

Neyman–Pearson-lemma (8. előadás)

Tegyük fel, hogy a paraméterter két elemből áll: $\Theta = \{\vartheta_0, \vartheta_1\}$. A likelihood-függvények: $L_{n,0}$ illetve $L_{n,1}$.

Likelihood-hányados próba: válasszunk egy c számot. Ha

$$\frac{L_{n,1}(X_1, \dots, X_n)}{L_{n,0}(X_1, \dots, X_n)} \geq c$$

akkor utasítsuk el a nullhipotézist, különben fogadjuk el.

Lemma (Neyman–Pearson-lemma, 1. rész)

Tegyük fel, hogy a likelihood-hányados próba szignifikanciaszintje α . Ekkor a likelihood-hányados próba a legerősebb próba a legfeljebb α szignifikanciaszintű próbák között.

Például: ϑ_0 esetén indikátor eloszlás 0,2 paraméterrel, ϑ_1 esetén indikátor eloszlás 0,9 paraméterrel. Ha 10 megfigyelésből k -nál következik be az esemény:

$$\frac{L_{n,1}(X_1, \dots, X_n)}{L_{n,0}(X_1, \dots, X_n)} = \frac{\binom{10}{k} 0,9^k 0,1^{n-k}}{\binom{10}{k} 0,2^k 0,8^{n-k}} = \left(\frac{0,9}{0,2}\right)^k \left(\frac{0,1}{0,8}\right)^{n-k}.$$

Ez annál nagyobb, minél nagyobb k . Elutasítjuk H_0 -t, ha $k \geq k_0$ megfelelő k_0 -al.

Neyman–Pearson-lemma

Például: ϑ_0 esetén indikátor eloszlás 0,2 paraméterrel, ϑ_1 esetén indikátor eloszlás 0,9 paraméterrel. Legyen X az, hogy 10 megfigyelésből hányszor következik be az esemény. A Neyman–Pearson-lemma szerint akkor utasítjuk el H_0 -t, ha $X \geq k_0$ megfelelő k_0 -al.

Ha $k_0 = 5$: az elsőfajú hiba valószínűsége még megfelelő:

$$\mathbb{P}_0(X \geq 5) = \sum_{j=5}^{10} \binom{10}{j} 0,2^j 0,8^{10-j} = 0,033 \leq 0,05.$$

Ha $k_0 = 4$: az elsőfajú hiba valószínűsége túl nagy:

$$\mathbb{P}_0(X \geq 4) = \sum_{j=4}^{10} \binom{10}{j} 0,2^j 0,8^{10-j} = 0,12 > 0,05.$$

Neyman–Pearson-lemma

Például: ϑ_0 esetén indikátor eloszlás 0,2 paraméterrel, ϑ_1 esetén indikátor eloszlás 0,9 paraméterrel. Legyen X az, hogy 10 megfigyelésből hányszor következik be az esemény. A Neyman–Pearson-lemma szerint akkor utasítjuk el H_0 -t, ha $X \geq k_0$ megfelelő k_0 -al.

Ha $k_0 = 5$: az elsőfajú hiba valószínűsége még megfelelő:

$$\mathbb{P}_0(X \geq 5) = \sum_{j=5}^{10} \binom{10}{j} 0,2^j 0,8^{10-j} = 0,033 \leq 0,05.$$

Ha $k_0 = 4$: az elsőfajú hiba valószínűsége túl nagy:

$$\mathbb{P}_0(X \geq 4) = \sum_{j=4}^{10} \binom{10}{j} 0,2^j 0,8^{10-j} = 0,12 > 0,05.$$

Pontosan $\alpha = 0,05$ terjedelem: $X \geq 5$ esetén biztosan, $X = 4$ esetén 19% valószínűséggel utasítjuk el a nullhipotézist ($0,19 \cdot \mathbb{P}_0(X = 4) = 0,05 - 0,03$). Ez legerősebb próba a legfeljebb $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszintű próbák között, és erősebb, mint a $k_0 = 5$ -tel kapott determinisztikus próbáé.

Véletlenített próba

Tegyük fel, hogy a paramétertér két elemből áll: $\Theta = \{\vartheta_0, \vartheta_1\}$. A likelihood-függvények: $L_{n,0}$ illetve $L_{n,1}$.

Likelihood-hányados próba: válasszunk egy c számot. Ha

$$\frac{L_{n,1}(X_1, \dots, X_n)}{L_{n,0}(X_1, \dots, X_n)} > c$$

akkor utasítsuk el a nullhipotézist. Ha a hányados egyenlő c -vel, akkor p valószínűséggel utasítsuk el, és $1 - p$ valószínűséggel fogadjuk el. Ha kisebb c -nél, fogadjuk el a nullhipotézist.

Lemma (Neyman–Pearson-lemma, 2. rész)

Legyen $\alpha \in (0, 1)$ tetszőleges. Ekkor lehet olyan c és p számokat választani, hogy a likelihood-hányados próba a szignifikanciaszintje éppen α , és így ez a legerősebb próba a legfeljebb α szignifikanciaszintű próbák között.

Neyman–Pearson-lemma

Példa: legyen $\Theta = \{m_0, m_1\}$, és \mathcal{P} álljon az $N(m_0, \sigma)$ és $N(m_1, \sigma)$ eloszlásokból. A likelihood-hányados:

$$\begin{aligned}\frac{L_{n,1}(X_1, \dots, X_n)}{L_{n,0}(X_1, \dots, X_n)} &= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\right)^n \prod_{j=1}^n \exp(-(X_j - m_1)^2/(2\sigma^2))}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\right)^n \prod_{j=1}^n \exp(-(X_j - m_0)^2/(2\sigma^2))} = \\ &= \exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^n (X_j - m_1)^2}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{j=1}^n (X_j - m_0)^2}{2\sigma^2}\right) = \\ &= \exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^n (X_j^2 - 2m_1X_j + m_1^2)}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{j=1}^n (X_j^2 - 2m_0X_j + m_0^2)}{2\sigma^2}\right) = \\ &= \exp\left(\frac{2(m_1 - m_0) \sum_{j=1}^n X_j + (m_0^2 - m_1^2)n}{2\sigma^2}\right).\end{aligned}$$

Ha $m_1 > m_0$: akkor utasítjuk el a nullhipotézist, ha $\frac{L_{n,1}}{L_{n,0}}$ nagyobb egy c kritikus értéknél, vagyis ha $\sum_{j=1}^n X_j$ nagyobb egy c' kritikus értéknél. Ezért a lesz a z-próba legerősebb próba: ez is ilyen alakú.

Normális eloszlás paramétereire vonatkozó próbák

Az alábbi próbák akkor használhatók, ha

- a megfigyelések függetlenek, és feltételezhetjük, hogy normális eloszlásúak
- a megfigyelések függetlenek, véges szórású eloszlásból származnak, és a minta mérete, azaz n "elég nagy", például $n \geq 100$

Normális eloszlás paramétereire vonatkozó próbák

Az alábbi próbák akkor használhatók, ha

- a megfigyelések függetlenek, és feltételezhetjük, hogy normális eloszlásúak
- a megfigyelések függetlenek, véges szórású eloszlásból származnak, és a minta mérete, azaz n "elég nagy", például $n \geq 100$
- **z-próba** (vagy u -próba): **várható értékre** vonatkozó hipotézis esetén, ha **μ** **σ szórás ismert** – egymintás esetben legerősebb próba

Normális eloszlás paramétereire vonatkozó próbák

Az alábbi próbák akkor használhatók, ha

- a megfigyelések függetlenek, és feltételezhetjük, hogy normális eloszlásúak
- a megfigyelések függetlenek, véges szórású eloszlásból származnak, és a minta mérete, azaz n "elég nagy", például $n \geq 100$
- **z-próba** (vagy u -próba): **várható értékre** vonatkozó hipotézis esetén, ha **σ szórás ismert** – egymintás esetben legerősebb próba
- **t-próba** (vagy Student-próba): **várható értékre** vonatkozó hipotézis esetén, ha **σ szórás nem ismert** (csak az s_n^* tapasztalati szórás)
- **F-próba**: **szórásra** vonatkozó hipotézis esetén

Kapcsolat a konfidenciaintervallummal: egymintás próbánál akkor fogadjuk el a nullhipotézist α terjedelem mellett, ha a benne megadott érték (várható érték vagy szórás) az $1 - \alpha$ megbízhatósági szintű konfidenciaintervallumba esik.

Egymintás egyoldali z-próba (one-sample one-sided z test)

A próba a normális eloszlás várható értékére vonatkozik ismert szórás mellett. Torzítatlan, konzisztens, **legerősebb próba** egyoldali esetben (a Neyman–Pearson-lemma alapján bizonyítható).

- $X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(m, \sigma^2)$, ahol m ismeretlen paraméter, $\sigma > 0$ ismert.
- Próbastatisztika (eloszlása standard normális H_0 mellett, ezt beláttuk):

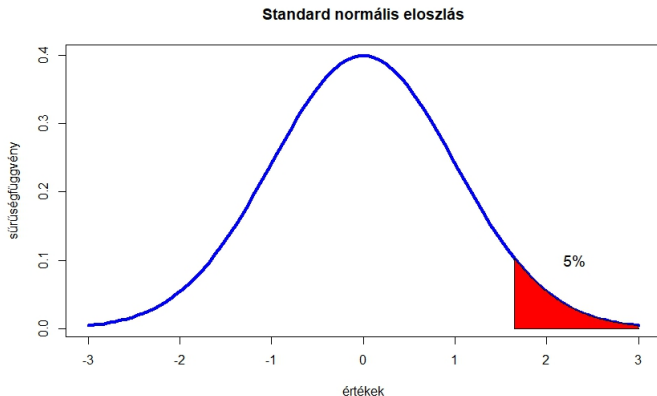
$$z = \frac{\bar{X} - m_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n}.$$

- **Egyoldali ellenhipotézis** (one-sided): $H_0 : m \leq m_0$; $H_1 : m > m_0$.
- Ha $z > \Phi^{-1}(1 - \alpha)$, akkor elvetjük a nullhipotézist, különben elfogadjuk.
- A p -érték ilyenkor $1 - \Phi(z)$.

$p < 0,05$: a várható érték szignifikánsan több m_0 -nál.

$p \geq 0,05$: a várható érték nem több szignifikánsan m_0 -nál.

Az egyoldali z-próba kritikus értéke



Az $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszintű egyoldali z-próba kritikus értéke:
 $\Phi^{-1}(1 - \alpha) = \Phi^{-1}(0,95) = 1,645$.

Példa: egymintás egyoldali z-próba

Feltételezés: a testmagasság normális eloszlású.

- Az európai férfiak átlagos testmagassága 177,6 cm.
- Megmértük 90 holland férfi testmagasságát, a magasságok átlaga 181,7 cm lett. A szórást 8,5 cm-nek feltételezve mondhatjuk-e, hogy a holland férfiak testmagassága szignifikánsan több az európai átlagnál?

Példa: egymintás egyoldali z-próba

Feltételezés: a testmagasság normális eloszlású.

- Az európai férfiak átlagos testmagassága 177,6 cm.
- Megmértük 90 holland férfi testmagasságát, a magasságok átlaga 181,7 cm lett. A szórást 8,5 cm-nek feltételezve mondhatjuk-e, hogy a holland férfiak testmagassága szignifikánsan több az európai átlagnál?

- $H_0 : m \leq 177,6$; $H_1 : m > 177,6$.

-

$$z = \frac{\bar{X} - m_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n} = \frac{181,7 - 177,6}{8,5} \sqrt{90} = 4,57.$$

- $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett $\Phi^{-1}(1 - \alpha) = 1,645$, így $z > \Phi^{-1}(1 - \alpha)$.
 p -érték: $1 - \Phi(4,57) < 0,0001 < 0,05$.
- Elutasítjuk a nullhipotézist. Az adatok alapján a holland férfiak testmagasságának várható értéke szignifikánsan több 177,6 cm-nél, vagyis az európai átlagnál.

Egymintás kétoldali z-próba

A próba a normális eloszlás várható értékére vonatkozik ismert szórás mellett. Nem legerősebb (nincs legerősebb próba ebben a feladatban).

- $X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(m, \sigma^2)$, ahol m ismeretlen paraméter, $\sigma > 0$ ismert.
- Próbastatisztika (eloszlása standard normális H_0 mellett):

$$z = \frac{\bar{X} - m_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n}.$$

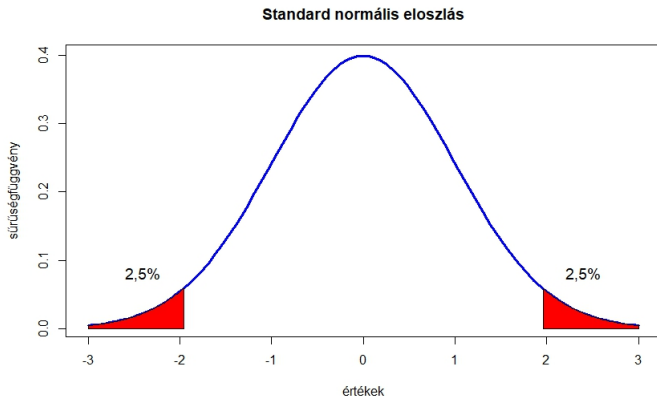
- **Kétoldali ellenhipotézis** (two-sided): $H_0 : m = m_0$; $H_1 : m \neq m_0$.
- Ha $|z| > \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$, akkor elvetjük a nullhipotézist, különben elfogadjuk.
- A p -érték ilyenkor $2 - 2\Phi(|z|)$.

Φ a standard normális eloszlásfüggvény: $\Phi(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$.

$p < 0,05$: a várható érték szignifikánsan eltér m_0 -tól.

$p \geq 0,05$: nincs szignifikáns eltérés m_0 -tól.

A kétoldali z-próba kritikus értéke



Az $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszintű kétoldali z-próba kritikus értéke:

$$\Phi^{-1}(1 - \alpha/2) = \Phi^{-1}(0,975) = 1,96.$$

Példa: egymintás z-próba

Egy gyárban a minőségellenőrzésnél olyan mérleget használnak, melynél egy m tömegű tárgyat mérve a mérési eredmények független normális eloszlású valószínűségi változók m várható értékkel és $\sigma = 3$ gramm szórással.

- A termékkatalógus szerint egy adott típusú kalapács fejének 364 g tömegűnek kell lennie.
- A fenti mérlegen megmérték 20 kalapács fejének tömegét. Az átlag 367,2 gramm lett. Ez alapján állítható-e, hogy a kalapácsok fejének tömege szignifikánsan eltér az előírt 364 grammtól?

Példa: egymintás z-próba

Egy gyárban a minőségellenőrzésnél olyan mérleget használnak, melynél egy m tömegű tárgyat mérve a mérési eredmények független normális eloszlású valószínűségi változók m várható értékkel és $\sigma = 3$ gramm szórással.

- A termékkatalógus szerint egy adott típusú kalapács fejének 364 g tömegűnek kell lennie.
- A fenti mérlegen megmérték 20 kalapács fejének tömegét. Az átlag 367,2 gramm lett. Ez alapján állítható-e, hogy a kalapácsok fejének tömege szignifikánsan eltér az előírt 364 grammtól?

- $H_0 : m = 364$; $H_1 : m \neq 364$.

-

$$z = \frac{\bar{X} - m_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n} = \frac{367,2 - 364}{3} \sqrt{20} = 4,77.$$

- $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett $\Phi^{-1}(1 - \alpha/2) = 1,96$. $p = 1,84 \cdot 10^{-6} < 0,05$.
- $|z| < \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$, elutasítjuk a nullhipotézist. A kalapácsok fejének tömegének várható értéke a minta alapján szignifikánsan eltér az előírt 364 grammtól.

Fisher–Bartlett-tétel

Valójában az eloszlás valódi szórása a legtöbb esetben nem ismert. A σ szórást az s_n^* korrigált tapasztalati szórással helyettesítjük. Kérdés, hogyan változik így az eloszlás.

Tétel (Fisher–Bartlett)

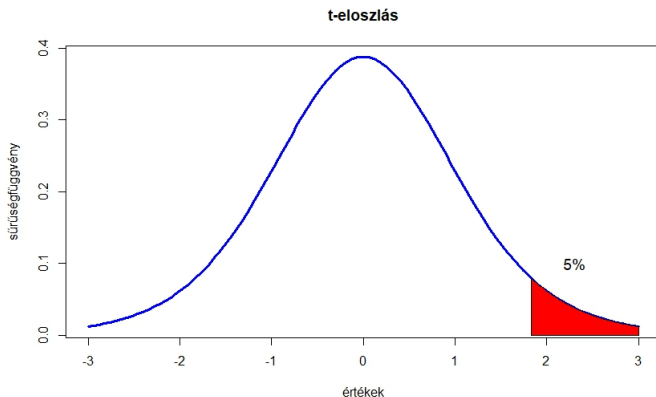
Tegyük fel, hogy X_1, X_2, \dots, X_n független m várható értékű, σ szórású, **normális eloszlású** valószínűségi változók. Ekkor

- 1 $\bar{X} \sim N(m, \frac{\sigma^2}{n})$;
- 2 \bar{X} és s_n^* függetlenek;
- 3 $(n-1)s_n^{*2}/\sigma^2$ eloszlása $n-1$ szabadsági fokú χ^2 -eloszlás;
- 4 $(\bar{X} - m)\sqrt{n}/s_n^*$ eloszlása $n-1$ szabadsági fokú t -eloszlás.

Itt

$$s_n^* = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2} = \sqrt{\frac{n}{n-1} \left(\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^2 \right) - \bar{X}^2 \right)}.$$

t -eloszlás egyoldali kritikus értékei



Az $f = 9$ szabadsági fokú $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszintű egyoldali t -próba kritikus értéke: $\bar{t}_{9,0,05} = 1,83$.

Házi feladat április 25., kedd, 12:00-ig

Készítsünk 95%-os, illetve 98%-os megbízhatósági szintű konfidenciaintervallumot az első házi feladathoz begyűjtött adatok alapján a sportolással töltött idő várható értékére, illetve az utazással töltött idő várható értékére.

Mennyire reális eredményeket kaptunk? Mely feltételek teljesülnek a konfidenciaintervallumra megfogalmazott feltételek közül, melyek nem?

Házi feladat április 25., kedd, 12:00-ig

```
> library(readxl)
> adatok <- read_excel("sstadatn.xlsx")
> utazasiido <- adatok$utazas
> t.test(utazasiido, mu=100, alternative="two.sided",
conf.level=0.95)
```

...

95 percent confidence interval:

73.03079 91.16674

sample estimates:

mean of x

82.09877

Házi feladat április 25., kedd, 12:00-ig

```
> library(readxl)
> adatok <- read_excel("sstadatn.xlsx")
> utazasiido <- adatok$utazas
> t.test(utazasiido, mu=100, alternative="two.sided",
conf.level=0.95)
```

...

95 percent confidence interval:

73.03079 91.16674

sample estimates:

mean of x

82.09877

(73,92) lesz 95%-os megbízhatósági szintű konfidenciaintervallum. A normális eloszlás nem biztos, hogy teljesül, viszont a szórás nem túlságosan nagy, és a mintaelemszám ($n = 82$) nem nagyon kicsi.

Házi feladat április 25., kedd, 12:00-ig

```
> library(readxl)
> adatok <- read_excel("sstadatn.xlsx")
> utazasiido <- adatok$utazas
> t.test(utazasiido, mu=100, alternative="two.sided",
conf.level=0.98)
```

...

98 percent confidence interval:

71.28194 92.91560

sample estimates:

mean of x

82.09877

Házi feladat április 25., kedd, 12:00-ig

```
> library(readxl)
> adatok <- read_excel("sstadatn.xlsx")
> utazasiido <- adatok$utazas
> t.test(utazasiido, mu=100, alternative="two.sided",
conf.level=0.98)
```

...

98 percent confidence interval:

71.28194 92.91560

sample estimates:

mean of x

82.09877

(71, 93) lesz 98%-os megbízhatósági szintű konfidenciaintervallum. A normális eloszlás nem biztos, hogy teljesül, viszont a szórás nem túlságosan nagy, és a mintaelemszám ($n = 82$) nem nagyon kicsi.

Házi feladat április 25., kedd, 12:00-ig

```
> library(readxl)
> adatok <- read_excel("sstadatn.xlsx")
> sportido <- adatok$sport
> t.test(sportido, mu=100, alternative="two.sided",
conf.level=0.95)
...
95 percent confidence interval:
98.13058 148.43733
sample estimates:
mean of x
123.284
```

Házi feladat április 25., kedd, 12:00-ig

```
> library(readxl)
> adatok <- read_excel("sstadatn.xlsx")
> sportido <- adatok$sport
> t.test(sportido, mu=100, alternative="two.sided",
conf.level=0.95)
```

...

95 percent confidence interval:

98.13058 148.43733

sample estimates:

mean of x

123.284

(98,149) lesz 95%-os megbízhatósági szintű konfidenciaintervallum. Itt hosszabb a konfidenciaintervallum, a sportolással töltött időnek nagyobb a szórása.

Házi feladat április 25., kedd, 12:00-ig

```
> library(readxl)
> adatok <- read_excel("sstadatn.xlsx")
> sportido <- adatok$sport
> t.test(sportido, mu=100, alternative="two.sided",
conf.level=0.98)
```

...

98 percent confidence interval:

93.27948 153.28842

sample estimates:

mean of x

123.284

Házi feladat április 25., kedd, 12:00-ig

```
> library(readxl)
> adatok <- read_excel("sstadatn.xlsx")
> sportido <- adatok$sport
> t.test(sportido, mu=100, alternative="two.sided",
conf.level=0.98)
```

...

98 percent confidence interval:

93.27948 153.28842

sample estimates:

mean of x

123.284

(93,154) lesz 98%-os megbízhatósági szintű konfidenciaintervallum. Ez még egy kicsit hosszabb, a nagyobb megbízhatósági szintnek megfelelően.

Egymintás egyoldali t -próba (one-sample one-sided t -test)

- **A normális eloszlás várható értékére, ismeretlen szórás esetén – legerősebb próba.**
- $X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(m, \sigma^2)$, ahol m, σ ismeretlen paraméterek.
- Próbastatisztika, aminek eloszlása t -eloszlás H_0 mellett a Fisher–Bartlett-tétel szerint:

$$t = \frac{\bar{X} - m_0}{S_n^*} \cdot \sqrt{n}.$$

- **Egyoldali ellenhipotézis (one-sided):** $H_0 : m \leq m_0$; $H_1 : m > m_0$.
- Ha $t > \bar{t}_{n-1, \alpha}$, azaz $p < \alpha$, elutasítjuk a nullhipotézist; ilyenkor a várható érték szignifikánsan több m_0 -nál.
- Ha $t \leq \bar{t}_{n-1, \alpha}$, azaz $p \geq \alpha$, elfogadjuk a nullhipotézist, a várható érték nem több szignifikánsan m_0 -nál az adatok alapján.
- A kritikus érték: $\bar{t}_{n-1, \alpha}$ az $f = n - 1$ szabadsági fokú (degree of freedom) t -eloszlás $1 - \alpha$ -kvantilise, vagyis az $f = n - 1$ szabadsági fokú egyoldali t -próba kritikus értéke α szignifikanciaszint (level of significance) mellett.

Példa: egymintás egyoldali t -próba

Egy adott helyen vett tíz mintából megmértük az ivóvíz keménységét. Az alábbi eredmények adódtak (mg/l CaO):

351 370 352 340 362 363 366 355 374 347

Állíthatjuk-e az adatok alapján, hogy az ivóvíz keménységének várható értéke szignifikánsan meghaladja a 350 mg/l egészségügyi határértéket?

Példa: egymintás egyoldali t -próba

Egy adott helyen vett tíz mintából megmértük az ivóvíz keménységét. Az alábbi eredmények adódtak (mg/l CaO):

351 370 352 340 362 363 366 355 374 347

Állíthatjuk-e az adatok alapján, hogy az ivóvíz keménységének várható értéke szignifikánsan meghaladja a 350 mg/l egészségügyi határértéket?

$$n = 10; \quad \bar{X} = 358; \quad s_n^* = 10,77$$

Feltételezzük, hogy a mérési eredmények normális eloszlásúak, **az egymintás egyoldali t -próbát** alkalmazzuk: $H_0 : m \leq 350$; $H_1 : m > 350$.

$$t = \frac{\bar{X} - m_0}{s_n^*} \cdot \sqrt{n} = \frac{358 - 350}{10,77} \sqrt{10} = 2,35.$$

Az $f = n - 1 = 9$ szabadsági fokú egyoldali t -próba kritikus értéke $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett $\bar{t}_{9;0,05} = 1,833$.

Példa: egymintás egyoldali t -próba

Egy adott helyen vett tíz mintából megmértük az ivóvíz keménységét. Az alábbi eredmények adódtak (mg/l CaO):

351 370 352 340 362 363 366 355 374 347

Állíthatjuk-e az adatok alapján, hogy az ivóvíz keménységének várható értéke szignifikánsan meghaladja a 350 mg/l egészségügyi határértéket?

$$n = 10; \quad \bar{X} = 358; \quad s_n^* = 10,77$$

Feltételezzük, hogy a mérési eredmények normális eloszlásúak, **az egymintás egyoldali t -próbát** alkalmazzuk: $H_0 : m \leq 350$; $H_1 : m > 350$.

$$t = \frac{\bar{X} - m_0}{s_n^*} \cdot \sqrt{n} = \frac{358 - 350}{10,77} \sqrt{10} = 2,35.$$

Az $f = n - 1 = 9$ szabadsági fokú egyoldali t -próba kritikus értéke $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett $\bar{t}_{9;0,05} = 1,833$.

Mivel $t > \bar{t}_{9;0,05}$, **elutasítjuk a nullhipotézist**, a vízkeménység szignifikánsan meghaladja 350 mg/l határértéket. A p -érték: $p = 0,0217 < 0,05$.

Hipotézisvizsgálat: példa az R szoftverben

Tíz mintából mértük meg a víz keménységét.

Nullhipotézis (null hypothesis, H_0): $m \leq 350$

Ellenhipotézis (alternative hypothesis, H_1): $m > 350$

```
> viz<-c(348, 367, 349, 337, 359, 360, 363, 352, 371, 344)
```

```
> t.test(viz, mu=350, alternative="greater")
```

Hipotézisvizsgálat: példa az R szoftverben

Tíz mintából mértük meg a víz keménységét.

Nullhipotézis (null hypothesis, H_0): $m \leq 350$

Ellenhipotézis (alternative hypothesis, H_1): $m > 350$

```
> viz<-c(348, 367, 349, 337, 359, 360, 363, 352, 371, 344)
```

```
> t.test(viz, mu=350, alternative="greater")
```

One Sample t-test

```
data: viz
```

```
t = 2.3489, df = 9, p-value = 0.02169
```

```
alternative hypothesis: true mean is greater than 350
```

```
95 percent confidence interval: 351.7566 Inf
```

```
mean of x : 358
```

Most $p = 0.02169 < 0,05 = \alpha$, elutasítjuk a nullhipotézist.

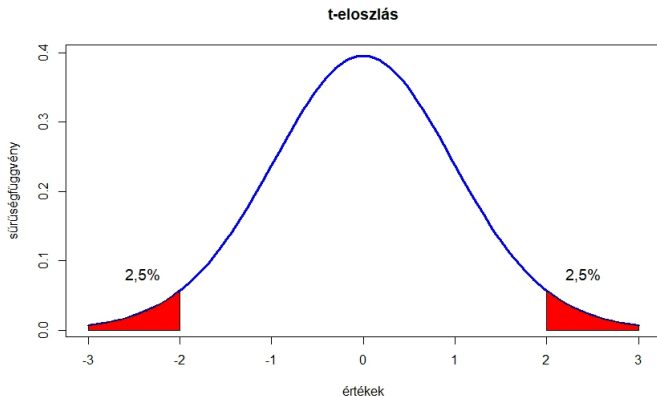
Egymintás kétoldali t -próba (one-sample two-sided t -test)

- **A normális eloszlás várható értékére, ismeretlen szórás esetén.** Nem legerősebb (nincs ilyen).
- $X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(m, \sigma^2)$, ahol m, σ ismeretlen paraméterek.
- Próbastatisztika (eloszlása t -eloszlás/Student-eloszlás H_0 mellett):

$$t = \frac{\bar{X} - m_0}{s_n^*} \cdot \sqrt{n}.$$

- **Kétoldali ellenhipotézis** (two-sided): $H_0 : m = m_0$; $H_1 : m \neq m_0$.
- Ha $|t| > t_{n-1, \alpha}$, azaz $p < \alpha$, akkor elutasítjuk a nullhipotézist, a várható érték szignifikánsan eltér m_0 -tól.
- Ha $|t| \leq t_{n-1, \alpha}$, azaz $p \geq \alpha$, akkor elfogadjuk H_0 -t, a várható érték nem tér el szignifikánsan m_0 -tól.
- A kritikus érték: $t_{n-1, \alpha}$ az $f = n - 1$ szabadsági fokú (degree of freedom) t -eloszlás $1 - \alpha/2$ -kvantilise, vagyis az $f = n - 1$ szabadsági fokú (degree of freedom) kétoldali t -próba kritikus értéke α szignifikanciaszint mellett.

Kétoldali t -próba kritikus értékei



Az $f = 29$ szabadsági fokú $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszintű kétoldali t -próba kritikus értéke: $t_{29;0,05} = 2,04$.

Példa: Egymintás kétoldali t -próba

Egy gyógyszer hatóanyagtartalma a csomagolás szerint 10 mg. Harminc tableta hatóanyag-tartalmát megmérve a mérések átlaga 9,8, korrigált tapasztalati szórása 0,62 lett. A szignifikanciaszintet $\alpha = 0,05$ -nek választva az adatok alapján szignifikánsan eltér-e a hatóanyag-tartalom várható értéke a 10 mg-tól?

Példa: Egymintás kétoldali t -próba

Egy gyógyszer hatóanyagtartalma a csomagolás szerint 10 mg. Harminc tabletta hatóanyag-tartalmát megmérve a mérések átlaga 9,8, korrigált tapasztalati szórása 0,62 lett. A szignifikanciaszintet $\alpha = 0,05$ -nek választva az adatok alapján szignifikánsan eltér-e a hatóanyag-tartalom várható értéke a 10 mg-tól?

$$n = 30; \quad \bar{X} = 9,8; \quad s_n^* = 0,62$$

Egymintás kétoldali t -próbát végezhetünk, normális eloszlást feltételezve.

$$H_0 : m = 10; \quad H_1 : m \neq 10; \quad \alpha = 0,05; \quad f = n - 1 = 29.$$

$$t = \frac{\bar{X} - m_0}{s_n^*} \cdot \sqrt{n} = \frac{9,8 - 10}{0,62} \cdot \sqrt{30} = -1,77.$$

A kritikus érték: $t_{29,0,975} = 2,045 \Rightarrow |t| = 1,77 \leq 2,045$, nincs szignifikáns eltérés.
 p -érték: $p = 0,0867 \geq 0,05$.

Kétmintás, egyoldali, párosítatlan Student-féle t -próba

A **várható érték összehasonlítására** azonos szórás esetén (two-sample one-sided unpaired Student t -test).

$X_1, \dots, X_{n_1}, Y_1, \dots, Y_{n_2}$ **független normális eloszlású azonos szórású** valószínűségi változók: $X_i \sim N(m_1, \sigma^2)$, $Y_i \sim N(m_2, \sigma^2)$, ahol m_1, m_2, σ ismeretlen paraméterek.

Egyoldali ellenhipotézis: $H_0 : m_1 \leq m_2$; $H_1 : m_1 > m_2$.

Kétmintás, egyoldali, párosítatlan Student-féle t -próba

A **várható érték összehasonlítására** azonos szórás esetén (two-sample one-sided unpaired Student t -test).

$X_1, \dots, X_{n_1}, Y_1, \dots, Y_{n_2}$ **független normális eloszlású azonos szórású** valószínűségi változók: $X_i \sim N(m_1, \sigma^2)$, $Y_i \sim N(m_2, \sigma^2)$, ahol m_1, m_2, σ ismeretlen paraméterek.

Egyoldali ellenhipotézis: $H_0 : m_1 \leq m_2$; $H_1 : m_1 > m_2$.

Próbastatisztika (eloszlása t -eloszlás $m_1 = m_2$ mellett):

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(n_1 - 1)s_{n_1}^{*2}(X) + (n_2 - 1)s_{n_2}^{*2}(Y)}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}.$$

Ha $t > \bar{t}_{n_1+n_2-2, \alpha}$, akkor elvetjük a nullhipotézist, különben elfogadjuk. A $\bar{t}_{n_1+n_2-2, \alpha}$ kritikus érték az $f = n_1 + n_2 - 2$ szabadsági fokú **egyoldali** t -próba kritikus értéke α szignifikanciaszint mellett (a megfelelő eloszlás $1 - \alpha$ -kvantilise).

Ha $p < \alpha$: elvetjük H_0 -t, az első várható érték szignifikánsan nagyobb a másodiknál.

Kétmintás t -próba: példa

Két különböző márkájú vaj tömegét mértük meg, az X típusúét tízszer, az Y típusúét nyolcszor. Az átlagok és korrigált tapasztalati szórások (kg-ban):

$$\bar{X} = 0,217, \quad s_n^*(X) = 0,027, \quad \bar{Y} = 0,203, \quad s_n^*(Y) = 0,03.$$

Állíthatjuk-e $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett, hogy az X típusú vajak tömege szignifikánsan több az Y típusú vajénál? Feltételezzük, hogy a mérések **szórása azonos**.

Kétmintás t -próba: példa

Két különböző márkájú vaj tömegét mértük meg, az X típusúét tízszer, az Y típusúét nyolcszor. Az átlagok és korrigált tapasztalati szórások (kg-ban):

$$\bar{X} = 0,217, \quad s_n^*(X) = 0,027, \quad \bar{Y} = 0,203, \quad s_n^*(Y) = 0,03.$$

Állíthatjuk-e $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett, hogy az X típusú vajak tömege szignifikánsan több az Y típusú vajénál? Feltételezzük, hogy a mérések **szórása azonos**.

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(n_1 - 1)s_{n_1}^{*2}(X) + (n_2 - 1)s_{n_2}^{*2}(Y)}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}.$$

Behelyettesítve:

$$t = \frac{0,217 - 0,203}{\sqrt{9 \cdot 0,027^2 + 7 \cdot 0,03^2}} \cdot \sqrt{\frac{80 \cdot 16}{18}} = 1,04.$$

Kétmintás t -próba: példa

Két különböző márkájú vaj tömegét mértük meg, az X típusúét tízszer, az Y típusúét nyolcszor. Az átlagok és korrigált tapasztalati szórások (kg-ban):

$$\bar{X} = 0,217, \quad s_n^*(X) = 0,027, \quad \bar{Y} = 0,203, \quad s_n^*(Y) = 0,03.$$

Állíthatjuk-e $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett, hogy az X típusú vajak tömege szignifikánsan több az Y típusú vajénál? Feltételezzük, hogy a mérések **szórása azonos**.

$$H_0 : m_1 \leq m_2, \quad H_1 : m_1 > m_2$$

A próbastatisztika értéke: $t = 1,04$.

Az $f = n_1 + n_2 - 2 = 10 + 8 - 2 = 16$ szabadsági fokú egyoldali t -próba kritikus értéke $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett: $\bar{t}_{16,0,05} = 1,746$.

Kétmintás t -próba: példa

Két különböző márkájú vaj tömegét mértük meg, az X típusúét tízszer, az Y típusúét nyolcszor. Az átlagok és korrigált tapasztalati szórások (kg-ban):

$$\bar{X} = 0,217, \quad s_n^*(X) = 0,027, \quad \bar{Y} = 0,203, \quad s_n^*(Y) = 0,03.$$

Állíthatjuk-e $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett, hogy az X típusú vajak tömege szignifikánsan több az Y típusú vajénál? Feltételezzük, hogy a mérések **szórása azonos**.

$$H_0 : m_1 \leq m_2, \quad H_1 : m_1 > m_2$$

A próbastatisztika értéke: $t = 1,04$.

Az $f = n_1 + n_2 - 2 = 10 + 8 - 2 = 16$ szabadsági fokú egyoldali t -próba kritikus értéke $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett: $\bar{t}_{16,0,05} = 1,746$.

Itt $t = 1,04 < 1,746 = \bar{t}_{16,0,05}$, ezért **elfogadjuk H_0 -t**. Az X típusú vaj tömege **nem haladja meg szignifikánsan** az Y típusúét.

p -érték: $0,149 > 0,05$

Kétmintás t -próba: példa

Kétféle joghurt cukortartalmát szeretnénk összehasonlítani. Az elsőből $n_1 = 20$, a másodikból $n_2 = 12$ dobozban mértük meg a cukortartalmat (grammban).

Az átlagok és korigált tapasztalati szórások grammban számolva (X_1, \dots, X_{20} az első minta, Y_1, \dots, Y_{12} a második):

$$\bar{X} = 18,4, \quad s_n^*(X) = 1,2, \quad \bar{Y} = 19,9, \quad s_n^*(Y) = 1,3.$$

Állíthatjuk-e $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett, hogy a kétféle joghurtban szignifikánsan eltérő a cukortartalom?

Kétmintás, kétoldali, párosítatlan Student-féle t -próba

A **várható érték összehasonlítására** azonos szórás esetén (two-sample two-sided unpaired Student t -test).

$X_1, \dots, X_{n_1}, Y_1, \dots, Y_{n_2}$ **független normális eloszlású azonos szórású** valószínűségi változók: $X_i \sim N(m_1, \sigma^2)$, $Y_i \sim N(m_2, \sigma^2)$, ahol m_1, m_2, σ ismeretlen paraméterek.

Kétoldali ellenhipotézis: $H_0 : m_1 = m_2$; $H_1 : m_1 \neq m_2$.

Kétmintás, kétoldali, párosítatlan Student-féle t -próba

A **várható érték összehasonlítására** azonos szórás esetén (two-sample two-sided unpaired Student t -test).

$X_1, \dots, X_{n_1}, Y_1, \dots, Y_{n_2}$ **független normális eloszlású azonos szórású** valószínűségi változók: $X_i \sim N(m_1, \sigma^2)$, $Y_i \sim N(m_2, \sigma^2)$, ahol m_1, m_2, σ ismeretlen paraméterek.

Kétoldali ellenhipotézis: $H_0 : m_1 = m_2$; $H_1 : m_1 \neq m_2$.

Próbastatisztika (eloszlása t -eloszlás H_0 mellett):

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(n_1 - 1)s_{n_1}^{*2}(X) + (n_2 - 1)s_{n_2}^{*2}(Y)}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}.$$

Ha $|t| > t_{n_1+n_2-2, 1-\alpha}$, akkor elvetjük a nullhipotézist, különben elfogadjuk. A $t_{n_1+n_2-2, 1-\alpha}$ kritikus érték az $f = n_1 + n_2 - 2$ szabadsági fokú **kétoldali** t -próba kritikus értéke α szignifikanciaszint mellett (a megfelelő eloszlás $1-\alpha/2$ -kvantilise).

Ha $p < \alpha$: elvetjük H_0 -t, az várható értékek szignifikánsan eltérnek egymástól.

Kétmintás t -próba: példa

Kétféle joghurt cukortartalmát szeretnénk összehasonlítani. Az elsőből $n_1 = 20$, a másodikból $n_2 = 12$ dobozban mértük meg a cukortartalmat (grammban).

Az átlagok és korrigált tapasztalati szórások grammban számolva (X_1, \dots, X_{20} az első minta, Y_1, \dots, Y_{12} a második):

$$\bar{X} = 18,4, \quad s_n^*(X) = 1,2, \quad \bar{Y} = 19,9, \quad s_n^*(Y) = 1,3.$$

Állíthatjuk-e $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett, hogy a kétféle joghurtban szignifikánsan eltérő a cukortartalom? Feltételezzük, hogy a minták **függetlenek**, **normális eloszlásúak**, **azonos szórásúak**.

Kétmintás t -próba: példa

Kétféle joghurt cukortartalmát szeretnénk összehasonlítani. Az elsőből $n_1 = 20$, a másodikból $n_2 = 12$ dobozban mértük meg a cukortartalmat (grammban).

Az átlagok és korrigált tapasztalati szórások grammban számolva (X_1, \dots, X_{20} az első minta, Y_1, \dots, Y_{12} a második):

$$\bar{X} = 18,4, \quad s_n^*(X) = 1,2, \quad \bar{Y} = 19,9, \quad s_n^*(Y) = 1,3.$$

Állíthatjuk-e $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett, hogy a kétféle joghurtban szignifikánsan eltérő a cukortartalom? Feltételezzük, hogy a minták **függetlenek**, **normális eloszlásúak**, **azonos szórásúak**.

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(n_1 - 1)s_{n_1}^{*2}(X) + (n_2 - 1)s_{n_2}^{*2}(Y)}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}.$$

Behelyettesítve:

$$t = \frac{18,4 - 19,9}{\sqrt{19 \cdot 1,2^2 + 11 \cdot 1,3^2}} \cdot \sqrt{\frac{20 \cdot 12 \cdot 30}{32}} = -3,3.$$

Kétmintás t -próba: példa

Kétféle joghurt cukortartalmát szeretnénk összehasonlítani. Az elsőből $n_1 = 20$, a másodikkól $n_2 = 12$ dobozban mértük meg a cukortartalmat (grammban).

Az átlagok és korrigált tapasztalati szórások grammban számolva (X_1, \dots, X_{20} az első minta, Y_1, \dots, Y_{12} a második):

$$\bar{X} = 18,4, \quad s_n^*(X) = 1,2, \quad \bar{Y} = 19,9, \quad s_n^*(Y) = 1,3.$$

Állíthatjuk-e $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett, hogy a kétféle joghurtban szignifikánsan eltérő a cukortartalom? Feltételezzük, hogy a minták **függetlenek, normális eloszlásúak, azonos szórásúak**.

$$H_0 : m_1 = m_2, \quad H_1 : m_1 \neq m_2$$

A próbastatisztika értéke: $t = -3,3$.

Az $f = n_1 + n_2 - 2 = 20 + 12 - 2 = 30$ szabadsági fokú **kétoldali** t -próba kritikus értéke $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett: $t_{16,0,05} = 2,042$.

Kétmintás t -próba: példa

Kétféle joghurt cukortartalmát szeretnénk összehasonlítani. Az elsőből $n_1 = 20$, a másodikból $n_2 = 12$ dobozban mértük meg a cukortartalmat (grammban).

Az átlagok és korrigált tapasztalati szórások grammban számolva (X_1, \dots, X_{20} az első minta, Y_1, \dots, Y_{12} a második):

$$\bar{X} = 18,4, \quad s_n^*(X) = 1,2, \quad \bar{Y} = 19,9, \quad s_n^*(Y) = 1,3.$$

Állíthatjuk-e $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett, hogy a kétféle joghurtban szignifikánsan eltérő a cukortartalom? Feltételezzük, hogy a minták **függetlenek, normális eloszlásúak, azonos szórásúak**.

$$H_0 : m_1 = m_2, \quad H_1 : m_1 \neq m_2$$

A próbastatisztika értéke: $t = -3,3$.

Az $f = n_1 + n_2 - 2 = 20 + 12 - 2 = 30$ szabadsági fokú **kétoldali** t -próba kritikus értéke $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett: $t_{16,0,05} = 2,042$.

Itt $|t| = 3,3 > 2,042 = t_{30,0,05}$, ezért **elutasítjuk H_0 -t**. A kétféle joghurt cukortartalma **szignifikánsan különböző**

Kétmintás t -próba: példa

Kétféle joghurt cukortartalmát szeretnénk összehasonlítani. Az elsőből $n_1 = 20$, a másodiktól $n_2 = 12$ dobozban mértük meg a cukortartalmat (grammban).

Az átlagok és korrigált tapasztalati szórások grammban számolva (X_1, \dots, X_{20} az első minta, Y_1, \dots, Y_{12} a második):

$$\bar{X} = 18,4, \quad s_n^*(X) = 1,2, \quad \bar{Y} = 19,9, \quad s_n^*(Y) = 1,3.$$

Állíthatjuk-e $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett, hogy a kétféle joghurtban szignifikánsan eltérő a cukortartalom? Feltételezzük, hogy a minták **függetlenek, normális eloszlásúak, azonos szórásúak**.

$$H_0 : m_1 = m_2, \quad H_1 : m_1 \neq m_2$$

A próbastatisztika értéke: $t = -3,3$.

Az $f = n_1 + n_2 - 2 = 20 + 12 - 2 = 30$ szabadsági fokú **kétoldali** t -próba kritikus értéke $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett: $t_{16,0,05} = 2,042$.

Itt $|t| = 3,3 > 2,042 = t_{30,0,05}$, ezért **elutasítjuk H_0 -t**. A kétféle joghurt cukortartalma **szignifikánsan különböző** – ha a szórások azonosak, és a próba alkalmazható (ezt eddig feltettük).

F-próba

Független normális eloszlású minták **szórásának** összehasonlítására.

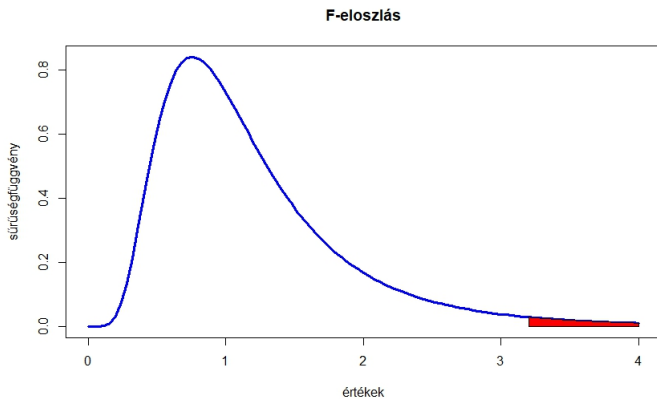
- Legyenek most $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}, Y_1, \dots, Y_{n_2}$ független normális eloszlású valószínűségi változók, ahol $X_i \sim N(m_1, \sigma_1^2)$, $Y_i \sim N(m_2, \sigma_2^2)$. Itt $m_1, m_2, \sigma_1, \sigma_2$ ismeretlen paraméterek.
- Kétoldali ellenhipotézis: $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$; $H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$.
- Próbastatisztika (eloszlása F -eloszlás H_0 mellett):

$$F = \frac{s_{n_1}^{*2}}{s_{n_2}^{*2}}.$$

- Ha $F > F_{n_1-1, n_2-1}$ vagy $1/F > F_{n_2-1, n_1-1}$, akkor elvetjük a nullhipotézist, különben elfogadjuk, ahol F_{f_1, f_2} az f_1, f_2 szabadsági fokú az F -eloszlás $1 - \alpha/2$ -kvantilise.

$p < 0,05$: a szórások szignifikánsan eltérnek.

Az F -próba kritikus értéke



Az F -próba kritikus értéke: $F_{19,11} = 3,24$, ez az eloszlás $1 - \alpha/2 = 0,975$ -kvantilise

Kétmintás F -próba: példa

Kétféle joghurt cukortartalmát szeretnénk összehasonlítani. Az elsőből $n_1 = 20$, a másodikból $n_2 = 12$ dobozban mértük meg a cukortartalmat (grammban). Az átlagok és korrigált tapasztalati szórások (X_1, \dots, X_{20} az első minta, Y_1, \dots, Y_{12} a második):

$$\bar{X} = 18,4, \quad s_n^*(X) = 1,2, \quad \bar{Y} = 19,9, \quad s_n^*(Y) = 1,3.$$

Állíthatjuk-e $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett, hogy a kétféle joghurtban szignifikánsan eltérő a cukortartalom szórása? Feltételezzük, hogy a minták **függetlenek, normális eloszlásúak**.

Kétmintás F -próba: példa

Kétféle joghurt cukortartalmát szeretnénk összehasonlítani. Az elsőből $n_1 = 20$, a másodiktól $n_2 = 12$ dobozban mértük meg a cukortartalmat (grammban). Az átlagok és korrigált tapasztalati szórások (X_1, \dots, X_{20} az első minta, Y_1, \dots, Y_{12} a második):

$$\bar{X} = 18,4, \quad s_n^*(X) = 1,2, \quad \bar{Y} = 19,9, \quad s_n^*(Y) = 1,3.$$

Állíthatjuk-e $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett, hogy a kétféle joghurtban szignifikánsan eltérő a cukortartalom szórása? Feltételezzük, hogy a minták **függetlenek, normális eloszlásúak**.

$$H_0 : \sigma_1 = \sigma_2, \quad H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$$

A próbastatisztika értéke: $F = \frac{s_{n_1}^{*2}}{s_{n_2}^{*2}} = \frac{1,2^2}{1,3^2} = 0,85$, és $\frac{1}{F} = \frac{1,3^2}{1,2^2} = 1,17$.

Az $(f_1, f_2) = (n_1 - 1, n_2 - 1) = (19, 11)$ szabadsági fokú F -próba kritikus értéke $\alpha = 0,05$ esetén: 3,24, míg az $(f_2, f_1) = (n_2 - 1, n_1 - 1) = (11, 19)$ szabadsági fok esetén 2,76.

Kétmintás F -próba: példa

Kétféle joghurt cukortartalmát szeretnénk összehasonlítani. Az elsőből $n_1 = 20$, a másodikból $n_2 = 12$ dobozban mértük meg a cukortartalmat (grammban). Az átlagok és korrigált tapasztalati szórások (X_1, \dots, X_{20} az első minta, Y_1, \dots, Y_{12} a második):

$$\bar{X} = 18,4, \quad s_n^*(X) = 1,2, \quad \bar{Y} = 19,9, \quad s_n^*(Y) = 1,3.$$

Állíthatjuk-e $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett, hogy a kétféle joghurtban szignifikánsan eltérő a cukortartalom szórása? Feltételezzük, hogy a minták **függetlenek, normális eloszlásúak**.

$$H_0 : \sigma_1 = \sigma_2, \quad H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$$

A próbastatisztika értéke: $F = \frac{s_{n_1}^{*2}}{s_{n_2}^{*2}} = \frac{1,2^2}{1,3^2} = 0,85$, és $\frac{1}{F} = \frac{1,3^2}{1,2^2} = 1,17$.

Az $(f_1, f_2) = (n_1 - 1, n_2 - 1) = (19, 11)$ szabadsági fokú F -próba kritikus értéke $\alpha = 0,05$ esetén: 3,24, míg az $(f_2, f_1) = (n_2 - 1, n_1 - 1) = (11, 19)$ szabadsági fok esetén 2,76.

Mivel $F < 3,24$ és $1/F < 2,76$, **elfogadjuk a nullhipotézist**, a szórások nem térnek el szignifikánsan, és **a kétmintás t -próba valóban alkalmazható**.

Normális eloszlásra vonatkozó kétmintás próbák

Az alábbiakat kell ellenőrizni kétmintás próbánál:

- A minta **normális eloszlású**, vagy a mintaelemszám elég nagy és a szórás feltehetően véges (a centrális határeloszlástétel alapján az átlag közel normális eloszlású).

Normális eloszlásra vonatkozó kétmintás próbák

Az alábbiakat kell ellenőrizni kétmintás próbánál:

- A minta **normális eloszlású**, vagy a mintaelemszám elég nagy és a szórás feltehetően véges (a centrális határeloszlástétel alapján az átlag közel normális eloszlású).
- Kétmintás esetben: a **két minta egymástól független** ("unpaired" eset). Ha a két minta természetes módon párosítható, **párosított** ("paired") próba alkalmazható. Példa: megmérjük húsz ember vérnyomását egy adott napon reggel és este. Igaz-e, hogy a reggeli érték jelentősen eltér az estitől?
- Ha a **szórásokról feltételezhetjük, hogy megegyeznek**: a Student-féle t -próba alkalmazható.
- Ha a **szórásokról nem tételezhetjük fel, hogy megegyeznek**: a Welch-féle t -próba alkalmazható.

Példa: párosított t -próba

1991 és 2010 között feljegyezték az éves csapadékösszeget Budapesten, illetve Szegeden. Az átlag Budapesten 533 mm, a korrigált tapasztalati szórás 139, Szegeden az átlag 540 mm, a korrigált tapasztalati szórás 143 lett (forrás: OMSZ). Állíthatjuk-e, hogy Szegeden szignifikánsan nagyobb a csapadékmennyiség várható értéke?

év	1991	1992	1993	1994	1995	...	átlag	s_n^*
Budapest	594	364	505	481	575	...	533	139
Szeged	617	457	408	399	562	...	540	143

Példa: párosított t -próba

1991 és 2010 között feljegyezték az éves csapadékösszeget Budapesten, illetve Szegeden. Az átlag Budapesten 533 mm, a korrigált tapasztalati szórás 139, Szegeden az átlag 540 mm, a korrigált tapasztalati szórás 143 lett (forrás: OMSZ). Állíthatjuk-e, hogy Szegeden szignifikánsan nagyobb a csapadékmennyiség várható értéke?

év	1991	1992	1993	1994	1995	...	átlag	s_n^*
Budapest	594	364	505	481	575	...	533	139
Szeged	617	457	408	399	562	...	540	143

A két adatsor **nem független**, mert egy éven belül a két város időjárása nem független (az egyes minták sem teljesen függetlenek, és nem biztos, hogy normális eloszlásúak). Ezért **párosított** (paired) t -próba alkalmazható, egyoldali nullhipotézissel.

$H_0 : m_1 \geq m_2$, $H_1 : m_1 < m_2$, ahol m_1 a budapesti, m_2 a szegedi csapadékmennyiség várható értéke.

Példa: párosított t -próba

1991 és 2010 között feljegyezték az éves csapadékösszeget Budapesten, illetve Szegeden. Az átlag Budapesten 533 mm, a korrigált tapasztalati szórás 139, Szegeden az átlag 540 mm, a korrigált tapasztalati szórás 143 lett (forrás: OMSZ). Állíthatjuk-e, hogy Szegeden szignifikánsan nagyobb a csapadékmennyiség várható értéke?

év	1991	1992	1993	1994	1995	...	átlag	s_n^*
Budapest	594	364	505	481	575	...	533	139
Szeged	617	457	408	399	562	...	540	143

A két adatsor **nem független**, mert egy éven belül a két város időjárása nem független (az egyes minták sem teljesen függetlenek, és nem biztos, hogy normális eloszlásúak). Ezért **párosított** (paired) t -próba alkalmazható, egyoldali nullhipotézissel.

$H_0 : m_1 \geq m_2$, $H_1 : m_1 < m_2$, ahol m_1 a budapesti, m_2 a szegedi csapadékmennyiség várható értéke.

A próbát elvégezve a p -értékre 0,366 adódott.

Példa: párosított t -próba

1991 és 2010 között feljegyezték az éves csapadékösszeget Budapesten, illetve Szegeden. Az átlag Budapesten 533 mm, a korrigált tapasztalati szórás 139, Szegeden az átlag 540 mm, a korrigált tapasztalati szórás 143 lett (forrás: OMSZ). Állíthatjuk-e, hogy Szegeden szignifikánsan nagyobb a csapadékmennyiség várható értéke?

év	1991	1992	1993	1994	1995	...	átlag	s_n^*
Budapest	594	364	505	481	575	...	533	139
Szeged	617	457	408	399	562	...	540	143

A két adatsor **nem független**, mert egy éven belül a két város időjárása nem független (az egyes minták sem teljesen függetlenek, és nem biztos, hogy normális eloszlásúak). Ezért **párosított** (paired) t -próba alkalmazható, egyoldali nullhipotézissel.

$H_0 : m_1 \geq m_2$, $H_1 : m_1 < m_2$, ahol m_1 a budapesti, m_2 a szegedi csapadékmennyiség várható értéke.

A próbát elvégezve a p -értékre 0,366 adódott.

Elfogadjuk a nullhipotézist, az adatok alapján Szegeden nem több szignifikánsan a csapadékmennyiség várható értéke, mint Budapesten.

Welch-féle t -próba

A **várható érték összehasonlítására** párosítatlan esetben (two-sample two-sided unpaired Welch t -test). Legyenek $X_1, \dots, X_{n_1}, Y_1, \dots, Y_{n_2}$ **független normális eloszlású** valószínűségi változók: $X_i \sim N(m_1, \sigma_1^2)$, $Y_i \sim N(m_2, \sigma_2^2)$, ahol $m_1, m_2, \sigma_1, \sigma_2$ ismeretlen paraméterek.

Kétoldali ellenhipotézis: $H_0 : m_1 = m_2$; $H_1 : m_1 \neq m_2$.

Próbastatisztika:

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{s_{n_1}^{*2}(X)}{n_1} + \frac{s_{n_2}^{*2}(Y)}{n_2}}}.$$

Ha $|t| > t_{f, 1-\alpha}$, akkor elvetjük a nullhipotézist, különben elfogadjuk. A $t_{f, 1-\alpha}$ kritikus érték az f szabadsági fokú **kétoldali** t -próba kritikus értéke α szignifikanciaszint mellett (a megfelelő eloszlás $1 - \alpha/2$ -kvantilise).

Szabadsági fok:

$$f \approx \frac{\left(\frac{s_{n_1}^{*2}(X)}{n_1} + \frac{s_{n_2}^{*2}(Y)}{n_2}\right)^2}{\frac{s_{n_1}^{*4}(X)}{n_1^2(n_1-1)} + \frac{s_{n_2}^{*4}(Y)}{n_2^2(n_2-1)}}.$$

Ha $p < \alpha$: elvetjük H_0 -t, az várható értékek szignifikánsan eltérnek egymástól.

χ^2 -próba: illeszkedésvizsgálat

Legyen A_1, A_2, \dots, A_r teljes eseményrendszer, p_1, p_2, \dots, p_r pedig olyan nemnegatív számok, melyek összege 1.

$H_0 : \mathbb{P}(A_k) = p_k$ minden $k = 1, 2, \dots, r$ -re.

$H_1 : \mathbb{P}(A_k) \neq p_k$ valamelyik $k = 1, 2, \dots, r$ -re.

- n független megfigyelést végzünk.
- N_k : hányszor következett be A_k .
- Ha van k , hogy $N_k < 4$: néhány osztályt össze kell vonnunk, hogy a próbát alkalmazhassuk (vagyis A_j és A_k helyett $A_j \cup A_k$ -t és $p_j + p_k$ -t tekintjük).
- Próbastatisztika:

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^r \frac{(N_k - n \cdot p_k)^2}{n \cdot p_k}.$$

χ^2 -próba

Adott $(A_k)_{k=1}^r$ teljes eseményrendszer, és $(p_k)_{k=1}^r$ számok: $\sum_{k=1}^r p_k = 1$.

$H_0 : \mathbb{P}(A_k) = p_k$ minden $k = 1, 2, \dots, r$ -re. H_1 : a nullhipotézis nem igaz

Próbastatisztika (feltéve, hogy $N_k \geq 4$ minden k -ra):

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^r \frac{(N_k - n \cdot p_k)^2}{n \cdot p_k}.$$

χ^2 -próba

Adott $(A_k)_{k=1}^r$ teljes eseményrendszer, és $(p_k)_{k=1}^r$ számok: $\sum_{k=1}^r p_k = 1$.

$H_0 : \mathbb{P}(A_k) = p_k$ minden $k = 1, 2, \dots, r$ -re. H_1 : a nullhipotézis nem igaz

Próbastatisztika (feltéve, hogy $N_k \geq 4$ minden k -ra):

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^r \frac{(N_k - n \cdot p_k)^2}{n \cdot p_k}.$$

Legyen c_{krit} az $f = r - 1$ szabadsági fokú χ^2 -próba kritikus értéke α szignifikanciaszint mellett.

$\chi^2 > c_{\text{krit}}$ vagy $p < \alpha$: elutasítjuk H_0 -t, az eloszlás **szignifikánsan eltér** (p_k) -től.

$\chi^2 \leq c_{\text{krit}}$ vagy $p \geq \alpha$: elfogadjuk H_0 -t, az eloszlás **nem tér el szignifikánsan** (p_k) -től.

χ^2 -próba

Adott $(A_k)_{k=1}^r$ teljes eseményrendszer, és $(p_k)_{k=1}^r$ számok: $\sum_{k=1}^r p_k = 1$.

$H_0 : \mathbb{P}(A_k) = p_k$ minden $k = 1, 2, \dots, r$ -re. H_1 : a nullhipotézis nem igaz

Próbastatisztika (feltéve, hogy $N_i \geq 4$ minden k -ra):

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^r \frac{(N_k - n \cdot p_k)^2}{n \cdot p_k}.$$

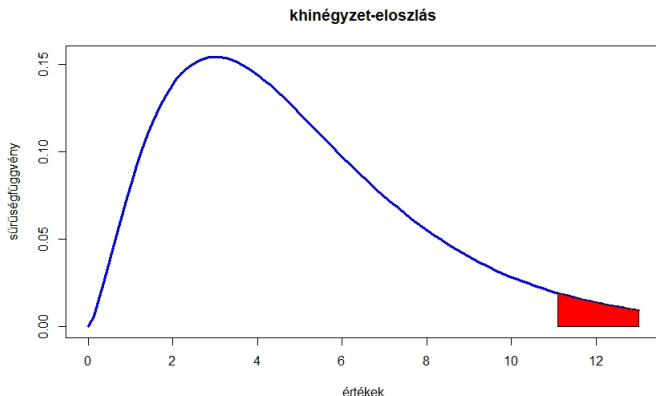
Legyen c_{krit} az $f = r - 1$ szabadsági fokú χ^2 -próba kritikus értéke α terjedelem (szignifikanciaszint) mellett.

Ez az $f = r - 1$ szabadsági fokú χ^2 -eloszlás $1 - \alpha$ -kvantilise, vagyis

$$\mathbb{P}(Z_1^2 + \dots + Z_f^2 < c_{\text{krit}}) = 1 - \alpha,$$

ahol Z_1, \dots, Z_f független standard normális eloszlású valószínűségi változók.

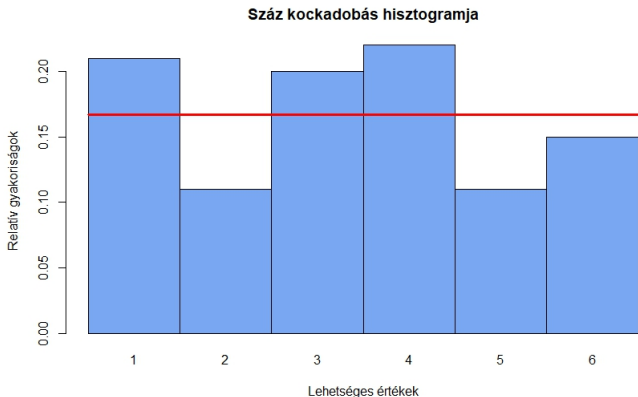
χ^2 -próba kritikus értéke



Az $f = 5$ szabadsági fokú χ^2 -eloszlás sűrűségfüggvénye. Az $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszintű próba kritikus értéke: $c_{\text{krit}} = 11,1$.

χ^2 -próba: példa

Dobókockával dobunk százszor. A terjedelmet $\alpha = 0,05$ -nek választva elfogadható-e, hogy szabályos a dobókocka?



χ^2 -próba: példa

Dobókockával dobunk százszor. A terjedelmet $\alpha = 0,05$ -nek választva elfogadható-e, hogy szabályos a dobókocka?

érték	1	2	3	4	5	6
gyakoriság	21	11	20	22	11	15

χ^2 -próba: példa

Dobókockával dobunk százszor. A terjedelmet $\alpha = 0,05$ -nek választva elfogadható-e, hogy szabályos a dobókocka?

érték	1	2	3	4	5	6
gyakoriság	21	11	20	22	11	15

Minden szám legalább négyszer előfordult, alkalmazhatjuk a χ^2 -próbát. A_i : i -t dobunk, $r = 6$, $p_k = 1/6$, $k = 1, 2, \dots, 6$.

$H_0 : \mathbb{P}(A_k) = 1/6$ minden k -ra; $H_1 : \mathbb{P}(A_k) \neq 1/6$ valamelyik k -ra

χ^2 -próba: példa

Dobókockával dobunk százszor. A terjedelmet $\alpha = 0,05$ -nek választva elfogadható-e, hogy szabályos a dobókocka?

érték	1	2	3	4	5	6
gyakoriság	21	11	20	22	11	15

Minden szám legalább négyszer előfordult, alkalmazhatjuk a χ^2 -próbát. A_i : i -t dobunk, $r = 6$, $p_k = 1/6$, $k = 1, 2, \dots, 6$.

$H_0 : \mathbb{P}(A_k) = 1/6$ minden k -ra; $H_1 : \mathbb{P}(A_k) \neq 1/6$ valamelyik k -ra

$$\begin{aligned}\chi^2 &= \sum_{k=1}^r \frac{(N_k - n \cdot p_k)^2}{n \cdot p_k} = \frac{(21 - 100 \cdot 1/6)^2}{100 \cdot 1/6} + \frac{(11 - 100 \cdot 1/6)^2}{100 \cdot 1/6} \\ &+ \dots + \frac{(15 - 100 \cdot 1/6)^2}{100 \cdot 1/6} = 7,52.\end{aligned}$$

χ^2 -próba: példa

Dobókockával dobunk százszor. A terjedelmet $\alpha = 0,05$ -nek választva elfogadható-e, hogy szabályos a dobókocka?

érték	1	2	3	4	5	6
gyakoriság	21	11	20	22	11	15

χ^2 -próba: példa

Dobókockával dobunk százszor. A terjedelmet $\alpha = 0,05$ -nek választva elfogadható-e, hogy szabályos a dobókocka?

érték	1	2	3	4	5	6
gyakoriság	21	11	20	22	11	15

$H_0 : \mathbb{P}(A_k) = 1/6$ minden k -ra; $H_1 : \mathbb{P}(A_k) \neq 1/6$ valamelyik k -ra

$$\chi^2 = 7,52; \quad f = r - 1 = 5; \quad \alpha = 0,05; \quad c_{\text{krit}} = 11,1$$

χ^2 -próba: példa

Dobókockával dobunk százszor. A terjedelmet $\alpha = 0,05$ -nek választva elfogadható-e, hogy szabályos a dobókocka?

érték	1	2	3	4	5	6
gyakoriság	21	11	20	22	11	15

$H_0 : \mathbb{P}(A_k) = 1/6$ minden k -ra; $H_1 : \mathbb{P}(A_k) \neq 1/6$ valamelyik k -ra

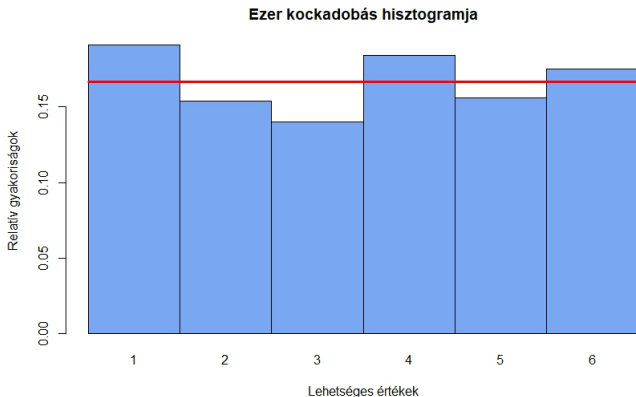
$$\chi^2 = 7,52; \quad f = r - 1 = 5; \quad \alpha = 0,05; \quad c_{\text{krit}} = 11,1$$

$\chi^2 = 7,52 < c_{\text{krit}} = 11,1$, illetve a p -értékre $0,1847 > 0,05$.

Elfogadjuk H_0 -t, elfogadható, hogy a dobókocka szabályos, **nincs szignifikáns eltérés** az egyenletes eloszlástól.

χ^2 -próba: példa

Dobókockával dobunk ezerszer. A terjedelmet $\alpha = 0,05$ -nek választva elfogadható-e, hogy szabályos a dobókocka?



χ^2 -próba: példa

Ha ezerszer dobunk, és az alábbi eredmények adódnak:

érték	1	2	3	4	5	6
gyakoriság	191	154	140	184	156	175

$H_0 : \mathbb{P}(A_k) = 1/6$ minden k -ra; $H_1 : \mathbb{P}(A_k) \neq 1/6$ valamelyik k -ra

$$\chi^2 = 11,68; \quad f = r - 1 = 5; \quad \alpha = 0,05; \quad c_{\text{krit}} = 11,1$$

χ^2 -próba: példa

Ha ezerszer dobunk, és az alábbi eredmények adódnak:

érték	1	2	3	4	5	6
gyakoriság	191	154	140	184	156	175

$H_0 : \mathbb{P}(A_k) = 1/6$ minden k -ra; $H_1 : \mathbb{P}(A_k) \neq 1/6$ valamelyik k -ra

$$\chi^2 = 11,68; \quad f = r - 1 = 5; \quad \alpha = 0,05; \quad c_{\text{krit}} = 11,1$$

$\chi^2 = 11,68 > c_{\text{krit}} = 11,1$, illetve a p -értékre $0,039 < 0,05$.

Elutasítjuk H_0 -t, nem fogadható el, hogy a dobókocka szabályos, a minta alapján az eloszlás **szignifikánsan eltér** az egyenletes eloszlástól.

Házi feladat május 2., kedd, 12:00-ig

A félév elején gyűjtött adatok alapján válasszuk szét két csoportra az embereket: nézzük azokat, akik legalább annyiszor mentek be a munkahelyükre/iskolába hente, mint amennyi a medián értéke ennek a megfigyelésnek (első csoport), és nézzük azokat, akik kevesebbszer (második csoport).

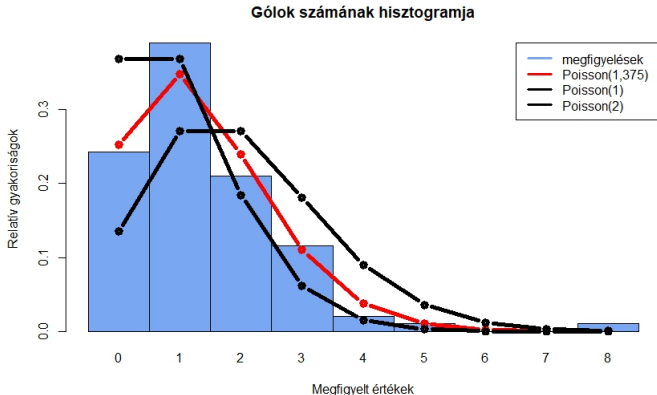
Állíthatjuk-e $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszinten, hogy az első csoport sportolással töltött idejének várható értéke szignifikánsan kevesebb, mint a második csoporté?

Állíthatjuk-e $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszinten, hogy az első csoport sportolással töltött idejének várható értéke szignifikánsan eltér a második csoportétól?

Becsléses illeszkedésvizsgálat: példa

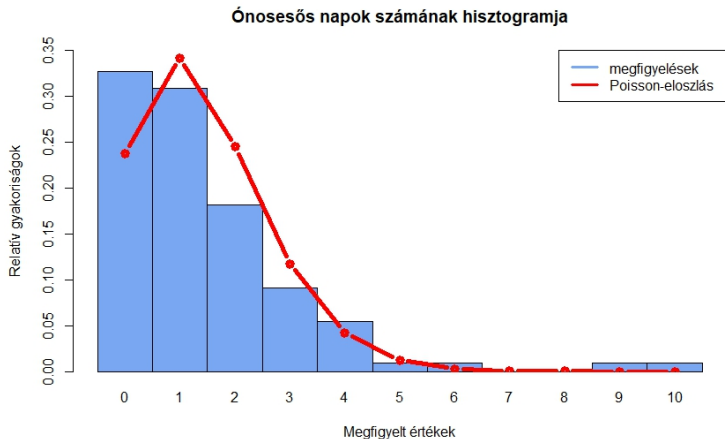
Elfogadható-e 0,05 terjedelem (szignifikanciaszint) mellett, hogy az egy futballmérkőzésen lőtt gólok száma Poisson-eloszlású?

Megfigyelt adatok $n = 95$ elemű mintából, melyek átlaga $\bar{X} = 1,379$, és a $\hat{\lambda} = 1,379$ paraméterű Poisson-eloszlás: $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

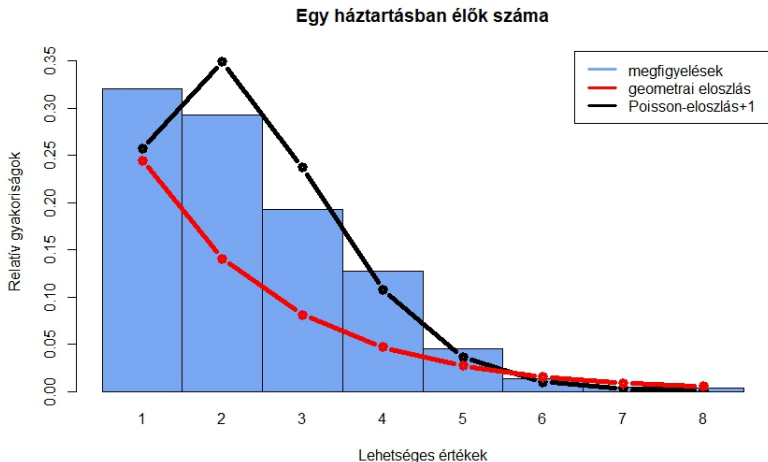


Becsléses illeszkedésvizsgálat: példa

Elfogadható-e 0,05 szignifikanciaszint mellett, hogy Budapesten az ónosesős napok száma egy év alatt Poisson-eloszlású? Megfigyelt adatok $n = 110$ elemű mintából (1901–2010, Országos Meteorológiai Szolgálat), melyek átlaga $\bar{X} = 1,44$, és a $\hat{\lambda} = 1,44$ paraméterű Poisson-eloszlás: $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.



Egy háztartásban élők száma



Egy háztartásban élők számának hisztogramja (forrás: KSH, 2011), és a geometriai eloszlás ($p = 1/\bar{X}$), illetve a Poisson(\bar{X})-eloszlás eggyel eltolva. Itt $\bar{X} = 2,36$ az átlag, és $n = 4105698$ a háztartások száma, **túl nagy a mintaelemszám.**

Becsléses illeszkedésvizsgálat

A_1, A_2, \dots, A_r teljes eseményrendszer, azaz olyan események, amik közül pontosan az egyik következik be. N_k : hányszor következik be A_k egy n elemű független mintában. Feltesszük, hogy $N_k \geq 4$ minden k -ra, ha nem, osztályokat vonunk össze. Adott $p_k(\lambda)$ minden $\lambda \in \mathcal{L}$ -re.

H_0 : van olyan $\lambda \in \mathcal{L}$, melyre $\mathbb{P}(A_k) = p_k(\lambda)$ minden $k = 1, 2, \dots, r$ -re.

H_1 : nincs ilyen $\lambda \in \mathcal{L}$, az eloszlás **szignifikánsan eltér** a $(p_k(\lambda))$ eloszláscsaládtól.

Becsléses illeszkedésvizsgálat

A_1, A_2, \dots, A_r teljes eseményrendszer, azaz olyan események, amik közül pontosan az egyik következik be. N_k : hányszor következik be A_k egy n elemű független mintában. Feltesszük, hogy $N_k \geq 4$ minden k -ra, ha nem, osztályokat vonunk össze. Adott $p_k(\lambda)$ minden $\lambda \in \mathcal{L}$ -re.

H_0 : van olyan $\lambda \in \mathcal{L}$, melyre $\mathbb{P}(A_k) = p_k(\lambda)$ minden $k = 1, 2, \dots, r$ -re.

H_1 : nincs ilyen $\lambda \in \mathcal{L}$, az eloszlás **szignifikánsan eltér** a $(p_k(\lambda))$ eloszláscsaládtól.

A λ paramétervektor maximumlikelihood-becslése legyen $\hat{\lambda}$, és legyen $\hat{p}_k = p_k(\hat{\lambda})$.
A λ dimenziója, vagyis a becsült paraméterek száma d . Próbastatisztika:

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^r \frac{(N_k - n \cdot \hat{p}_k)^2}{n \cdot \hat{p}_k}.$$

Legyen $f = r - d - 1$, és c_{krit} az f szabadsági fokú χ^2 -próba kritikus értéke α szignifikanciaszint mellett (**a szabadsági fokból levonjuk a becsült paraméterek számát**). H_0 -t elutasítjuk, ha $\chi^2 > c_{\text{krit}}$ (azaz $p < \alpha$), ilyenkor a minta szignifikánsan eltér a nullhipotézisben szereplő eloszláscsaládtól. Ha $\chi^2 \leq c_{\text{krit}}$, akkor elfogadjuk a nullhipotézist.

Becsléses illeszkedésvizsgálat: példa

Példa. Az egy futballmérkőzésen lőtt gólok száma a világbajnokság $n = 95$ mérkőzésén:

gólok száma	0	1	2	3	4	5	6	7	8
mérkőzések száma	23	37	20	11	2	1	0	0	1

Poisson-esetben a λ paraméter maximumlikelihood-becslése:

$$\hat{\lambda} = \bar{X} = \frac{0 \cdot 23 + 1 \cdot 37 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 11 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 8 \cdot 1}{95} = 1,379.$$

Mivel vannak olyan osztályok, ahova 4-nél kevesebb megfigyelés esik, a beosztást módosítjuk:

gólok száma	0	1	2	3	≥ 4
mérkőzések száma	23	37	20	11	4

Becsléses illeszkedésvizsgálat: példa

H_0 : az eloszlás **Poisson-eloszlásból** származik valamely $\lambda > 0$ -val.

H_1 : az eloszlás **eltér a Poisson-eloszlástól**.

$\hat{\lambda} = 1,379$ a paraméter maximumlikelihood-becslése. Ekkor

$$\hat{p}_k = \frac{\hat{\lambda}^k}{k!} e^{-\hat{\lambda}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

a Poisson-eloszlás definíciójába a $\hat{\lambda}$ becült paramétert helyettesítve.

Becsléses illeszkedésvizsgálat: példa

H_0 : az eloszlás **Poisson-eloszlásból** származik valamely $\lambda > 0$ -val.

H_1 : az eloszlás **eltér a Poisson-eloszlástól**.

$\hat{\lambda} = 1,379$ a paraméter maximumlikelihood-becslése. Ekkor

$$\hat{p}_k = \frac{\hat{\lambda}^k}{k!} e^{-\hat{\lambda}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

a Poisson-eloszlás definíciójába a $\hat{\lambda}$ becült paramétert helyettesítve.

gólok száma	0	1	2	3	≥ 4
mérkőzések száma	23	37	20	11	4
$n\hat{p}_k$ (Poisson($\hat{\lambda}$))	23,92	32,99	22,75	10,46	4,88

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^r \frac{(N_k - n \cdot \hat{p}_k)^2}{n \cdot \hat{p}_k} = \frac{(23 - 23,92)^2}{23,92} + \frac{(37 - 32,99)^2}{32,99} + \dots = 1,04.$$

Becsléses illeszkedésvizsgálat: példa

H_0 : az eloszlás **Poisson-eloszlásból** származik valamely $\lambda > 0$ -val.

H_1 : az eloszlás **eltér a Poisson-eloszlástól**.

$\hat{\lambda} = 1,379$ a paraméter maximumlikelihood-becslése.

gólok száma	0	1	2	3	≥ 4
mérkőzések száma	23	37	20	11	4
Poisson($\hat{\lambda}$)-eloszlás	23,92	32,99	22,75	10,46	4,88

Becsléses illeszkedésvizsgálat: példa

H_0 : az eloszlás **Poisson-eloszlásból** származik valamely $\lambda > 0$ -val.

H_1 : az eloszlás **eltér a Poisson-eloszlástól**.

$\hat{\lambda} = 1,379$, egydimenziós paramétert (egy pozitív számot) kellett becsülni, tehát $d=1$. Az osztályok száma $r = 5$.

gólok száma	0	1	2	3	≥ 4
mérkőzések száma	23	37	20	11	4
Poisson($\hat{\lambda}$)-eloszlás	23,92	32,99	22,75	10,46	4,88

$$\chi^2 = 1,04; \quad f = r - d - 1 = 5 - 1 - 1 = 3; \quad \alpha = 0,05; \quad c_{\text{krit}} = 7,81.$$

Becsléses illeszkedésvizsgálat: példa

H_0 : az eloszlás **Poisson-eloszlásból** származik valamely $\lambda > 0$ -val.

H_1 : az eloszlás **eltér a Poisson-eloszlástól**.

$\hat{\lambda} = 1,379$, egydimenziós paramétert (egy pozitív számot) kellett becsülni, tehát $d=1$. Az osztályok száma $r = 5$.

gólok száma	0	1	2	3	≥ 4
mérkőzések száma	23	37	20	11	4
Poisson($\hat{\lambda}$)-eloszlás	23,92	32,99	22,75	10,46	4,88

$$\chi^2 = 1,04; \quad f = r - d - 1 = 5 - 1 - 1 = 3; \quad \alpha = 0,05; \quad c_{\text{krit}} = 7,81.$$

$\chi^2 = 1,04 < 7,81 = c_{\text{krit}}$, ezért elfogadjuk, hogy a minta Poisson-eloszlású, **nincs szignifikáns eltérés** a Poisson-eloszlástól. A p -érték: $p = 0,21$.

Becsléses illeszkedésvizsgálat: példa

Példa. Az ónosesős napok évenkénti száma $n = 110$ éven keresztül Budapesten:

ónosesős napok száma	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
évek száma	36	34	20	10	6	1	1	0	0	1	1

Poisson-esetben a λ paraméter maximumlikelihood-becslése:

$$\hat{\lambda} = \bar{X} = \frac{0 \cdot 36 + 1 \cdot 34 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 10 + \dots + 10 \cdot 1}{110} = 1,436.$$

Mivel vannak olyan osztályok, ahova 4-nél kevesebb megfigyelés esik, a beosztást módosítjuk:

ónosesős napok száma	0	1	2	3	4	≥ 5
évek száma	36	34	20	10	6	4

Becsléses illeszkedésvizsgálat: példa

H_0 : az eloszlás Poisson-eloszlásból származik valamely $\lambda > 0$ -val.

H_1 : az eloszlás eltér a Poisson-eloszlástól.

$\hat{\lambda} = 1,436$ a paraméter maximumlikelihood-becslése. Ekkor

$$\hat{p}_k = \frac{\hat{\lambda}^k}{k!} e^{-\hat{\lambda}} \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

a Poisson-eloszlás definíciójába a $\hat{\lambda}$ becült paramétert helyettesítve.

ónososós napok száma	0	1	2	3	4	≥ 5
évek száma	36	34	20	10	6	4
$n\hat{p}_k$ (Poisson($\hat{\lambda}$))	26,17	37,58	26,98	12,91	4,64	1,73

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^r \frac{(N_k - n \cdot \hat{p}_k)^2}{n \cdot \hat{p}_k} = \frac{(36 - 26,17)^2}{26,17} + \frac{(34 - 37,58)^2}{37,58} + \dots = 9,88.$$

Becsléses illeszkedésvizsgálat: példa

H_0 : az eloszlás **Poisson-eloszlásból** származik valamely $\lambda > 0$ -val.

H_1 : az eloszlás **eltér a Poisson-eloszlástól**.

$\hat{\lambda} = 1,436$, egydimenziós paramétert (egy pozitív számot) kellett becsülni, tehát $d=1$. Az osztályok száma $r = 6$.

ónosesős napok száma	0	1	2	3	4	≥ 5
évek száma	36	34	20	10	6	4
$n\hat{p}_k$ (Poisson($\hat{\lambda}$))	26,17	37,58	26,98	12,91	4,64	1,73

$$\chi^2 = 9,88; \quad f = r - d - 1 = 6 - 1 - 1 = 4; \quad \alpha = 0,05; \quad c_{\text{krit}} = 9,49.$$

Becsléses illeszkedésvizsgálat: példa

H_0 : az eloszlás **Poisson-eloszlásból** származik valamely $\lambda > 0$ -val.

H_1 : az eloszlás **eltér a Poisson-eloszlástól**.

$\hat{\lambda} = 1,436$, egydimenziós paramétert (egy pozitív számot) kellett becsülni, tehát $d=1$. Az osztályok száma $r = 6$.

ónosesős napok száma	0	1	2	3	4	≥ 5
évek száma	36	34	20	10	6	4
$n\hat{p}_k$ (Poisson($\hat{\lambda}$))	26,17	37,58	26,98	12,91	4,64	1,73

$$\chi^2 = 9,88; \quad f = r - d - 1 = 6 - 1 - 1 = 4; \quad \alpha = 0,05; \quad c_{\text{krit}} = 9,49.$$

$\chi^2 = 9,88 > 9,49 = c_{\text{krit}}$, ezért elutasítjuk, hogy a minta Poisson-eloszlású, az eloszlás **szignifikánsan eltér** a Poisson-eloszlástól. A p -érték: $p = 0,04$.

Függetlenségvizsgálat

Két szempont szerint soroljuk osztályokba a megfigyeléseket.

Első szempont: A_1, \dots, A_r . Második szempont: B_1, \dots, B_s .

H_0 : **a két szempont független** egymástól, azaz $\mathbb{P}(A_i \cap B_j) = \mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}(B_j)$ minden i, j -re.

H_1 : a nullhipotézis nem igaz, a két szempont között **összefüggés** van.

Függetlenségvizsgálat

Két szempont szerint soroljuk osztályokba a megfigyeléseket.

Első szempont: A_1, \dots, A_r . Második szempont: B_1, \dots, B_s .

H_0 : **a két szempont független** egymástól, azaz $\mathbb{P}(A_i \cap B_j) = \mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}(B_j)$ minden i, j -re.

H_1 : a nullhipotézis nem igaz, a két szempont között **összefüggés** van.

N_{ij} : hány olyan megfigyelés van, melyre A_i és B_j teljesül.

$N_{i.} = \sum_{j=1}^s N_{ij}$ (azaz az A_i gyakorisága); $N_{.j} = \sum_{i=1}^r N_{ij}$ (azaz B_j gyakorisága); n pedig az összes megfigyelés száma. Ekkor a próbat statisztika:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{\left(N_{ij} - \frac{N_{i.} \cdot N_{.j}}{n}\right)^2}{\frac{N_{i.} \cdot N_{.j}}{n}}.$$