

## Házi feladat március 28., hétfő, 10:30-ig

Tegyük fel, hogy egy biztosító minden ügyfeléről azt feltételezi, hogy az általa egy év alatt okozott balesetek száma Poisson-eloszlású, paramétere pedig az ügyfélre jellemző  $\lambda$ , mely egy ügyfelet tekintve egyenletes eloszlású a  $[0, 1]$  intervallumon (ez az a priori eloszlás).

Adjunk Bayes-beclést a Péterre jellemző  $\lambda$  paraméterre, ha Péter az utóbbi tíz évben pontosan  $k$  balesetet okozott. Ábrázoljuk a becslést  $k = 0, 1, 2, \dots, 10$ -re  $k$  függvényében. (Segítség: a  $k = 0$  eset kidolgozva megtalálható a moodle-be feltöltött jegyzetben.)

## Házi feladat március 28., hétfő, 10:30-ig

Független Poisson-eloszlások összege Poisson-eloszlás, és a paraméterek összeadódnak. Ezért a tíz év alatt okozott balesetek száma  $10\lambda$  paraméterű Poisson-eloszlás. Legyen  $A_k$  az az esemény, hogy Péter pontosan  $k$  balesetet okozott. Ekkor

$$\mathbb{P}(A_k | \lambda = s) = \frac{(10s)^k}{k!} e^{-10s}.$$

A Bayes-tétel (folytonos változata) most ezt adja:

$$p^*(s | A_k) = \frac{\mathbb{P}(A_k | \lambda = s) p(s)}{\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(A_k | \lambda = t) p(t) dt},$$

ahol  $p$  a paraméter a priori sűrűségfüggvénye. A példában  $p(t) = \mathbb{I}(0 \leq t \leq 1)$ , hiszen azt tettük fel előzetesen, hogy  $t$  egyenletes eloszlású a  $[0, 1]$  intervallumon.

## Házi feladat március 28., hétfő, 10:30-ig

Behelyettesítve megkapjuk az a posteriori eloszlás sűrűségfüggvényét:

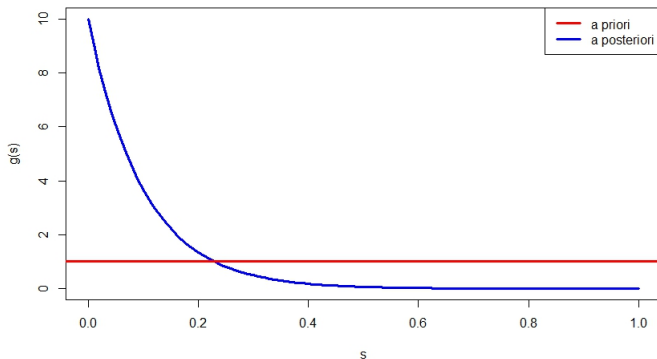
$$p^*(s|A_k) = \frac{\mathbb{P}(A_k|\lambda = s)p(s)}{\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(A_k|\lambda = t)p(t)dt} = \frac{\frac{(10s)^k}{k!} \cdot e^{-10s}\mathbb{I}(0 \leq s \leq 1)}{\int_0^1 (10t)^k e^{-10t} dt} = C \cdot s^k e^{-10s}.$$

Vagyis a megfigyelések alapján  $s$ -t olyan eloszlásúnak gondolhatjuk, aminek ez a fenti függvény a sűrűségfüggvénye.

A Bayes-bebecslés ennek várható értéke:

$$\hat{p} = \int_0^1 C s^{k+1} e^{-10s} ds.$$

## Házi feladat március 28., hétfő, 10:30-ig



ábra: A  $\lambda$  paraméter a priori és a posteriori sűrűségfüggvénye

A 1. ábrán láthatjuk az a priori és a posteriori sűrűségfüggvényt a  $k = 0$  esetben.

## Házi feladat március 28., hétfő, 10:30-ig

Ebben az esetben becslést is adhatunk (később látni fogjuk, hogy ez milyen szempontból jó becslés). Ugyanis kiszámíthatjuk az a posteriori eloszlás várható értékét, parciális integrálás segítségével:

$$\hat{\lambda} = \int_0^1 sp^*(s|A) ds = \int_0^1 s \cdot \frac{e^{-10s}}{\frac{1}{10}(1 - e^{-10})} ds = 0,1.$$

Tehát a Bayes-módszerrel kapott becslés értéke  $\hat{p} = 0,1$ .

# Konfidenciaintervallum

Példa: megmérték hatvan ember vércukorszintjét, egymástól függetlenül.

A minta egy részlete (mmol/l mértékegységben):

5,98      6,1      5,99      6,21      5,97      6,23      ...      5,85

Alapstatisztikák:  $n = 60$  (méret),  $\bar{X} = 5,99$  (átlag),  $s_n^* = 0,18$  (korrigált tapasztalati szórás)

# Konfidenciaintervallum

Példa: megmérték hatvan ember vércukorszintjét, egymástól függetlenül.

A minta egy részlete (mmol/l mértékegységben):

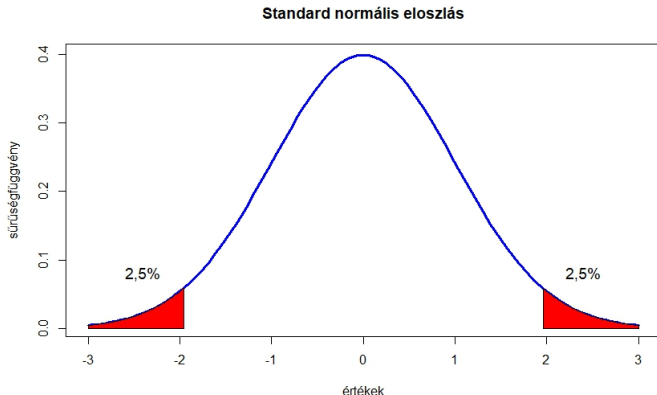
5,98      6,1      5,99      6,21      5,97      6,23      ...      5,85

Alapstatisztikák:  $n = 60$  (méret),  $\bar{X} = 5,99$  (átlag),  $s_n^* = 0,18$  (korrigált tapasztalati szórás)

Cél: a várható érték becslése az adatok alapján

pontosabban: adjunk meg egy olyan intervallumot, ami legalább 95% valószínűséggel tartalmazza az "igazi" várható értéket – ezt fogjuk **95 % megbízhatósági szintű konfidenciaintervallumnak** hívni

# A kétoldali z-próba kritikus értéke



Az  $\alpha = 0,05$  terjedelmű kétoldali z-próba ( $u$ -próba) kritikus értéke:  
 $\Phi^{-1}(1 - \alpha/2) = \Phi^{-1}(0,975) = 1,96$ . Vagyis ha  $Z \sim N(0, 1)$ , akkor  
 $\mathbb{P}(-1,96 \leq Z \leq 1,96) = 95\%$ .

## Konfidenciaintervallum a várható értékre

$$(T_1, T_2) = \left( \bar{X} - \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_m(T_1 \leq m \leq T_2) &= \mathbb{P}_m\left(m - \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} \leq m + \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \mathbb{P}_m\left(-\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \leq \frac{\bar{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right) = \\ &= 2\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) - 1 = 1 - \alpha, \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy mivel  $X_1, \dots, X_n$  független  $N(m, \sigma^2)$  eloszlásúak, így  $\bar{X} \sim N(m, \sigma^2/n)$  eloszlású. Ezért  $Z = (\bar{X} - m)/(\sigma/\sqrt{n})$  standard normális eloszlású, vagyis

$$\mathbb{P}(-a \leq Z \leq a) = \Phi(a) - \Phi(-a) = \Phi(a) - (1 - \Phi(a)) = 2\Phi(a) - 1.$$

## Példa konfidenciaintervallumra

Minta: megmértük hatvan ember vércukorszintjét, tegyük fel, hogy ez **normális eloszlású, valódi szórása 0,2**.

$n = 60$  (méret),  $\bar{X} = 5,99$  (átlag),  $s_n^* = 0,18$  (korrigált tapasztalati szórás)

Adjunk meg olyan intervallumot, ami legalább 95% valószínűséggel tartalmazza a vércukorszint valódi várható értékét.

megbízhatósági szint:  $1 - \alpha = 95\%$ , azaz  $\alpha = 0,05$ . Ebből  $\Phi^{-1}(1 - \alpha/2) = \Phi^{-1}(0,975) = 1,96$ .

**95 %-os megbízhatósági szintű konfidenciaintervallum a várható értékre:**

$$\left( 5,99 - 1,96 \cdot \frac{0,2}{\sqrt{60}}, 5,99 + 1,96 \cdot \frac{0,2}{\sqrt{60}} \right) = (5,94; 6,04).$$

Kisebb mintaelemszámhoz hosszabb, nagyobb megbízhatósághoz szintén hosszabb konfidenciaintervallum tartozik.

# Konfidenciaintervallumok

Legyen  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  statisztikai mező,  $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$  és  $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$  független azonos eloszlású minta. Tegyük fel, hogy  $\vartheta$  valós paraméter, vagyis  $\Theta \subseteq \mathbb{R}$ .

## Definíció

Azt mondjuk, hogy a  $(T_1(\underline{X}), T_2(\underline{X}))$  intervallum legalább  $1 - \alpha$  megbízhatósági szintű konfidenciaintervallum  $\vartheta$ -ra, ha minden  $\vartheta \in \mathbb{R}$  esetén teljesül, hogy

$$\mathbb{P}_\vartheta(T_1(\underline{X}) < \vartheta < T_2(\underline{X})) \geq 1 - \alpha.$$

A konfidenciaintervallum megbízhatósági szintje:  $\inf_{\vartheta \in \Theta} \{\mathbb{P}_\vartheta(\vartheta \in (T_1, T_2))\}$ .

## Konfidenciaintervallum a várható értékre

A  $\Phi$  a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye, azaz ha  $Z \sim N(0, 1)$ :

$$\Phi(t) = \mathbb{P}(Z \leq t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-s^2/2} ds.$$

Állítás (Konfidenciaintervallum a várható értékre, **ismert szórás**)

Tegyük fel, hogy  $X_1, \dots, X_n$  független azonos eloszlású **normális eloszlású** valószínűségi változók, melyek szórása,  $\sigma$  ismert.

Ekkor a

$$(T_1, T_2) = \left( \bar{X} - \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

intervallum  $1 - \alpha$  megbízhatósági szintű **kétoldali konfidenciaintervallum** az eloszlás várható értékére.

## Fisher–Bartlett-tétel

Valójában az eloszlás valódi szórása a legtöbb esetben nem ismert. A  $\sigma$  szórást az  $s_n^*$  korrigált tapasztalati szórással helyettesítjük. Kérdés, hogyan változik így az eloszlás.

### Tétel (Fisher–Bartlett)

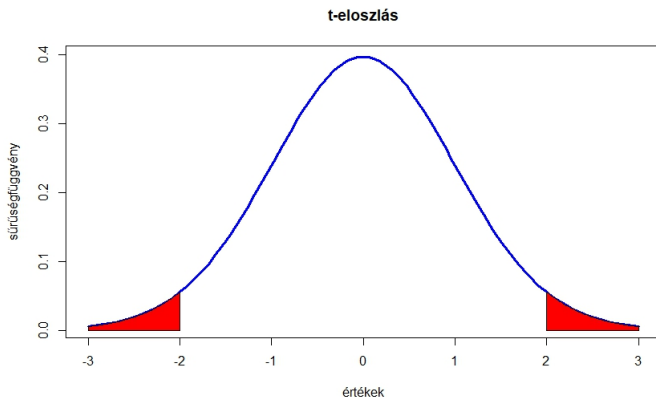
Tegyük fel, hogy  $X_1, X_2, \dots, X_n$  független  $m$  várható értékű,  $\sigma$  szórású, **normális eloszlású** valószínűségi változók. Ekkor

- 1  $\bar{X} \sim N(m, \frac{\sigma^2}{n})$ ;
- 2  $\bar{X}$  és  $s_n^*$  függetlenek;
- 3  $(n-1)s_n^{*2}/\sigma^2$  eloszlása  $n-1$  szabadsági fokú  $\chi^2$ -eloszlás;
- 4  $\frac{\bar{X}-m}{s_n^*} \cdot \sqrt{n}$  eloszlása  $n-1$  szabadsági fokú  $t$ -eloszlás.

Itt

$$s_n^* = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2} = \sqrt{\frac{n}{n-1} \left( \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^2 \right) - \bar{X}^2 \right)}.$$

## $t$ -eloszlás kritikus értékei



Az  $f = 59$  szabadsági fokú  $\alpha = 0,05$  terjedelmű kétoldali  $t$ -próba kritikus értéke:  
 $t_{59,0,05} = 2,001$ .

## Konfidenciaintervallum a várható értékre

Legyenek  $Z_0, Z_1, \dots, Z_n$  független  $N(0, 1)$  eloszlásúak, és  $t_{f, \alpha}$  az  $f$  szabadsági fokú  $\alpha$  terjedelmű kétoldali  $t$ -próba kritikus értéke, azaz az  $f$  szabadsági fokú  $t$ -eloszlás  $1 - \alpha/2$ -kvantilise:

$$1 - \alpha/2 = \mathbb{P}(Y \leq t_{f, \alpha}) = \mathbb{P}\left(\frac{Z_0}{\sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_f^2}} \leq t_{f, \alpha}\right).$$

Az  $Y = \frac{Z_0}{\sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_f^2}}$  valószínűségi változó eloszlása  $f$  szabadsági fokú  **$t$ -eloszlás**.

## Konfidenciaintervallum a várható értékre

Legyenek  $Z_0, Z_1, \dots, Z_n$  független  $N(0, 1)$  eloszlásúak, és  $t_{f, \alpha}$  az  $f$  szabadsági fokú  $\alpha$  terjedelmű kétoldali  $t$ -próba kritikus értéke, azaz az  $f$  szabadsági fokú  $t$ -eloszlás  $1 - \alpha/2$ -kvantilise:

$$1 - \alpha/2 = \mathbb{P}(Y \leq t_{f, \alpha}) = \mathbb{P}\left(\frac{Z_0}{\sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_f^2}} \leq t_{f, \alpha}\right).$$

Az  $Y = \frac{Z_0}{\sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_f^2}}$  valószínűségi változó eloszlása  $f$  szabadsági fokú  **$t$ -eloszlás**.

### Állítás (Konfidenciaintervallum a várható értékre, ismeretlen szórás)

Tegyük fel, hogy  $X_1, \dots, X_n$  független  $N(m, \sigma^2)$  normális eloszlású valószínűségi változók ( $m, \sigma$  ismeretlenek). Ekkor a

$$(T_1, T_2) = \left( \bar{X} - t_{n-1, \alpha} \cdot \frac{S_n^*}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{n-1, \alpha} \cdot \frac{S_n^*}{\sqrt{n}} \right)$$

intervallum  $1 - \alpha$  megbízhatósági szintű **kétoldali konfidenciaintervallum** az eloszlás várható értékére.

## Példa konfidenciaintervallumra

Minta: vércukorszint-értékek, tegyük fel, hogy ez **normális eloszlású**, szórása nem ismert.

$n = 60$  (méret),  $\bar{X} = 5,99$  (átlag),  $s_n^* = 0,18$  (korigált tapasztalati szórás)

Adjunk meg olyan intervallumot, ami legalább 95% valószínűséggel tartalmazza a vércukorszint valódi várható értékét.

megbízhatósági szint:  $1 - \alpha = 95\%$ , azaz  $\alpha = 0,05$ . Az  $f = 59$  szabadsági fokú  $\alpha = 0,05$  terjedelmű kétoldali  $t$ -próba kritikus értéke:  $t_{59,0,975} = 2$ .

**95 %-os megbízhatósági szintű konfidenciaintervallum a várható értékre:**

$$\left( 5,99 - 2 \cdot \frac{0,18}{\sqrt{60}}, 5,99 + 2 \cdot \frac{0,18}{\sqrt{60}} \right) = (5,94; 6,04).$$

Hosszabb intervallumot kaptunk, mint ismert szórás esetén.

# Egyoldali konfidenciaintervallum a várható értékre

## Állítás (Egyoldali konfidenciaintervallum)

Tegyük fel, hogy  $X_1, \dots, X_n$  független  $N(m, \sigma^2)$  normális eloszlású valószínűségi változók ( $m, \sigma$  ismeretlenek). Ekkor a

$$\left( -\infty, \bar{X} + \bar{t}_{n-1, 1-\alpha} \cdot \frac{s_n^*}{\sqrt{n}} \right)$$

intervallum  $1 - \alpha$  megbízhatósági szintű **egyoldali konfidenciaintervallum** az eloszlás várható értékére.

Itt  $\bar{t}_{n-1, 1-\alpha/2}$  az  $f = n-1$  szabadsági fokú  $\alpha$  terjedelmű **egyoldali  $t$ -próba** kritikus értéke.

## Konfidenciaintervallum a szórásra

Fisher–Bartlett-tétel:

$$\frac{(n-1)s_n^{*2}}{\sigma^2} = \frac{\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2,$$

azaz a hányados eloszlása  $n-1$  szabadsági fokú  $\chi^2$ -eloszlás (ami megegyezik  $Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_{n-1}^2$  eloszlásával, ahol  $Z_j$ -k független standard normális eloszlásúak).

### Állítás

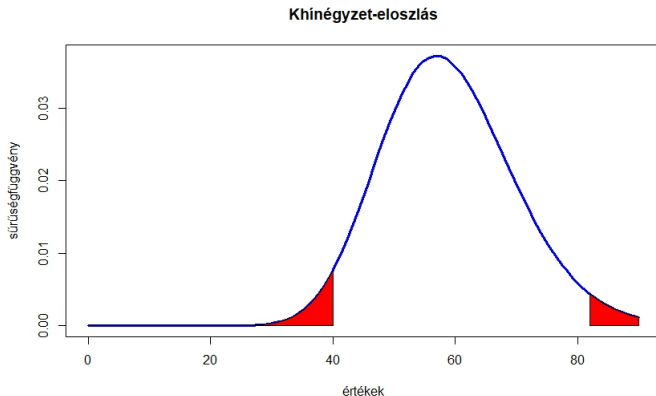
*Legyen  $X_1, X_2, \dots, X_n$  független normális eloszlású minta. Ekkor az eloszlás  $\sigma^2$  szórásnégyzetére  $1 - \alpha$  megbízhatósági szintű konfidenciaintervallum az alábbi:*

$$(T_1, T_2) = \left( \frac{\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2}{c_{n-1, 1-\alpha/2}}; \frac{\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2}{c_{n-1, \alpha/2}} \right),$$

*ahol  $c_{f,q}$  az  $f$ -szabadsági fokú  $q$  terjedelmű  $\chi^2$ -próba kritikus értéke, azaz az  $f$  szabadsági fokú  $\chi^2$ -eloszlás  $q$ -kvantilise.*

Ezzel a választással nem a legrövidebb intervallumot kapjuk.

# A $\chi^2$ -eloszlás kvantilisei



Az  $f = 59$  szabadsági fokú  $\chi^2$ -próba kvantilisei  $q = \alpha/2 = 0,025$ -tel és  $q = 1 - \alpha/2 = 0,975$ -tel.

## Konfidenciaintervallum a valószínűsége

Az  $A$  esemény valószínűsége  $p \in [0, 1]$  ismeretlen paraméter. Ezt szeretnénk megbecsülni. Ha  $n$  kísérletből az  $A$  esemény  $X$ -szer következett be:

$$\mathbb{E}_p(X) = np; \quad D_p(X) = \sqrt{np(1-p)}; \quad \mathbb{E}_p\left(\frac{X}{n}\right) = p; \quad D_p\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}.$$

$X \sim \text{Bin}(n, p)$  binomiális eloszlású, viszont a relatív gyakoriságot,  $X/n$ -t nem tudjuk egyetlen eloszlással közelíteni.

Ezért  $X/n$  eloszlását  $\hat{p}$  várható értékű,  $\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{\sqrt{n}}$  szórású normális eloszlással közelítjük, ahol  $\hat{p}$  az esemény relatív gyakorisága a mintában.

$1 - \alpha$  megbízhatósági szintű konfidenciaintervallum  $p$ -re:

$$\left( \hat{p} - \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}}; \hat{p} + \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}} \right).$$

## Konfidenciaintervallum az ML-becslés alapján

Ha likelihoodfüggvény teljesít bizonyos regularitási feltételeket, akkor a  $\vartheta$  paraméternek az  $X_1, X_2, \dots, X_n$  mintából számolt  $\hat{\vartheta}_n$  maximumlikelihood-becslése

- létezik;
- aszimptotikusan torzítatlan:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\vartheta}(\hat{\vartheta}_n) = \vartheta$  minden  $\vartheta \in \Theta$ -ra;
- aszimptotikusan hatásos:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{nl_1(\vartheta)} D_{\vartheta}(\hat{\vartheta}_n) = 1$  minden  $\vartheta \in \Theta$ -ra;
- aszimptotikusan normális eloszlású:  $\sqrt{nl_1(\vartheta)}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta)$  eloszlásban tart a standard normális eloszláshoz minden  $\vartheta \in \Theta$ -ra  $n \rightarrow \infty$  esetén.

## Konfidenciaintervallum az ML-becslés alapján

Ha likelihoodfüggvény teljesít bizonyos regularitási feltételeket, akkor a  $\vartheta$  paraméternek az  $X_1, X_2, \dots, X_n$  mintából számolt  $\hat{\vartheta}_n$  maximumlikelihood-becslése

- létezik;
- aszimptotikusan torzítatlan:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\vartheta}(\hat{\vartheta}_n) = \vartheta$  minden  $\vartheta \in \Theta$ -ra;
- aszimptotikusan hatásos:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{nl_1(\vartheta)} D_{\vartheta}(\hat{\vartheta}_n) = 1$  minden  $\vartheta \in \Theta$ -ra;
- aszimptotikusan normális eloszlású:  $\sqrt{nl_1(\vartheta)}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta)$  eloszlásban tart a standard normális eloszláshoz minden  $\vartheta \in \Theta$ -ra  $n \rightarrow \infty$  esetén.

Ez alapján **aszimptotikus** konfidenciaintervallum, ami  $n \rightarrow \infty$  esetén  $1 - \alpha$ -hoz tartó valószínűséggel tartalmazza  $\vartheta$ -t:

$$\left( \hat{\vartheta}_n - \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\hat{l}_n(\vartheta)}}; \hat{\vartheta}_n + \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\hat{l}_n(\vartheta)}} \right),$$

ahol  $\hat{l}_n(\vartheta) = n \cdot l_1(\hat{\vartheta}_n)$ , vagyis a Fisher-információ kifejezésébe a maximumlikelihood-becslést írjuk be.

# Házi feladat április 4., hétfő., 10:30-ig

A házi feladathoz begyűjtött adatok alapján

- 1 adjunk 95%-os megbízhatósági szintű konfidenciaintervallumot annak valószínűségére, hogy valaki (a kérdezés időpontjától számolva) az elmúlt fél évben átesett koronavírus-fertőzésen;
- 2 bár az utazással töltött idő nem normális eloszlású, alkalmazzuk a képletet, és adjunk 95%-os megbízhatósági szintű konfidenciaintervallumot az utazási idő várható értékére. Mennyire reális az az eredmény, amit kaptunk?

# Hipotézisvizsgálat

Legyen  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  paraméteres statisztikai mező, azaz  $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$  valamilyen  $\Theta$  paraméterterrel. A paraméterteret bontsuk fel két diszjunkt halmaz uniójára:  $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$ , ahol tehát  $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$ .

**Nullhipotézis.**  $H_0 : \vartheta \in \Theta_0$ .

**Ellenhipotézis.**  $H_1 : \vartheta \in \Theta_1$ .

# Hipotézisvizsgálat

Legyen  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  paraméteres statisztikai mező, azaz  $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$  valamilyen  $\Theta$  paraméterterrel. A paraméterteret bontsuk fel két diszjunkt halmaz uniójára:  $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$ , ahol tehát  $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$ .

**Nullhipotézis.**  $H_0 : \vartheta \in \Theta_0$ .

**Ellenhipotézis.**  $H_1 : \vartheta \in \Theta_1$ .

A minta  $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ , a mintatér legyen  $B$  (vagyis  $(X_1, \dots, X_n)$  a  $B \subseteq \mathbb{R}^n$  halmaz egy véletlen eleme). A mintatérrel is felbontjuk két diszjunkt halmaz uniójára:  $B = B_0 \cup B_1$ , ahol  $B_0 \cap B_1 = \emptyset$ .

**Elfogadási tartomány:**  $B_0$ . Ha  $(X_1, \dots, X_n) \in B_0$ , akkor  $H_0$ -t elfogadjuk.

**Elutasítási (kritikus) tartomány:**  $B_1$ . Ha  $(X_1, \dots, X_n) \in B_1$ , akkor  $H_0$ -t elutasítjuk.

Tehát a nullhipotézist akkor fogadjuk el, ha a minta az elfogadási tartományba esik, különben elutasítjuk.

# Hipotézisvizsgálat

**Nullhipotézis (null hypothesis).**  $H_0 : \vartheta \in \Theta_0$ .

**Ellenhipotézis (alternative hypothesis).**  $H_1 : \vartheta \in \Theta_1$ .

- **Elsőfajú hibát** vétünk, ha  $H_0$  igaz, és elutasítjuk.
- A próba **szignifikanciaszintje vagy terjedelme** (level of significance):

$$\alpha = \sup_{\vartheta \in \Theta_0} \mathbb{P}_{\vartheta}(\underline{X} \in B_1).$$

- **Másodfajú hibát** vétünk, ha  $H_0$  nem igaz, és elfogadjuk.
- A próba **erőfüggvénye** az alábbi  $\beta : \Theta_1 \rightarrow [0, 1]$  függvény:

$$\beta(\vartheta) = \mathbb{P}_{\vartheta}(\underline{X} \in B_1) \quad (\vartheta \in \Theta_1).$$

# Hipotézisvizsgálat: $p$ -érték

## Definíció

*Egy hipotézisvizsgálati feladatban a  $p$ -érték ( $p$ -value) a legnagyobb olyan szignifikanciaszint, ami mellett  $H_0$ -t elfogadjuk.*

Vagyis ha  $\alpha$  a szignifikanciaszint, akkor

$p < \alpha$  esetén elutasítjuk  $H_0$ -t, szignifikáns eltérés  $H_0$ -tól.

$p \geq \alpha$  esetén elfogadjuk  $H_0$ -t, nincs szignifikáns eltérés  $H_0$ -tól, nem volt elég bizonyíték  $H_1$ -re.

A szokásos  $\alpha = 0,05$  értékkel:  $p < 0,05$  esetén **elutasítjuk a nullhipotézist, szignifikáns eltérés van**, különben elfogadjuk a nullhipotézist, nincs szignifikáns eltérés.

**Nagy mintaelemszám esetén kis eltérés is szignifikáns.** A próba ereje használható annak ellenőrzésére, hogy nem volt-e túl érzékeny az eljárás.

## Próbák tulajdonságai

- A próba **szignifikanciaszintje vagy terjedelme** (level of significance) az elsőfajú hiba valószínűségének szuprémuma:

$$\alpha = \sup_{\vartheta \in \Theta_0} \mathbb{P}_{\vartheta}(\underline{X} \in B_1).$$

- A próba **erőfüggvénye** az alábbi  $\beta : \Theta_1 \rightarrow [0, 1]$  függvény:

$$\beta(\vartheta) = \mathbb{P}_{\vartheta}(\underline{X} \in B_1) \quad (\vartheta \in \Theta_1).$$

- Azonos terjedelmű próbák közül az az **erősebb**, amelynek az erőfüggvénye minden  $\vartheta \in \Theta_1$ -re nagyobb vagy egyenlő, mint a másiké:

$$\beta^*(\vartheta) = \mathbb{P}_{\vartheta}(\underline{X} \in B_1^*) \geq \beta(\vartheta) = \mathbb{P}_{\vartheta}(\underline{X} \in B_1) \quad (\vartheta \in \Theta_1).$$

- Egy próba **konzisztens**, ha az erőfüggvénye 1-hez tart minden  $\vartheta \in \Theta_1$ -re.
- Egy próba **torzítatlan**, ha

$$\mathbb{P}_{\vartheta_0}(\underline{X} \in B_1) \leq \mathbb{P}_{\vartheta_1}(\underline{X} \in B_1)$$

minden  $\vartheta_0 \in \Theta_0$ -ra és  $\vartheta_1 \in \Theta_1$ -re.

## Neyman–Pearson-lemma

Tegyük fel, hogy a paraméterter két elemből áll:  $\Theta = \{\vartheta_0, \vartheta_1\}$ . A likelihood-függvények:  $L_{n,0}$  illetve  $L_{n,1}$ .

Likelihood-hányados próba: válasszunk egy  $c$  számot. Ha

$$\frac{L_{n,1}(X_1, \dots, X_n)}{L_{n,0}(X_1, \dots, X_n)} \geq c$$

akkor utasítsuk el a nullhipotézist, különben fogadjuk el.

### Lemma (Neyman–Pearson-lemma, 1. rész)

*Tegyük fel, hogy a likelihood-hányados próba szignifikanciaszintje  $\alpha$ . Ekkor a likelihood-hányados próba a legerősebb próba a legfeljebb  $\alpha$  szignifikanciaszintű próbák között.*

Például:  $\vartheta_0$  esetén indikátor eloszlás 0,2 paraméterrel,  $\vartheta_1$  esetén indikátor eloszlás 0,9 paraméterrel. Ha 10 megfigyelésből  $k$ -nál következik be az esemény:

$$\frac{L_{n,1}(X_1, \dots, X_n)}{L_{n,0}(X_1, \dots, X_n)} = \frac{\binom{10}{k} 0,9^k 0,1^{n-k}}{\binom{10}{k} 0,2^k 0,8^{n-k}} = \left(\frac{0,9}{0,2}\right)^k \left(\frac{0,1}{0,8}\right)^{n-k}.$$

Ez annál nagyobb, minél nagyobb  $k$ . Elutasítjuk  $H_0$ -t, ha  $k \geq k_0$  megfelelő  $k_0$ -al.

## Neyman–Pearson-lemma

Például:  $\vartheta_0$  esetén indikátor eloszlás 0,2 paraméterrel,  $\vartheta_1$  esetén indikátor eloszlás 0,9 paraméterrel. Legyen  $X$  az, hogy 10 megfigyelésből hányszor következik be az esemény. A Neyman–Pearson-lemma szerint akkor utasítjuk el  $H_0$ -t, ha  $X \geq k_0$  megfelelő  $k_0$ -al.

Ha  $k_0 = 5$ : az elsőfajú hiba valószínűsége még megfelelő:

$$\mathbb{P}_0(X \geq 5) = \sum_{j=5}^{10} \binom{10}{j} 0,2^j 0,8^{10-j} = 0,033 \leq 0,05.$$

Ha  $k_0 = 4$ : az elsőfajú hiba valószínűsége túl nagy:

$$\mathbb{P}_0(X \geq 4) = \sum_{j=4}^{10} \binom{10}{j} 0,2^j 0,8^{10-j} = 0,12 > 0,05.$$

## Neyman–Pearson-lemma

Például:  $\vartheta_0$  esetén indikátor eloszlás 0,2 paraméterrel,  $\vartheta_1$  esetén indikátor eloszlás 0,9 paraméterrel. Legyen  $X$  az, hogy 10 megfigyelésből hányszor következik be az esemény. A Neyman–Pearson-lemma szerint akkor utasítjuk el  $H_0$ -t, ha  $X \geq k_0$  megfelelő  $k_0$ -al.

Ha  $k_0 = 5$ : az elsőfajú hiba valószínűsége még megfelelő:

$$\mathbb{P}_0(X \geq 5) = \sum_{j=5}^{10} \binom{10}{j} 0,2^j 0,8^{10-j} = 0,033 \leq 0,05.$$

Ha  $k_0 = 4$ : az elsőfajú hiba valószínűsége túl nagy:

$$\mathbb{P}_0(X \geq 4) = \sum_{j=4}^{10} \binom{10}{j} 0,2^j 0,8^{10-j} = 0,12 > 0,05.$$

Pontosan  $\alpha = 0,05$  terjedelem:  $X \geq 5$  esetén biztosan,  $X = 4$  esetén 19% valószínűséggel utasítjuk el a nullhipotézist ( $0,19 \cdot \mathbb{P}_0(X = 4) = 0,05 - 0,03$ ). Ez legerősebb próba a legfeljebb  $\alpha = 0,05$  szignifikanciaszintű próbák között, és erősebb, mint a  $k_0 = 5$ -tel kapott determinisztikus próbáé.

## Véletlenített próba

Tegyük fel, hogy a paramétertér két elemből áll:  $\Theta = \{\vartheta_0, \vartheta_1\}$ . A likelihood-függvények:  $L_{n,0}$  illetve  $L_{n,1}$ .

Likelihood-hányados próba: válasszunk egy  $c$  számot. Ha

$$\frac{L_{n,1}(X_1, \dots, X_n)}{L_{n,0}(X_1, \dots, X_n)} > c$$

akkor utasítsuk el a nullhipotézist. Ha a hányados egyenlő  $c$ -vel, akkor  $p$  valószínűséggel utasítsuk el, és  $1 - p$  valószínűséggel fogadjuk el. Ha kisebb  $c$ -nél, fogadjuk el a nullhipotézist.

### Lemma (Neyman–Pearson-lemma, 2. rész)

*Legyen  $\alpha \in (0, 1)$  tetszőleges. Ekkor lehet olyan  $c$  és  $p$  számokat választani, hogy a likelihood-hányados próba a szignifikanciaszintje éppen  $\alpha$ , és így ez a legerősebb próba a legfeljebb  $\alpha$  szignifikanciaszintű próbák között.*

# Szekvenciális próbák

A valószínűséghányados  $n$  elemű mintából:

$$V_n = \frac{L_{n,1}(X_1, \dots, X_n)}{L_{n,0}(X_1, \dots, X_n)} = \frac{\prod_{j=1}^n f_1(X_j)}{\prod_{j=1}^n f_0(X_j)},$$

ha az eloszlás abszolút folytonos.

$A, B$  rögzített, a próbára jellemző számok. Addig veszünk mintaelemeket, amíg  $V_n \geq B$  vagy  $V_n \leq A$  nem teljesül. Vagyis:

- ha  $V_n \geq B$ , elutasítjuk  $H_0$ -t;
- ha  $V_n \leq A$ , elfogadjuk  $H_0$ -t;
- ha  $A < V_n < B$ : új mintaelemet veszünk.

Kétlépcsős változat:  $n_1$  elemű mintát veszünk. Ha  $V_{n_1} \geq B$ , elutasítjuk  $H_0$ -t, ha  $V_{n_1} \leq A$ , elfogadjuk  $H_0$ -t, különben további  $n_2$  darab mintaelemet veszünk, és akkor utasítjuk el a nullhipotézist, ha  $V_{n_1+n_2} > C$  teljesül.

## Neyman–Pearson-lemma

Példa: legyen  $\Theta = \{m_0, m_1\}$ , és  $\mathcal{P}$  álljon az  $N(m_1, \sigma)$  és  $N(m_0, \sigma)$  eloszlásokból. A likelihood-hányados:

$$\begin{aligned}\frac{L_{n,1}(X_1, \dots, X_n)}{L_{n,0}(X_1, \dots, X_n)} &= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\right)^n \prod_{j=1}^n \exp(-(X_j - m_1)^2/(2\sigma^2))}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\right)^n \prod_{j=1}^n \exp(-(X_j - m_0)^2/(2\sigma^2))} = \\ &= \exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^n (X_j - m_1)^2}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{j=1}^n (X_j - m_0)^2}{2\sigma^2}\right) = \\ &= \exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^n (X_j^2 - 2m_1X_j + m_1^2)}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{j=1}^n (X_j^2 - 2m_0X_j + m_0^2)}{2\sigma^2}\right) = \\ &= \exp\left(\frac{2(m_1 - m_0) \sum_{j=1}^n X_j + (m_0^2 - m_1^2)n}{2\sigma^2}\right).\end{aligned}$$

Ha  $m_1 > m_0$ : akkor utasítjuk el a nullhipotézist, ha  $\frac{L_{n,1}}{L_{n,0}}$  nagyobb egy  $c$  kritikus értéknél, vagyis ha  $\sum_{j=1}^n X_j$  nagyobb egy  $c'$  kritikus értéknél. Ezért a lesz a z-próba legerősebb próba: ez is ilyen alakú.

# Normális eloszlás paramétereire vonatkozó próbák

Az alábbi próbák akkor használhatók, ha

- a megfigyelések függetlenek, és feltételezhetjük, hogy normális eloszlásúak
- a megfigyelések függetlenek, véges szórású eloszlásból származnak, és a minta mérete, azaz  $n$  "elég nagy", például  $n \geq 100$

# Normális eloszlás paramétereire vonatkozó próbák

Az alábbi próbák akkor használhatók, ha

- a megfigyelések függetlenek, és feltételezhetjük, hogy normális eloszlásúak
- a megfigyelések függetlenek, véges szórású eloszlásból származnak, és a minta mérete, azaz  $n$  "elég nagy", például  $n \geq 100$
- **$z$ -próba** (vagy  $u$ -próba): **várható értékre** vonatkozó hipotézis esetén, ha  **$\mu$**   **$\sigma$  szórás ismert** – egymintás esetben legerősebb próba

# Normális eloszlás paramétereire vonatkozó próbák

Az alábbi próbák akkor használhatók, ha

- a megfigyelések függetlenek, és feltételezhetjük, hogy normális eloszlásúak
- a megfigyelések függetlenek, véges szórású eloszlásból származnak, és a minta mérete, azaz  $n$  "elég nagy", például  $n \geq 100$
- **z-próba** (vagy  $u$ -próba): **várható értékre** vonatkozó hipotézis esetén, ha  **$\sigma$  szórás ismert** – egymintás esetben legerősebb próba
- **t-próba** (vagy Student-próba): **várható értékre** vonatkozó hipotézis esetén, ha  **$\sigma$  szórás nem ismert** (csak az  $s_n^*$  tapasztalati szórás)
- **F-próba**: **szórásra** vonatkozó hipotézis esetén

**Kapcsolat a konfidenciaintervallummal:** egymintás próbánál akkor fogadjuk el a nullhipotézist  $\alpha$  terjedelem mellett, ha a benne megadott érték (várható érték vagy szórás) az  $1 - \alpha$  megbízhatósági szintű konfidenciaintervallumba esik.

## Egymintás egyoldali z-próba (one-sample one-sided z test)

A próba a normális eloszlás várható értékére vonatkozik ismert szórás mellett. Torzítatlan, konzisztens, **legerősebb próba** egyoldali esetben (a Neyman–Pearson-lemma alapján bizonyítható).

- $X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(m, \sigma^2)$ , ahol  $m$  ismeretlen paraméter,  $\sigma > 0$  ismert.
- Próbastatisztika (eloszlása standard normális  $H_0$  mellett, ezt beláttuk):

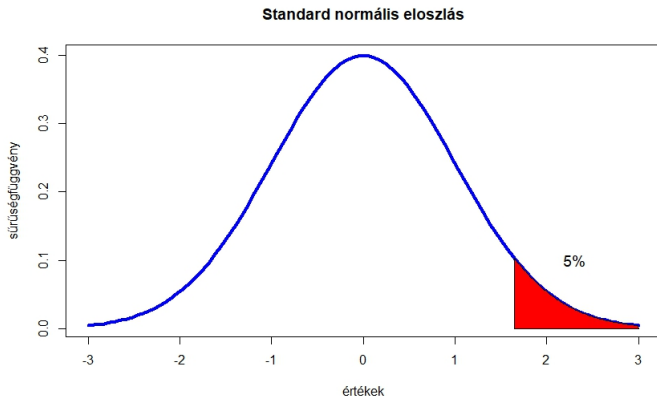
$$z = \frac{\bar{X} - m_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n}.$$

- **Egyoldali ellenhipotézis** (one-sided):  $H_0 : m \leq m_0$ ;  $H_1 : m > m_0$ .
- Ha  $z > \Phi^{-1}(1 - \alpha)$ , akkor elvetjük a nullhipotézist, különben elfogadjuk.
- A  $p$ -érték ilyenkor  $1 - \Phi(z)$ .

$p < 0,05$ : a várható érték szignifikánsan több  $m_0$ -nál.

$p \geq 0,05$ : a várható érték nem több szignifikánsan  $m_0$ -nál.

# Az egyoldali z-próba kritikus értéke



Az  $\alpha = 0,05$  szignifikanciaszintű egyoldali z-próba kritikus értéke:  
 $\Phi^{-1}(1 - \alpha) = \Phi^{-1}(0,95) = 1,645$ .

## Példa: egymintás egyoldali z-próba

Feltételezés: a testmagasság normális eloszlású.

- Az európai férfiak átlagos testmagassága 177,6 cm.
- Megmértük 90 holland férfi testmagasságát, a magasságok átlaga 181,7 cm lett. A szórást 8,5 cm-nek feltételezve mondhatjuk-e, hogy a holland férfiak testmagassága szignifikánsan több az európai átlagnál?

## Példa: egymintás egyoldali z-próba

Feltételezés: a testmagasság normális eloszlású.

- Az európai férfiak átlagos testmagassága 177,6 cm.
- Megmértük 90 holland férfi testmagasságát, a magasságok átlaga 181,7 cm lett. A szórást 8,5 cm-nek feltételezve mondhatjuk-e, hogy a holland férfiak testmagassága szignifikánsan több az európai átlagnál?

- $H_0 : m \leq 177,6$ ;       $H_1 : m > 177,6$ .

- 

$$z = \frac{\bar{X} - m_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n} = \frac{181,7 - 177,6}{8,5} \sqrt{90} = 4,57.$$

- $\alpha = 0,05$  szignifikanciaszint mellett  $\Phi^{-1}(1 - \alpha) = 1,645$ , így  $z > \Phi^{-1}(1 - \alpha)$ .  
 $p$ -érték:  $1 - \Phi(4,57) < 0,0001 < 0,05$ .
- Elutasítjuk a nullhipotézist. Az adatok alapján a holland férfiak testmagasságának várható értéke szignifikánsan több 177,6 cm-nél, vagyis az európai átlagnál.

## Egymintás kétoldali z-próba

A próba a normális eloszlás várható értékére vonatkozik ismert szórás mellett. Nem legerősebb (nincs legerősebb próba ebben a feladatban).

- $X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(m, \sigma^2)$ , ahol  $m$  ismeretlen paraméter,  $\sigma > 0$  ismert.
- Próbastatisztika (eloszlása standard normális  $H_0$  mellett):

$$z = \frac{\bar{X} - m_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n}.$$

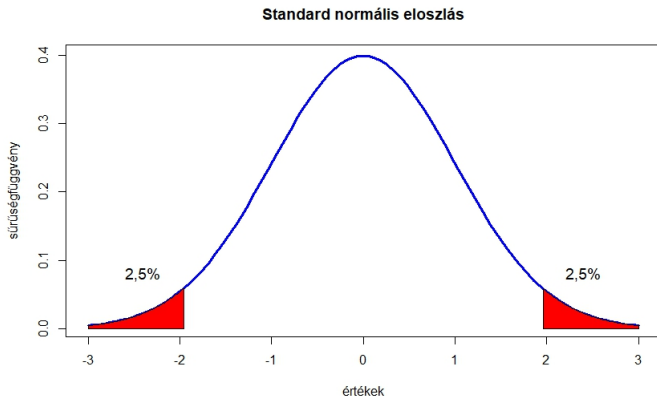
- **Kétoldali ellenhipotézis** (two-sided):  $H_0 : m = m_0$ ;  $H_1 : m \neq m_0$ .
- Ha  $|z| > \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$ , akkor elvetjük a nullhipotézist, különben elfogadjuk.
- A  $p$ -érték ilyenkor  $2 - 2\Phi(|z|)$ .

$\Phi$  a standard normális eloszlásfüggvény:  $\Phi(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$ .

$p < 0,05$ : a várható érték szignifikánsan eltér  $m_0$ -tól.

$p \geq 0,05$ : nincs szignifikáns eltérés  $m_0$ -tól.

## A kétoldali z-próba kritikus értéke



Az  $\alpha = 0,05$  szignifikanciaszintű kétoldali z-próba kritikus értéke:

$$\Phi^{-1}(1 - \alpha/2) = \Phi^{-1}(0,975) = 1,96.$$

## Példa: egymintás z-próba

Egy gyárban a minőségellenőrzésnél olyan mérleget használnak, melynél egy  $m$  tömegű tárgyat mérve a mérési eredmények független normális eloszlású valószínűségi változók  $m$  várható értékkel és  $\sigma = 3$  gramm szórással.

- A termékkatalógus szerint egy adott típusú kalapács fejének 364 g tömegűnek kell lennie.
- A fenti mérlegen megmérték 20 kalapács fejének tömegét. Az átlag 367,2 gramm lett. Ez alapján állítható-e, hogy a kalapácsok fejének tömege szignifikánsan eltér az előírt 364 grammtól?

## Példa: egymintás z-próba

Egy gyárban a minőségellenőrzésnél olyan mérleget használnak, melynél egy  $m$  tömegű tárgyat mérve a mérési eredmények független normális eloszlású valószínűségi változók  $m$  várható értékkel és  $\sigma = 3$  gramm szórással.

- A termékkatalógus szerint egy adott típusú kalapács fejének 364 g tömegűnek kell lennie.
- A fenti mérlegen megmérték 20 kalapács fejének tömegét. Az átlag 367,2 gramm lett. Ez alapján állítható-e, hogy a kalapácsok fejének tömege szignifikánsan eltér az előírt 364 grammtól?

- $H_0 : m = 364$ ;       $H_1 : m \neq 364$ .

- 

$$z = \frac{\bar{X} - m_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n} = \frac{367,2 - 364}{3} \sqrt{20} = 4,77.$$

- $\alpha = 0,05$  szignifikanciaszint mellett  $\Phi^{-1}(1 - \alpha/2) = 1,96$ .  $p = 1,84 \cdot 10^{-6} < 0,05$ .
- $|z| < \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$ , elutasítjuk a nullhipotézist. A kalapácsok fejének tömegének várható értéke a minta alapján szignifikánsan eltér az előírt 364 grammtól.