldots, X_n) = \prod_{j=1}^{n} f_{j,\lambda}(X_j) = \prod_{j=1}^{n} \Big[\lambda \exp(-\lambda X_j)\mathbb{I}(X_j > 0)\Big].$$

$$L_{n,\lambda}(X_1, \ldots, X_n) = \lambda^n \exp\Bigg(- \lambda \sum_{j=1}^{n} X_j \Bigg).$$

$$\log L_{n,\lambda}(X_1, \ldots, X_n) = n \log \lambda - \lambda \sum_{j=1}^{n} X_j$$

ML-becslés: exponenciális eloszlás

$X_1, \ldots, X_n$ függetlenek, eloszlásuk exponenciális eloszlás $\lambda > 0$ paraméterrel. Ekkor

$$L_{n,\lambda}(X_1, \ldots, X_n) = \prod_{j=1}^{n} f_{j,\lambda}(X_j) = \prod_{j=1}^{n} \Big[\lambda \exp(-\lambda X_j)\mathbb{I}(X_j > 0)\Big].$$

$$L_{n,\lambda}(X_1, \ldots, X_n) = \lambda^n \exp\left(-\lambda \sum_{j=1}^{n} X_j \right).$$

$$\log L_{n,\lambda}(X_1, \ldots, X_n) = n \log \lambda - \lambda \sum_{j=1}^{n} X_j$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \log L_{n,\lambda}(X_1, \ldots, X_n) = \frac{n}{\lambda} - n\overline{X} > 0 \Leftrightarrow \lambda < 1/\overline{X} \Rightarrow \hat{\lambda} = 1/\overline{X}.$$

Momentummódszer

Legyen $X_1, \dots, X_n$ független azonos eloszlású minta.

1. Az eloszlás k. momentuma, ha ϑ az ismeretlen paraméter: $\mu_{k,\vartheta} = \mathbb{E}_\vartheta(X_1^k)$.
2. Legyen $\hat{\mu}_k = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j^k$ az eloszlás k. tapasztalati momentuma.
3. Írjuk fel az alábbi egyenleteket a legkisebb olyan k-ig, amire az egyenletrendszer egyértelműen meghatározza ϑ-t (**bár nincs mindig ilyen k**):

$$\mathbb{E}_\vartheta(X_1) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j;$$

$$\mathbb{E}_\vartheta(X_1^2) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j^2;$$

$$\dots$$

$$\mathbb{E}_\vartheta(X_1^k) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j^k.$$

4. A ϑ momentummódszerrel kapott becslése az a $\hat{\vartheta}$, ami megoldása a fenti egyenletrendszernek. **Nem mindig létezik, nem mindig egyértelmű, nem feltétlenül hatásos.**

Momentummódszer: Poisson– és exponenciális eloszlás

$X_1, \ldots, X_n$ független **Poisson-eloszlásúak** ismeretlen $\lambda > 0$ paraméterrel. A $k = 1$-hez tartozó egyenlet:

$$\mathbb{E}_\lambda(X_1) = \overline{X}.$$

Mivel a λ paraméterű Poisson-eloszlás várható értéke λ:

$$\hat{\lambda} = \overline{X}.$$

Momentummódszer: Poisson– és exponenciális eloszlás

$X_1, \ldots, X_n$ független **Poisson-eloszlásúak** ismeretlen $\lambda > 0$ paraméterrel. A $k = 1$-hez tartozó egyenlet:

$$\mathbb{E}_\lambda(X_1) = \overline{X}.$$

Mivel a λ paraméterű Poisson-eloszlás várható értéke λ:

$$\hat{\lambda} = \overline{X}.$$

$X_1, \ldots, X_n$ független **exponenciális** eloszlásúak ismeretlen $\lambda > 0$ paraméterrel. A $k = 1$-hez tartozó egyenlet:

$$\mathbb{E}_\lambda(X_1) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j = \overline{X}.$$

Ez egyértelműen oldható meg λ-ra:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\overline{X}}.$$

Momentummódszer: normális eloszlás

$X_1, \ldots, X_n$ független $N(m, \sigma^2)$ eloszlású minta (azaz normális eloszlású m várható értékkel és σ szórással).

A $k = 1$-hez és $k = 2$-höz tartozó egyenletek:

$$\mathbb{E}_{m,\sigma}(X_1) = m = \overline{X};$$

$$\mathbb{E}_{m,\sigma}(X_1^2) = \sigma^2 + m^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j^2.$$

A másodikba beírva az elsőt: $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j^2 - \overline{X}^2 = s_n^2$ (a tapasztalati szórásnégyzet). Tehát az első két egyenlet együtt egyértelműen oldható meg, a momentummódszerrel kapott becslés:

$$\hat{m} = \overline{X}; \qquad \hat{\sigma} = s_n.$$

Házi feladat március 12., kedd, 12:00-ig

Legyen $X_1, X_2, \dots, X_{100}$ és $Y_1, Y_2, \dots, Y_{100}$ független Poisson-eloszlású minta úgy, hogy az X-ek paramétere λ, az Y-ok paramétere 2λ, a $\lambda > 0$ pedig ismeretlen paraméter.

Adjunk becslést λ-ra maximumlikelihood-módszerrel, és ellenőrizzük, hogy torzítatlan becslést kaptunk-e.