Fisher-információ (6. előadás)

Egy mintaelem **Fisher-információja**:

$$I_1(\vartheta) = \mathbb{E}_\vartheta\left(\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}\log f_\vartheta(X_1)\right)^2\right),$$

ahol f_ϑ a likelihoodfüggvény $\mathbb{P}_\vartheta$ mellett.

Fisher-információ (6. előadás)

Egy mintaelem **Fisher-információja**:

$$I_1(\vartheta) = \mathbb{E}_\vartheta\left(\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}\log f_\vartheta(X_1)\right)^2\right),$$

ahol f_ϑ a likelihoodfüggvény $\mathbb{P}_\vartheta$ mellett.

- Megfelelő (regularitási) feltételek mellett a független azonos eloszlású, n elemű minta Fisher-információja: $I_n(\vartheta) = n \cdot I_1(\vartheta)$.
- Ha T elégséges statisztika, akkor $T(X_1, \ldots, X_n)$ Fisher-információja ugyanaz, mint $(X_1, \ldots, X_n)$ Fisher-információja (például Poisson-eloszlásnál az átlag Fisher-információja ugyanaz, mint a teljes mintáé).
- **Cramér–Rao-egyenlőtlenség**: megfelelő (regularitási) feltételek mellett, ha T torzítatlan becslés ϑ-ra, akkor

$$D^2(T(X)) \geq \frac{1}{I_n(\vartheta)} = \frac{1}{nI_1(\vartheta)}.$$

(Ebben az értelemben feleakkora szóráshoz négyszer annyi mintaelem kell.)

Fisher-információ

Egy mintaelem **Fisher-információja**:

$$I_1(\vartheta) = \mathbb{E}_\vartheta\left(\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}\log f_\vartheta(X_1)\right)^2\right),$$

ahol f_ϑ a likelihoodfüggvény $\mathbb{P}_\vartheta$ mellett.

Néhány nevezetes eloszlás Fisher-információja egy mintaelemből:

- binomiális eloszlás n renddel és p paraméterrel:

$$\frac{n}{p(1-p)}.$$

- Poisson-eloszlás λ paraméterrel: $1/\lambda$
- normális eloszlás, ha $\vartheta = (m, \sigma)$:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sigma^2} \end{pmatrix}.$$

Fisher-információ: Poisson-eloszlás

Egy mintaelem **Fisher-információja** (az f_λ likelihood-függvény most a valószínűség):

$$I_1(\lambda) = \mathbb{E}_\lambda\left(\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\log f_\lambda(X_1)\right)^2\right) = \mathbb{E}_\lambda\left(\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\log\left(\frac{\lambda^{X_1}}{X_1!}e^{-\lambda}\right)\right)^2\right) =$$
$$= \mathbb{E}_\lambda\left(\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(X_1\log\lambda - \log X_1! - \lambda\right)\right)^2\right) = \mathbb{E}_\lambda\left(\left(\frac{X_1}{\lambda} - 1\right)^2\right) =$$
$$= \mathbb{E}_\lambda\left(\frac{X_1^2}{\lambda^2} - 2\frac{X_1}{\lambda} + 1\right) = \frac{\lambda+\lambda^2}{\lambda^2} - 2 + 1 = \frac{1}{\lambda}.$$

Felhasználtuk, hogy Poisson-eloszlásnál $\mathbb{E}_\lambda(X_1) = D_\lambda(X_1) = \lambda$, így

$$\mathbb{E}_\lambda(X_1^2) = D_\lambda^2(X_1) + \mathbb{E}_\lambda^2(X_1) = \lambda + \lambda^2.$$

Következmény a **Cramér–Rao-egyenlőtlenség** alapján: ha T torzítatlan becslése λ-nak n elemű független mintából, akkor

$$D^2(T(X_1,\ldots,X_n)) \geq \frac{\lambda}{n}.$$

Konfidenciaintervallum az ML-becslés alapján

Gyakran az ismeretlen paraméterre egyetlen becslés helyett konfidenciaintervallumot adhatunk meg, amire például az igaz, hogy

$$\mathbb{P}_\vartheta(T_1 \leq \vartheta \leq T_2) \geq 0,95 \qquad (\vartheta \in \Theta)$$

. Ez egy olyan véletlen intervallum, ami 95%-os megbízhatóságú, azaz legalább ennyi valószínűséggel tartalmazza a becsülni kívánt paramétert.

Konfidenciaintervallum az ML-becslés alapján

Gyakran az ismeretlen paraméterre egyetlen becslés helyett konfidenciaintervallumot adhatunk meg, amire például az igaz, hogy

$$\mathbb{P}_\vartheta(T_1 \leq \vartheta \leq T_2) \geq 0,95 \qquad (\vartheta \in \Theta)$$

. Ez egy olyan véletlen intervallum, ami 95%-os megbízhatóságú, azaz legalább ennyi valószínűséggel tartalmazza a becsülni kívánt paramétert.

Állítás

Ha likelihoodfüggvény teljesít bizonyos regularitási feltételeket, akkor a ϑ paraméternek az $X_1, X_2, \ldots, X_n$ mintából számolt $\hat{\vartheta}_n$ maximumlikelihood-becslése

- *létezik;*
- *aszimptotikusan torzítatlan:* $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_\vartheta(\hat{\vartheta}_n) = \vartheta$ *minden* $\vartheta \in \Theta$*-ra;*
- *aszimptotikusan hatásos:* $\lim_{n\to\infty} \sqrt{nI_1(\vartheta)} D_\vartheta(\hat{\vartheta}_n) = 1$ *minden* $\vartheta \in \Theta$*-ra;*
- *aszimptotikusan normális eloszlású:* $\sqrt{nI_1(\vartheta)}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta)$ *eloszlásban tart a standard normális eloszláshoz minden* $\vartheta \in \Theta$*-ra* $n \to \infty$ *esetén.*

Itt $I_1(\vartheta)$ *az egyelemű mintából számolt Fisher-információt jelöli.*

Konfidenciaintervallum az ML-becslés alapján

Ez alapján **aszimptotikus konfidenciaintervallum**, ami $n \to \infty$ esetén $1-\alpha$-hoz tartó valószínűséggel tartalmazza ϑ-t:

$$\left(\hat{\vartheta}_n - \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{\hat{I}_n(\vartheta)}};\ \hat{\vartheta}_n + \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{\hat{I}_n(\vartheta)}}\right),$$

ahol $\hat{I}_n(\vartheta) = n \cdot I_1(\hat{\vartheta}_n)$, vagyis a Fisher-információ kifejezésébe a maximumlikelihood-becslést írjuk be.

Másképpen felírva:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_\vartheta\left(\hat{\vartheta}_n - \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{\hat{I}_n(\vartheta)}} \le \vartheta \le \hat{\vartheta}_n + \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{\hat{I}_n(\vartheta)}}\right) = 1-\alpha.$$

Itt is vegyük észre, hogy ϑ ismeretlen, de rögzített paraméter, és az intervallum alsó és felső végpontjai véletlenek, az eloszlásuk is ϑ-tól függ (ezt jelöli a ϑ az alsó indexben).

Bayes-becslés: bevezetés

Eddig a statisztikai elemzésekben a **frekventista hozzáállást** követtük. A $\vartheta \in \Theta$ paraméter számunkra ismeretlen, és csak azt tesszük fel róla, hogy egy ismert Θ halmaznak, a paramétertérnek az eleme. A Θ paramétertér rögzített halmaz saját struktúra nélkül, a tulajdonságoknak (például konzisztencia, torzítatlanság) minden $\vartheta \in \Theta$-ra teljesülniük kell. Ezért előzetes információt nem tudunk jól felhasználni.

Bayes-becslés: bevezetés

Eddig a statisztikai elemzésekben a **frekventista hozzáállást** követtük. A $\vartheta \in \Theta$ paraméter számunkra ismeretlen, és csak azt tesszük fel róla, hogy egy ismert Θ halmaznak, a paramétertérnek az eleme. A Θ paramétertér rögzített halmaz saját struktúra nélkül, a tulajdonságoknak (például konzisztencia, torzítatlanság) minden $\vartheta \in \Theta$-ra teljesülniük kell. Ezért előzetes információt nem tudunk jól felhasználni.

Ennek a módszernek egy hátránya például:

- egy gyógyszert n-szer kipróbálva 0 esetben lépett fel mellékhatás;
- legyen p a mellékhatás kialakulásának valószínűsége;
- ezt a relatív gyakorisággal becsülhetjük: $\hat{p} = 0$. Ez torzítatlan, konzisztens becslés, a frekventista hozzáállás követelményeinek megfelel.
- Ugyanakkor, ha $n = 20$ kipróbálásból nem alakult ki mellékhatás, az egész más, mintha $n = 2000$ kipróbálásnál sem találkoztunk ezzel. Ezt a becslés nem tükrözi.

Bayes-i hozzáállás: a paramétert magát is valószínűségi változónak tekintjük, ebbe beépítve valamilyen előzetes információt.

Beta-eloszlás és érmedobás

- van egy szabályosnak tűnő pénzérménk
- az írás valószínűsége ϑ, ismeretlen paraméter
- a priori sűrűségfüggvény:

Beta-eloszlás és érmedobás

- van egy szabályosnak tűnő pénzérménk
- az írás valószínűsége ϑ, ismeretlen paraméter
- a priori sűrűségfüggvény: a $[0,1]$ intervallumon kívül 0, és az $1/2$ környékén a legnagyobb
- például a Beta(3,3) eloszlást választhatjuk a priori eloszlásnak

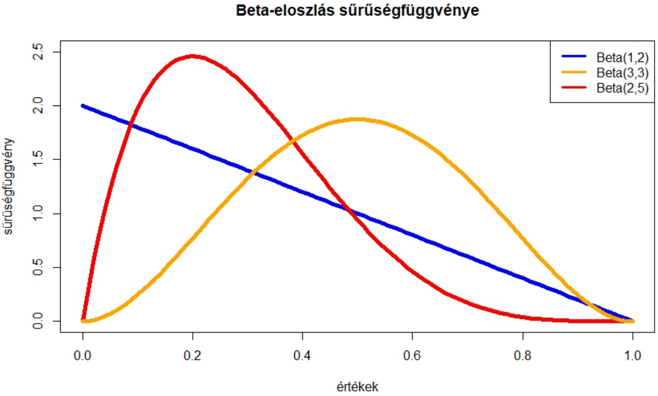
$$p(t) = ct^2(1-t)^2\mathbb{I}(0 \leq t \leq 1),$$

megfelelő $c > 0$ számmal (hogy 1 legyen az integrál).

Irodalom

- Simon Jackman: Bayesian analysis for the social sciences, Wiley, 2009.

Beta-eloszlás



Beta-eloszlás sűrűségfüggvénye különböző paraméterpárok mellett:

$f(x) = x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathbb{I}(0 \leq x \leq 1)$.

Beta-eloszlás

Definíció

Az X valószínűségi változó beta-eloszlású a, b paraméterekkel, ha sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{(a+b-1)!}{(a-1)!(b-1)!} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, \qquad ha\ x \in [0,1],$$

és nulla különben.

Például: $a = 1, b = 1$: egyenletes eloszlás a $[0,1]$ intervallumon; $a = 2, b = 1$: két független, a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó közül a kisebbnek az eloszlása.

Állítás

Az (a, b) paraméterű beta-eloszlás várható értéke és szórása:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a}{a+b}; \qquad D(X) = \sqrt{\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}}.$$

Beta-eloszlás

Állítás

Az (a, b) *paraméterű beta-eloszlás várható értéke és szórása:*

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a}{a+b}; \qquad D(X) = \sqrt{\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}}.$$

Legyen $X_1, X_2, \dots, X_n$ független minta a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlásból. Ekkor X_k^*-nak, vagyis a nagyság szerint növekvő sorban a k. mintaelemnek az eloszlása beta-eloszlás $a = k$ és $b = n - k + 1$ paraméterekkel. Következmény:

$$\mathbb{E}(X_k^*) = \frac{k}{n+1}; \qquad D(X_k^*) = \sqrt{\frac{k(n-k+1)}{(n+1)^2(n+2)}}.$$

Például $\mathbb{E}(X_n^*) = \frac{n}{n+1}$, ehhez hasonlóan adódott, hogy ha $[0, \vartheta)$ intervallumon egyenletes eloszlásból van n elemű mintánk, akkor $\frac{n+1}{n} X_n^*$ torzítatlan becslés volt ϑ-ra:

$$\mathbb{E}\left(\frac{n+1}{n} X_n^*\right) = \frac{n+1}{n}\mathbb{E}(X_n^*) = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1}\vartheta = \vartheta$$

minden n-re és minden ϑ-ra. Másrészt az X_n^* aszimptotikusan torzítatlan ϑ-ra,

A priori és prediktív eloszlás

A Bayes-becslés elkészítéséhez az alábbi fogalmakra lesz szükség.

A θ paramétert valószínűségi változónak tekintjük. Ennek segítségével építjük be az előzetes információkat. A választás tetszőleges lehet, de ettől függni fog a becslés is.

Θ az ismeretlen ϑ paraméter összes lehetséges értékéből álló halmaz.

A priori eloszlás: eloszlás a Θ paramétertéren, sűrűségfüggvénye legyen p.

A priori és prediktív eloszlás

A Bayes-becslés elkészítéséhez az alábbi fogalmakra lesz szükség.

A θ paramétert valószínűségi változónak tekintjük. Ennek segítségével építjük be az előzetes információkat. A választás tetszőleges lehet, de ettől függni fog a becslés is.

Θ az ismeretlen ϑ paraméter összes lehetséges értékéből álló halmaz.

A priori eloszlás: eloszlás a Θ paramétertéren, sűrűségfüggvénye legyen p.

Prediktív eloszlás: a minta eloszlása az a priori eloszlás alapján, feltétel nélkül (kisorsoljuk ϑ-t, majd a mintát a ϑ-hoz tartozó eloszlásból.

Sűrűségfüggvénye a teljes valószínűség tételének egy folytonos analógiájával:

$$f_p(x) = \int_\Theta f_\vartheta(x) p(\vartheta) d\vartheta,$$

ahol f_ϑ a minta sűrűségfüggvénye a ϑ paraméter mellett.

Ha a megfigyelések diszkrétek, akkor $f_\vartheta(x)$ helyett $\mathbb{P}_\vartheta(X = x)$ (ugyanúgy, mint a likelihood-függvénynél). A prediktív eloszlás a paramétertől nem függ.

A posteriori eloszlás

A posteriori eloszlás: amikor megfigyeljük a mintát, a paraméterről kapunk információt. Erre feltételes valószínűséget számolva bizonyos paramétertartományok valószínűbbek, mások kevésbe valószínűek lesznek, mint az előzetes, a priori eloszlás esetében.

Az a posterori eloszlás azt adja meg, hogy a minta megfigyelt értékeire feltételesen mi lesz a ϑ paraméter eloszlása a Θ paramétertéren. Sűrűségfüggvénye a Bayes-tétel analógiája szerint:

$$p^*(\vartheta|\underline{X} = \underline{x}) = \frac{L_\vartheta(x_1, \dots, x_n)p(\vartheta)}{L_p(x_1, \dots, x_n)},$$

ahol L_ϑ a likelihood-függvény ϑ mellett, $\underline{X}$ a minta, $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ a megfigyelt értékek, L_p pedig az f_p-ből számolt likelihood-függvény: $L_p(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^n f_p(x_j)$, ahol $f_p(x) = \int_\Theta f_\vartheta(x)p(\vartheta)d\vartheta$.

A priori és a posteriori eloszlás: példa.

Egy érmével dobva n dobásból k írás lett. Az írások száma legyen Y. Az írás (I) valószínűsége ϑ. Az **a priori eloszlás** legyen $\mathrm{Beta}(3,3)$ a $\Theta = [0,1]$ paramétertéren. Sűrűségfüggvénye az 1. definíció alapján:

$$p(x) = \frac{5!}{2! \cdot 2!} x^2 (1-x)^2 \mathbb{I}(0 \le x \le 1) = 30 x^2 (1-x)^2 \mathbb{I}(0 \le x \le 1).$$

A priori és a posteriori eloszlás: példa.

Egy érmével dobva n dobásból k írás lett. Az írások száma legyen Y. Az írás (I) valószínűsége ϑ. Az **a priori eloszlás** legyen $\mathrm{Beta}(3,3)$ a $\Theta = [0,1]$ paramétertéren. Sűrűségfüggvénye az 1. definíció alapján:

$$p(x) = \frac{5!}{2! \cdot 2!} x^2 (1-x)^2 \mathbb{I}(0 \leq x \leq 1) = 30x^2(1-x)^2 \mathbb{I}(0 \leq x \leq 1).$$

Prediktív eloszlás: annak valószínűsége, hogy írást dobunk egy dobásnál. Ha a paraméter ϑ, akkor ez éppen ϑ valószínűséggel történik. A teljes valószínűség tételének egy folytonos változatát alkalmazhatjuk:

$$\mathbb{P}_p(I) = \int_\Theta \mathbb{P}_\vartheta(I) p(\vartheta) d\vartheta = \int_0^1 \vartheta \cdot p(\vartheta) d\vartheta = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Itt $\mathbb{P}_\vartheta(I)$ az írás dobás valószínűsége, ha az igazi paraméter ϑ, ez definíció szerint ϑ.

A priori és a posteriori eloszlás: példa

A posteriori eloszlás: feltéve, hogy n dobásból k írás lett, mi a ϑ paraméter eloszlása a $[0,1]$ intervallumon?

Ha a paraméter ϑ rögzített, akkor az írás dobások száma binomiális eloszlású.

A nevezőben a prediktív eloszlás szerint számolhatunk: ott is binomiális eloszlás jelenik meg, $1/2$ paraméterrel.

$$
\begin{aligned}
p^*(\vartheta | Y = k) &= \frac{L_\vartheta(x_1, \ldots, x_n) p(\vartheta)}{L_p(x_1, \ldots, x_n)} = \frac{\mathbb{P}_\vartheta(Y = k) p(\vartheta)}{\mathbb{P}_p(Y = k)} = \\
&= \frac{\binom{n}{k} \vartheta^k (1-\vartheta)^{n-k} \cdot 30 \cdot \vartheta^2 (1-\vartheta)^2}{\binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-k}} = \\
&= 30 \cdot 2^n \cdot \vartheta^{k+2} (1-\vartheta)^{n-k+2}.
\end{aligned}
$$

A priori és a posteriori eloszlás: példa

A posteriori eloszlás: feltéve, hogy n dobásból k írás lett, mi a ϑ paraméter eloszlása a $[0,1]$ intervallumon?

Ha a paraméter ϑ rögzített, akkor az írás dobások száma binomiális eloszlású.

A nevezőben a prediktív eloszlás szerint számolhatunk: ott is binomiális eloszlás jelenik meg, $1/2$ paraméterrel.

$$\begin{aligned}
p^*(\vartheta|Y=k) &= \frac{L_\vartheta(x_1,\dots,x_n)p(\vartheta)}{L_p(x_1,\dots,x_n)} = \frac{\mathbb{P}_\vartheta(Y=k)p(\vartheta)}{\mathbb{P}_p(Y=k)} = \\
&= \frac{\binom{n}{k}\vartheta^k(1-\vartheta)^{n-k}\cdot 30\cdot\vartheta^2(1-\vartheta)^2}{\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-k}} = \\
&= 30\cdot 2^n\cdot\vartheta^{k+2}(1-\vartheta)^{n-k+2}.
\end{aligned}$$

Az a posteriori eloszlás Beta-eloszlás $a=k+3$ és $b=n-k+3$ paraméterekkel. Ha például $k<n/2$, azaz a dobások kevesebb mint fele lett írás, akkor az a posteriori sűrűségfüggvény is az $1/2$-nél kisebb tartományon lesz nagyobb.

Veszteségfüggvény és Bayes-becslés

A Bayes-becslésnél is meg kell választani, hogy milyen szempont szerint legyen optimális a becsült érték.

Veszteségfüggvény: a veszteség, ha az igazi ϑ paraméter helyett annak $\hat{\vartheta}$ becslését használjuk, ez $W(\vartheta, \hat{\vartheta})$. Ez nemnegatív, $\vartheta - \hat{\vartheta}$ függvénye, például $(\vartheta - \hat{\vartheta})^2$ vagy $|\vartheta - \hat{\vartheta}|$.

Definíció

A $\vartheta \in \Theta$ paraméter Bayes-becslése az a $\hat{\vartheta} = T(X_1, \ldots, X_n)$ becslés, melyre az

$$R_Q(T) = \mathbb{E}_\vartheta\big(\mathbb{E}(W(T(X_1, \ldots, X_n), \vartheta))\big)$$

a priori bayesi rizikó minimális.

Vagyis a cél olyan $T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ statisztika keresése, melyre a becslés hibájából adódó veszteség várható értéke a lehető legkisebb. A várható érték a megfigyelésekre és a paraméter sorsolására is vonatkozik.

Négyzetes veszteségfüggvény

Abban a speciális esetben, amikor a négyzetes veszteségfüggvényt használjuk, általánosan is megfogalmazható, hogy hogyan találhatjuk meg az optimális becslést. Erről szól az alábbi tétel.

Tétel

Ha a $W(x, y) = (x - y)^2$ négyzetes veszteségfüggvényt használjuk, akkor a paraméter $g(\vartheta)$ függvényének Bayes-becslése az a g várható értéke az a posteriori eloszlás szerint:

$$\widehat{g(\vartheta)} = \int_\Theta g(\vartheta) p^*(\vartheta | \underline{X} = \underline{x}) d\vartheta.$$

Bayes-becslés: példa

Egy érmével dobva n dobásból k írás lett. Az írások száma legyen Y. Az írás (I) valószínűsége ϑ.

Az **a priori eloszlás** legyen $\mathrm{Beta}(3,3)$-eloszlás a $\Theta = [0,1]$ paramétertéren, mint eddig. Sűrűségfüggvénye:

$$p(x) = 30x^2(1-x)^2\mathbb{I}(0 \leq x \leq 1).$$

Azt láttuk korábban, hogy az **a posteriori eloszlás** beta-eloszlás $a = k+3$ és $b = n-k+3$ paraméterekkel.

$W(x,y) = (x-y)^2$ négyzetes veszteségfüggvény esetén a ϑ paraméter becslése a tétel szerint az a posteriori eloszlás várható értéke:

$$\hat{\vartheta} = \int_\Theta \vartheta \cdot p^*(\vartheta | \underline{X} = \underline{x}) d\vartheta = \int_0^1 \vartheta \cdot p^*(\vartheta | \underline{X} = \underline{x}) d\vartheta = \int_0^1 \vartheta \cdot 30 \cdot 2^n \cdot \vartheta^{k+2}(1-\vartheta)^{n-}$$
$$= \frac{k+3}{(k+3)+(n-k+3)} = \frac{k+3}{n+6},$$

hiszen éppen az $a = k+3$ és $b = n-k+3$ paraméterű beta-eloszlás várható értéke jelent meg, amire pedig használhatjuk a 3. állítást.

Bayes-becslés: példa

Tehát például ha $n = 10$ dobásból $k = 0$ írás van, és $\mathrm{Beta}(3,3)$ az a priori eloszlás, akkor

$$\hat{\vartheta} = \frac{3}{16} = 18,8\%.$$

Ha $n = 100$ dobásból $k = 0$ írás van, akkor

$$\hat{\vartheta} = \frac{3}{106} = 2,8\%.$$

Ugyanezen feltételek mellett, ha $n = 100$ dobásból $k = 32$ írás van, akkor

$$\hat{\vartheta} = \frac{35}{106} = 33\%.$$

Ez nincs messze a relatív gyakoriságtól (32%), viszont 0 írás dobás esetén is pozitív becslést kapunk, amiben benne van a mintaelemek száma.

Bayes-becslés: példa

A becslésünk **függ az a priori eloszlástól**. Ha $\mathrm{Beta}(\alpha, \beta)$ a priori eloszlást használunk, akkor

$$\hat{\vartheta} = \int_{\Theta} \vartheta \cdot p^*(\vartheta | \underline{X} = \underline{x}) d\vartheta = \int_0^1 \vartheta \cdot p^*(\vartheta | \underline{X} = \underline{x}) d\vartheta = \frac{k + \alpha}{n + \alpha + \beta}.$$

Ez más α, β-ra tipikusan különböző eredményt ad.

Bayes-becslés: példa

A becslésünk **függg az a priori eloszlástól**. Ha $\mathrm{Beta}(\alpha, \beta)$ a priori eloszlást használunk, akkor

$$\hat{\vartheta} = \int_{\Theta} \vartheta \cdot p^*(\vartheta | \underline{X} = \underline{x}) d\vartheta = \int_0^1 \vartheta \cdot p^*(\vartheta | \underline{X} = \underline{x}) d\vartheta = \frac{k + \alpha}{n + \alpha + \beta}.$$

Ez más α, β-ra tipikusan különböző eredményt ad.

Példa arra, amikor téves előzetes feltevés rossz eredményre vezet. Tegyük fel, hogy

- a priori eloszlás az írás valószínűségére: $Beta(2000, 200)$
- ennek várható értéke $2000/2200 = 0,91$, tehát előzetesen sokkal valószínűbbnek tekintjük az írás dobást, mint a fejet
- tegyük fel, hogy $n = 100$ dobásból egy írás sem volt

Bayes-becslés: példa

A becslésünk **függ az a priori eloszlástól**. Ha $\mathrm{Beta}(\alpha, \beta)$ a priori eloszlást használunk, akkor

$$\hat{\vartheta} = \int_{\Theta} \vartheta \cdot p^*(\vartheta | \underline{X} = \underline{x}) d\vartheta = \int_0^1 \vartheta \cdot p^*(\vartheta | \underline{X} = \underline{x}) d\vartheta = \frac{k + \alpha}{n + \alpha + \beta}.$$

Ez más α, β-ra tipikusan különböző eredményt ad.

Példa arra, amikor téves előzetes feltevés rossz eredményre vezet. Tegyük fel, hogy

- a priori eloszlás az írás valószínűségére: $Beta(2000, 200)$
- ennek várható értéke $2000/2200 = 0,91$, tehát előzetesen sokkal valószínűbbnek tekintjük az írás dobást, mint a fejet
- tegyük fel, hogy $n = 100$ dobásból egy írás sem volt
- $k = 0$, és így

$$\hat{\vartheta} = \frac{2000}{100 + 2000 + 200} = 0,87.$$

Vagyis a 100 dobás nem volt elég arra, hogy az előzetes feltételezésünk hibáját korrigálja.

Bayes-becslés a normális eloszlásra

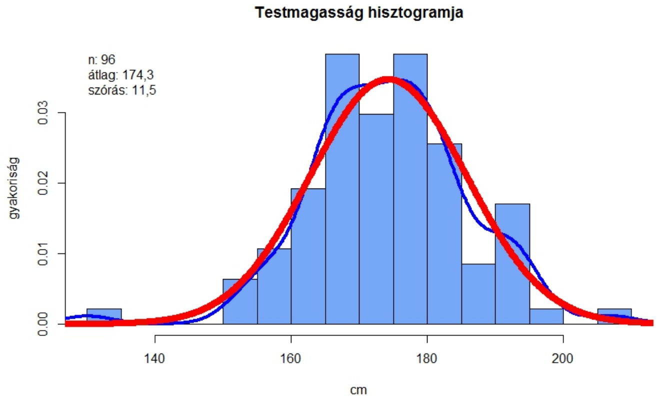
- tegyük fel, hogy az emberek testmagassága normális eloszlású, várható értéke m ismeretlen paraméter, szórása $s = 10$
- az m paraméterről tegyük fel, hogy az a priori eloszlása normális, várható értéke μ, szórása σ
- célunk, hogy meghatározzuk az m paraméter Bayes-becslését egy valós mintából (ez μ-nek és σ-nak egy függvénye lesz).
- az eloszlás sűrűségfüggvénye, ha a paraméter m:

$$f_m(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 10} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{200} \right).$$

- a priori sűrűségfüggvény az m-re:

$$p(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \exp\left(-\frac{(m-\mu)^2}{2\sigma^2} \right).$$

Testmagasság hisztogramja



A testmagasság hisztogramja $n = 96$ elemű mintából és az $\overline{X} = 174,3$ várható értékű és $s_n^* = 11,5$ szórású normális eloszlás sűrűségfüggvénye (pirossal).

A posteriori eloszlás a normális eloszlásra

Az a posteriori eloszlás sűrűségfüggvénye (itt L_m a likelihood-függvény, f_p a prediktív eloszlás sűrűségfüggvénye, és az m-től nem függő részeket nem számoljuk ki)

$$p^*(m|\underline{X}=\underline{x}) = \frac{L_m(x_1,\ldots,x_n)p(m)}{f_p(x_1,\ldots,x_n)} =$$

$$= \frac{1}{f_p}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi 10}}\right)^n \exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^n (x_j-m)^2}{200}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(m-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) =$$

$$= C_{x_1,\ldots,x_n}\exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^n (x_j-m)^2\cdot\sigma^2+(m-\mu)^2\cdot 100}{200\cdot\sigma^2}\right) =$$

$$= C'_{x_1,\ldots,x_n}\exp\left(-\frac{m^2(\sigma^2 n+100)-2m(\sum_{j=1}^n x_j\sigma^2+100\mu)}{200\cdot\sigma^2}\right) =$$

$$= C'_{x_1,\ldots,x_n}\exp\left(-\frac{m^2-2m\frac{\sum_{j=1}^n x_j\sigma^2+100\mu}{\sigma^2 n+100}}{200\cdot\sigma^2\cdot(\sigma^2 n+100)}\right) =$$

$$= C''_{x_1,\ldots,x_n}\exp\left(-\frac{\left(m-\frac{\sum_{j=1}^n x_j\sigma^2+100\mu)}{\sigma^2 n+100}\right)^2}{200\cdot\sigma^2\cdot(\sigma^2 n+100)}\right)$$

Bayes-becslés a normális eloszlásra

Az a posteriori eloszlás egy olyan normális eloszlás, melynek várható értéke

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} x_j \sigma^2 + 100\mu}{\sigma^2 n + 100},$$

szórása

$$10\sigma\sqrt{\sigma^2 n + 100}.$$

Bayes-becslés a normális eloszlásra

Az a posteriori eloszlás egy olyan normális eloszlás, melynek várható értéke

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} x_j\sigma^2 + 100\mu}{\sigma^2 n + 100},$$

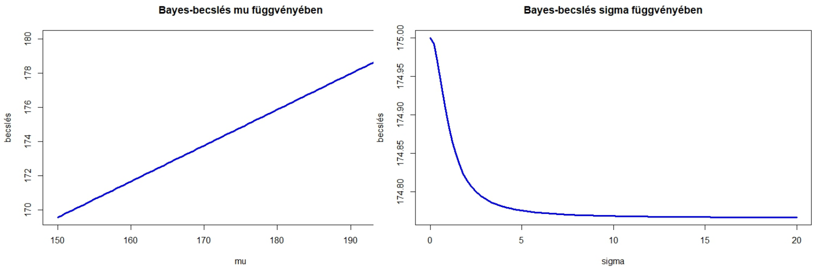
szórása

$$10\sigma\sqrt{\sigma^2 n + 100}.$$

Négyzetes veszteségfüggvény esetén a Bayes-becslés az a posteriori eloszlás várható értéke, vagyis (az $x_1, \ldots, x_n$ megfigyelt értékek helyére a mintát visszaírva)

$$\hat{m} = \frac{\sum_{j=1}^{n} X_j\sigma^2 + 100\mu}{\sigma^2 n + 100} = \frac{\sum_{j=1}^{n} X_j + 100\frac{\mu}{\sigma^2}}{n + \frac{100}{\sigma^2}}.$$

Bayes-becslés: példa



Bayes-becslés a várható értékre μ és σ függvényében, ahol az a priori eloszlás $N(\mu, 2^2)$ az első esetben és $N(175, \sigma^2)$ a második esetben

Bayes-becslés a normális eloszlás várható értékére

- Az adatsor $n = 94$ ember testmagasságából állt, mintaátlag 174,77 cm.
- Az első ábrán azt láthatjuk, hogy hogyan változik $\hat{m}$, azaz a várható érték becslése, ha az a priori eloszlás paramétereit, a μ várható értéket és a σ szórást változtatjuk.

Bayes-becslés a normális eloszlás várható értékére

- Az adatsor $n = 94$ ember testmagasságából állt, mintaátlag 174,77 cm.
- Az első ábrán azt láthatjuk, hogy hogyan változik $\hat{m}$, azaz a várható érték becslése, ha az a priori eloszlás paramétereit, a μ várható értéket és a σ szórást változtatjuk.
- A becslés az m-nek pozitív együtthatós lineáris függvénye. Vagyis minél nagyobb μ, vagyis előzetesen minél nagyobbnak feltételezzük az m-et, annál nagyobb lesz az m becslése is.

Bayes-becslés a normális eloszlás várható értékére

- Az adatsor $n = 94$ ember testmagasságából állt, mintaátlag 174,77 cm.
- Az első ábrán azt láthatjuk, hogy hogyan változik $\hat{m}$, azaz a várható érték becslése, ha az a priori eloszlás paramétereit, a μ várható értéket és a σ szórást változtatjuk.
- A becslés az m-nek pozitív együtthatós lineáris függvénye. Vagyis minél nagyobb μ, vagyis előzetesen minél nagyobbnak feltételezzük az m-et, annál nagyobb lesz az m becslése is.
- A szórást változtatva, ha $\sigma \to 0$, akkor a tört első alakjából látszik, hogy $\hat{m}$ limesze μ lesz, vagyis ilyenkor a becslés a minta értékeitől függetlenül az a priori várható érték lesz lényegében. Ez figyelhető meg az ábrán is. Ha $\sigma \to \infty$, akkor pedig a tört második alakjából látható, hogy a limesz az átlag lesz (a számlálóban és a nevezőben is a második tag határértéke 0, és csak az összeg, illetve a mintaelemszám marad).
- A frekventista hozzáállással a becslés (például a maximumlikelihood-becslés) az átlag lett volna. Ezt tehát $\sigma \to \infty$ esetén kapnánk meg, vagy akkor, ha ugyan μ és σ rögzítettek, de a mintaelemszám végtelenhez tart.

Házi feladat április 11., kedd, 12:00-ig

Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független azonos eloszlású valószínűségi változók, Poisson-eloszlással, úgy, hogy a paraméterük, $\lambda > 0$ ismeretlen. Adjuk meg a λ paraméter Bayes-becslését, ha az a priori eloszlás exponenciális eloszlás a paraméterrel.

Generáljunk egy 1000 elemű mintát 2 paraméterű exponenciális eloszlásból (R-ben), és ábrázoljuk a Bayes-becslést az a paraméter függvényében.