Matematikai statisztika előadás, 8. hét, 2021. április 7.

A normális eloszlás paramétereire vonatkozó próbák

Az alábbi próbák akkor használhatók, ha

- a megfigyelések függetlenek, és feltételezhetjük, hogy normális eloszlásúak vagy
- a megfigyelések függetlenek, véges szórású eloszlásból származnak, és a minta mérete, azaz n "elég nagy", például $n \geq 100$; ez a **centrális határeloszlástételen** múlik: tetszőleges véges szórású, független azonos eloszlású valószínűségi változók átlagának eloszlása normális eloszláshoz hasonló, ha nagy a mintaelemszám
- ugyanakkor, **túl nagy mintaelemszám** esetén a próba túlságosan érzékennyé válik, kis eltérést is szignifikánsnak jelez – ezért fontos az erőfüggvény, abból vehetjük észre, hogy túl nagy a mintaelemszám, hogy az erőfüggvény túl kicsi

- **z-próba** (vagy u-próba): **várható értékre** vonatkozó hipotézis esetén, ha **a σ szórás ismert** – egymintás esetben legerősebb próba
- **t-próba** (vagy Student-próba): **várható értékre** vonatkozó hipotézis esetén, ha **a σ szórás nem ismert** (csak az s_n^* tapasztalati szórás)
- **F-próba**: **szórásra** vonatkozó hipotézis esetén

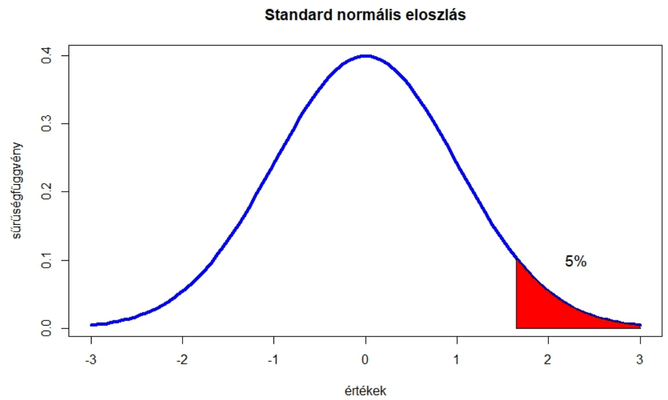
Kapcsolat a konfidenciaintervallummal: egymintás próbánál akkor fogadjuk el a nullhipotézist α szignifikanciaszint mellett, ha a benne megadott érték (várható érték vagy szórás) az $1-\alpha$ megbízhatósági szintű konfidenciaintervallumba esik.

1. z-próba mint legerősebb próba

Nézzük meg, hogy mit ad a Neyman–Pearson-lemma abban az esetben, ha a nullhipotézis és az ellenhipotézis szerint is normális eloszlású az eloszlás, a szórások megegyeznek, de a várható értékek eltérők. Ez fog segíteni abban, hogy a normális eloszlás várható értékére vonatkozó általános legerősebb próbát készítsünk, ismert szórás mellett.

Legyen $\Theta = \{m_0, m_1\}$, és $\mathcal{P}$ álljon az $N(m_0,\sigma)$ és $N(m_1,\sigma)$ eloszlásokból. Vagyis a nullhipotézis az, hogy az eloszlás $N(m_0,\sigma)$, az ellenhipotézis pedig az, hogy $N(m_1,\sigma)$. Tegyük fel még azt is, hogy $m_1 > m_0$. A likelihood-hányados:

$$\frac{L_{n,1}(X_1,\dots,X_n)}{L_{n,0}(X_1,\dots,X_n)} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\right)^n \prod_{j=1}^n \exp(-(X_j-m_1)^2/(2\sigma^2))}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\right)^n \prod_{j=1}^n \exp(-(X_j-m_0)^2/(2\sigma^2))} =$$
$$= \exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^n (X_j-m_1)^2}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{j=1}^n (X_j-m_0)^2}{2\sigma^2}\right) =$$
$$= \exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^n (X_j^2-2m_1X_j+m_1^2)}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{j=1}^n (X_j^2-2m_0X_j+m_0^2)}{2\sigma^2}\right) =$$
$$= \exp\left(\frac{2(m_1-m_0)\sum_{j=1}^n X_j + (m_0^2-m_1^2)n}{2\sigma^2}\right).$$



1. ábra. Az $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszintű egyoldali z-próba kritikus értéke: $\Phi^{-1}(1-\alpha) = \Phi^{-1}(0,95) = 1,645$. A piros rész területe 5%.

A Neyman–Pearson-lemma szerint az alábbi próba lesz a legerősebb az adott szignifikanciaszintű próbák között: akkor utasítjuk el a nullhipotézist, ha $\frac{L_{n,1}}{L_{n,0}}$ nagyobb egy c kritikus értéknél. Átrendezve, akkor utasítjuk el a nullhipotézist, ha $\sum_{j=1}^{n} X_j$ nagyobb egy c' kritikus értéknél.

Kérdés, hogy ha adott a próba szignifikanciaszintje (α, az elsőfajú hiba valószínűsége), akkor hogyan találhatjuk meg a c'-t. Ez a c' érték azonban minden m_0 és σ-ra más lenne, ezért az összeg helyett az átlag standardizáltját szokták használni, vagyis ezt a mennyiséget:

$$z = \frac{\overline{X} - m_0}{\sigma}\sqrt{n}.$$

Erről a Fisher–Bartlett-tétel szerint tudjuk, hogy a nullhipotézis teljesülése esetén (amikor m_0 a várható érték és σ a szórás) standard normális eloszlású, annak a kvantiliseit lehet majd használni. Vegyük észre azt is, hogy minél nagyobb az összeg, annál nagyobb ez a mennyiség is, tehát a legerősebb próba olyan alakú lesz, hogy akkor utasítjuk el a nullhipotézist, ha ez a mennyiség nagyobb egy z_{krit} kritikus értéknél.

Tehát azt a z_{krit} kritikus értéket keressük, amire az igaz, hogy a nullhipotézis, vagyis $N(m_0, \sigma^2)$ normális eloszlás esetén az elutasítás (hibás döntés) valószínűsége éppen α. Az eddigiek alapján ennek kell teljesülnie (az 1. ábrán láthatjuk ezt az $\alpha = 0,05$ esetben):

$$\mathbb{P}_0\left(\frac{\overline{X} - m_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{\text{krit}}\right) = \alpha \qquad \Rightarrow \qquad z_{\text{krit}} = \Phi^{-1}(1-\alpha).$$

Ugyanakkor a kapott kritikus értékből érdemes visszaszámolni azt is, hogy $\overline{X}$-nek mekkorának kell lennie ahhoz, hogy a nullhipotézist elutasítsuk. Ebből kaphatunk információt arra, hogy n elemű mintával mekkora eltérést tudunk kimutatni.

$$z = \frac{\overline{X} - m_0}{\sigma}\sqrt{n} > \Phi^{-1}(1-\alpha) \qquad \Leftrightarrow \qquad \overline{X} > m_0 + \frac{\Phi^{-1}(1-\alpha)\cdot\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Tehát akkor mondhatjuk, hogy a várható érték szignifikánsan több m_0-nál, ha a mintaátlag nagyobb, mint az itt megadott érték. Ez azt is jelenti, hogy ha m_1 kevesebb vagy nem sokkal több, mint $m_0 + \frac{\Phi^{-1}(1-\alpha)\cdot\sigma}{\sqrt{n}}$, akkor jó esély van rá, hogy az itt megadottnál kisebb lesz az átlag, így elfogadjuk a nullhipotézist, nem tudjuk kimutatni a különbséget. Azt is leolvashatjuk, hogy ha feleakkora különbséget is ki szeretnénk tudni mutatni, akkor négyszerannyi mintaelem kell.

Az erőfüggvény alapján is gondolkodhatunk. Az erőfüggvény értéke a helyes döntés valószínűsége az ellenhipotézis esetén. Vagyis kérdés, hogy ha most $\overline{X} \sim N(m_1, \sigma^2/n)$, akkor mennyi a valószínűsége, hogy $z > z_{\text{krit}}$. Ezt a következőképpen számíthatjuk ki:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_1\left(\frac{\overline{X}-m_0}{\sigma}\sqrt{n} > z_{\text{krit}}\right) &= \mathbb{P}_1\left(\overline{X} > m_0 + \frac{\Phi^{-1}(1-\alpha)\cdot\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \\
&= \mathbb{P}_1\left(\frac{\overline{X}-m_1}{\sigma}\cdot\sqrt{n} > \frac{m_0-m_1}{\sigma}\cdot\sqrt{n} + \Phi^{-1}(1-\alpha)\right) = \\
&= 1-\Phi\left(\frac{m_0-m_1}{\sigma}\cdot\sqrt{n} + \Phi^{-1}(1-\alpha)\right).
\end{aligned}$$

Ez alapján kiszámítható, hogy ha az erőfüggvényre valamilyen alsó korlátunk van, akkor ahhoz legalább mekkora $m_1 - m_0$ különbség kell, hogy tartozzon, és ez is a mintaelemszám négyzetes függvénye lesz.

1.1. Egymintás egyoldali z-próba (one-sample one-sided z test)

A próba a normális eloszlás várható értékére vonatkozik ismert szórás mellett. Torzítatlan, konzisztens, **legerősebb próba** egyoldali esetben (a Neyman–Pearson-lemma alapján bizonyítható).

- $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim N(m, \sigma^2)$, ahol m ismeretlen paraméter, $\sigma > 0$ ismert.
- Próbastatisztika (eloszlása standard normális H_0 mellett, ezt beláttuk):
$$z = \frac{\overline{X}-m_0}{\sigma}\cdot\sqrt{n}.$$
- **Egyoldali ellenhipotézis** (one-sided): $H_0 : m \leq m_0$; $H_1 : m > m_0$.
- Ha $z > \Phi^{-1}(1-\alpha)$, akkor elvetjük a nullhipotézist, különben elfogadjuk.
- A p-érték ilyenkor $1 - \Phi(z)$.

$p < 0,05$: a várható érték szignifikánsan több m_0-nál.

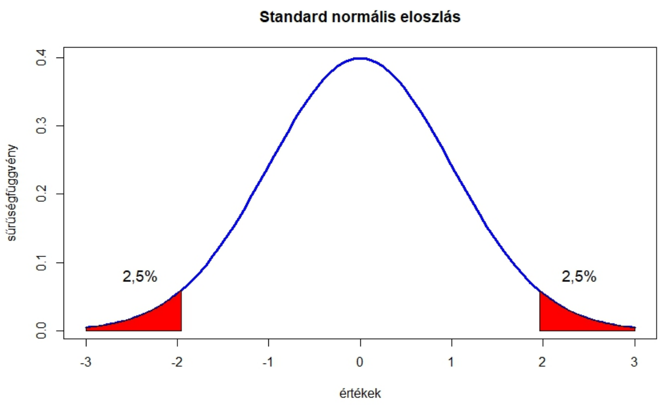
$p \geq 0,05$: a várható érték nem több szignifikánsan m_0-nál (értelmezés: vagy valójában is legfeljebb m_0 a várható érték, vagy az n elemű minta kevés annak kimutatására, amennyivel a várható érték több m_0-nál.

Példa: egymintás egyoldali z-próba

Feltételezés: a testmagasság normális eloszlású.

- Az európai férfiak átlagos testmagassága $177,6$ cm.
- Megmértük 90 holland férfi testmagasságát, a magasságok átlaga 181,7 cm lett. A szórást 8,5 cm-nek feltételezve mondhatjuk-e, hogy a holland férfiak testmagassága szignifikánsan több az európai átlagnál?
- $H_0 : m \leq 177,6$; $H_1 : m > 177,6$.
- $$z = \frac{\overline{X}-m_0}{\sigma}\cdot\sqrt{n} = \frac{181,7-177,6}{8,5}\sqrt{90} = 4,57.$$
- $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett $\Phi^{-1}(1-\alpha) = 1,645$, így $z > \Phi^{-1}(1-\alpha)$.
  p-érték: $1 - \Phi(4,57) < 0,0001 < 0,05$.
- Elutasítjuk a nullhipotézist. Az adatok alapján a holland férfiak testmagasságának várható értéke szignifikánsan több 177,6 cm-nél, vagyis az európai átlagnál.

•



2. ábra. Az $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszintű kétoldali z-próba kritikus értéke: $\Phi^{-1}(1-\alpha/2) = \Phi^{-1}(0,975) = 1,96$.

1.2. Egymintás kétoldali z-próba

A próba a normális eloszlás várható értékére vonatkozik ismert szórás mellett. Nem legerősebb (nincs legerősebb próba ebben a feladatban).

- $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim N(m, \sigma^2)$, ahol m ismeretlen paraméter, $\sigma > 0$ ismert.
- Próbastatisztika (eloszlása standard normális H_0 mellett):

$$z = \frac{\overline{X} - m_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n}.$$

- **Kétoldali ellenhipotézis** (two-sided): $H_0 : m = m_0$; $H_1 : m \neq m_0$.
- Ha $|z| > \Phi^{-1}(1-\alpha/2)$, akkor elvetjük a nullhipotézist, különben elfogadjuk.
- A p-érték ilyenkor $2 - 2\Phi(|z|)$.

Φ a standard normális eloszlásfüggvény: $\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$.

$p < 0,05$: a várható érték szignifikánsan eltér m_0-tól.

$p \geq 0,05$: nincs szignifikáns eltérés m_0-tól.

Példa. Egy gyárban a minőségellenőrzésnél olyan mérleget használnak, melynél egy m tömegű tárgyat mérve a mérési eredmények független normális eloszlású valószínűségi változók m várható értékkel és $\sigma = 3$ gramm szórással.

- A termékkatalógus szerint egy adott típusú kalapács fejének 364 g tömegűnek kell lennie.
- A fenti mérlegen megmérték 20 kalapács fejének tömegét. Az átlag 367,2 gramm lett. Ez alapján állítható-e, hogy a kalapácsok fejének tömege szignifikánsan eltér az előírt 364 grammtól?
- $H_0 : m = 364$; $H_1 : m \neq 364$.
- $$z = \frac{\overline{X} - m_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n} = \frac{367,2 - 364}{3}\sqrt{20} = 4,77.$$

- $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett $\Phi^{-1}(1-\alpha/2) = 1,96$. $p = 1,84 \cdot 10^{-6} < 0,05$.
- $|z| < \Phi^{-1}(1-\alpha/2)$, elutasítjuk a nullhipotézist. A kalapácsok fejének tömegének várható értéke a minta alapján szignifikánsan eltér az előírt 364 grammtól.

Példa. Mennyi a z-próba erőfüggvényének az értéke a 2 helyen, ha 16 elemű mintánk van, mely 9 szórású normális eloszlásból származik és a hipotézisek: $H_0 : m = 1$, $H_1 : m > 1$. Tegyük fel, hogy a kritikus érték $z_\alpha = 2$.

Az erőfüggvény a helyes döntés valószínűségét adja meg, az ellenhipotézishez tartozó paraméterek esetén. Most

$$\beta(2) = \mathbb{P}_2(\text{elutasítjuk } H_0\text{-t})$$

a kérdés, vagyis hogy mennyi valószínűséggel utasítjuk el a nullhipotézist, ha a minta $N(2, 9^2)$ eloszlású.

Az egymintás z-próba próbastatisztikája $z = \frac{\overline{X}-m_0}{\sigma}\sqrt{n}$. Most $m_0 = 1, \sigma = 9, n = 16$, a kritikus érték pedig 2. Akkor utasítjuk el a nullhipotézist (az $m > 1$ egyoldali ellenhipotézisnek megfelelően), ha $z > 2$ (ez jelenti azt, hogy az átlag nagy, ami a várható érték nagy értékére utal). Tehát a kérdés, amiből átrendezésekkel juthatunk el a megoldáshoz:

$$\beta(2) = \mathbb{P}_2(\text{elutasítjuk } H_0\text{-t}) = \mathbb{P}_2(z > 2) = \mathbb{P}_2\left(\frac{\overline{X}-m_0}{\sigma}\sqrt{n} > 2\right) = \mathbb{P}_2\left(\overline{X} > \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} + m_0\right) =$$
$$= \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}-2}{\sigma}\sqrt{n} > \frac{m_0-2}{\sigma}\sqrt{n} + 2\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}-2}{\sigma}\sqrt{n} > \frac{1-2}{9}\cdot 4 + 2\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}-2}{\sigma}\sqrt{n} > \frac{14}{9}\right) =$$
$$= 1 - \Phi\left(\frac{14}{9}\right),$$

ugyanis $\overline{X} \sim N(2, \sigma/\sqrt{n})$, ha független, azonos eloszlású normális eloszlású valószínűségi változókat átlagolunk (itt a Fisher–Bartlett-tételt használjuk).

2. t-próba

A t-próba **várható értékre** vonatkozó hipotézis esetén, ha **a σ szórás nem ismert** (csak az s_n^* tapasztalati szórás). Tehát $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független azonos eloszlású valószínűségi változók, normális eloszlásúak, azaz sem a várható érték, sem a szórás nem ismert: $X_j \sim N(m, \sigma^2)$, ahol m és $\sigma > 0$ is ismeretlen paraméterek. Például: tegyük fel, hogy egy biztosítás esetén a kárnagyság logaritmusa normális eloszlású (lognormális eloszlást feltételezünk), de ennek a normális eloszlásnak sem a várható értékét, sem a szórását nem ismerjük. Lehetséges null– és ellenhipotézisek:

$H_0 : m \leq 8$**, azaz a várható érték legfeljebb 8;** $H_1 : m > 8$**, azaz a várható érték több 8-nál.**

A nullhipotézis elfogadása azt jelenti, hogy a várható érték nem szignifikánsan több 8-nál (de nem jelenti azt, hogy biztosan kevesebb), az elutasítása azt jelenti, hogy a várható érték szignifikánsan több 8-nál.

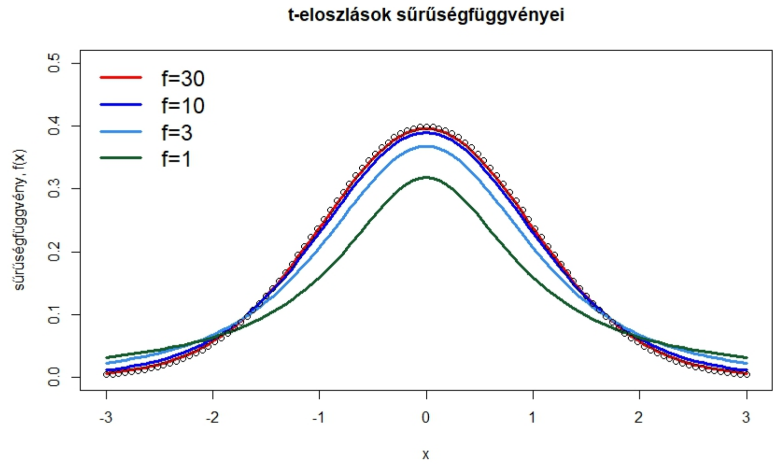
$H_0 : m = 5$**, azaz a várható érték 5;** $H_1 : m \neq 5$**, azaz a várható érték eltér öttől.**

A nullhipotézis elfogadása azt jelenti, hogy a várható érték nem tér el szignifikánsan öttől (de nem jelenti azt, hogy pontosan meg is egyezik vele), az elutasítása azt jelenti, hogy a várható érték szignifikánsan eltér 5-től.

Emlékeztetőül: a z-próba esetében σ ismert volt. Ilyenkor

$$z = \frac{\overline{X}-m_0}{\sigma}\sqrt{n},$$

és ez a nullhipotézis teljesülése esetén standard normális eloszlású volt. Most m_0 és n továbbra is ismert, viszont σ-t nem ismerjük. Ezt a korrigált tapasztalati szórással helyettesítve az alábbi tétel mondja meg, hogy a standard normális eloszlás helyett milyen eloszlást használhatunk.



3. ábra. Különböző szabadsági fokú t-eloszlások sűrűségfüggvényei. A pöttyözött vonal a standard normális eloszlás sűrűségfüggvényét jelöli, ez közel van a t-eloszlás sűrűségfüggvényéhez, ha f nagy.

2.1. Tétel (Fisher–Bartlett). *Tegyük fel, hogy $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független m várható értékű, σ szórású,* **normális eloszlású** *valószínűségi változók. Ekkor*

(1) $\overline{X} \sim N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$*;*

(2) $\overline{X}$ *és* s_n^* *függetlenek;*

(3) $(n-1)s_n^{*2}/\sigma^2$ *eloszlása* $n-1$ *szabadsági fokú* χ^2*-eloszlás;*

(4) $\frac{\overline{X}-m}{s_n^*} \cdot \sqrt{n}$ *eloszlása* $n-1$ *szabadsági fokú* t*-eloszlás.*

Itt

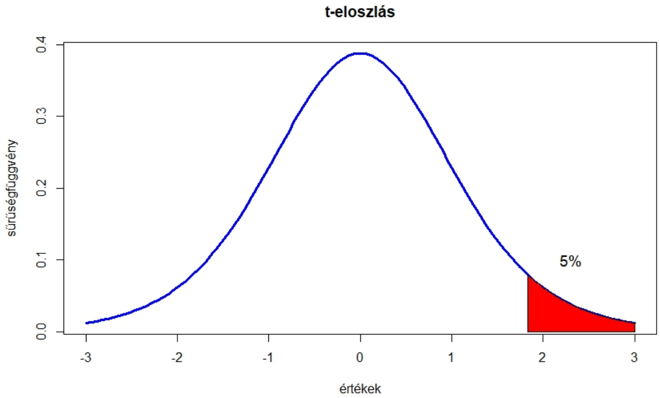
$$s_n^* = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X})^2} = \sqrt{\frac{n}{n-1}\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j^2\right) - \overline{X}^2\right)}$$

a korrigált tapasztalati szórás.

Emlékeztető: legyenek $Z_0, Z_1, \ldots, Z_n$ független $N(0,1)$ eloszlásúak. Ekkor $\frac{Z_0}{\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_f^2}}$ eloszlása f szabadsági fokú **t-eloszlás**. Ugyanúgy, ahogy a konfidenciaintervallumnál láttuk, a szabadsági fok annak felel meg, hogy az $X_j - \overline{X}$ tagok összege 0, így ha ezek értékei közül $n-1$-et tetszőlegesen megadhatunk, az utolsó viszont akkor már kiszámítható.

2.1. Egymintás egyoldali t-próba (one-sample one-sided t-test)

- **A normális eloszlás várható értékére, ismeretlen szórás esetén – legerősebb próba.**
- $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim N(m, \sigma^2)$, ahol m, σ ismeretlen paraméterek.



4. ábra. Az $f = 9$ szabadsági fokú $\alpha = 0,05$ szignifikianciaszintű egyoldali t-próba kritikus értéke: $\bar{t}_{9,0,05} = 1,83$.

- Próbastatisztika, aminek eloszlása t-eloszlás H_0 mellett a Fisher–Bartlett-tétel szerint:

$$t = \frac{\overline{X} - m_0}{s_n^*} \cdot \sqrt{n}.$$

- **Egyoldali ellenhipotézis** (one-sided): $H_0 : m \leq m_0$; $H_1 : m > m_0$.
- Ha $t > \bar{t}_{n-1,\alpha}$, azaz $p < \alpha$, elutasítjuk a nullhipotézist; ilyenkor a várható érték szignifikánsan több m_0-nál.
- Ha $t \leq \bar{t}_{n-1,\alpha}$, azaz $p \geq \alpha$, elfogadjuk a nullhipotézist, a várható érték nem több szignifikánsan m_0-nál az adatok alapján.
- A kritikus érték: $\bar{t}_{n-1,\alpha}$ az $f = n-1$ szabadsági fokú (degree of freedom) t-eloszlás $1-\alpha$-kvantilise, vagyis az $f = n-1$ szabadsági fokú egyoldali t-próba kritikus értéke α szignifikanciaszint (level of significance) mellett.

A $\bar{t}_{n-1,\alpha}$ az $f = n-1$ szabadsági fokú t-eloszlás felső $1-\alpha$-kvantilise:

$$1 - \alpha = \mathbb{P}(Y \leq \bar{t}_{f,\alpha}) = \mathbb{P}\left(\frac{Z_0}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_f^2}} \leq \bar{t}_{f,\alpha} \right).$$

A p-érték ebben az esetben annak valószínűsége, hogy az adott szabadsági fokú t-eloszlás értéke t-nél nagyobb. Ez az 5. ábrán a t értékétől jobbra lévő terület. Minél nagyobb a t, annál kisebb lesz a p, vagyis annál szignifikánsabb az eltérés. A p-érték az R-ben így számolható ki:

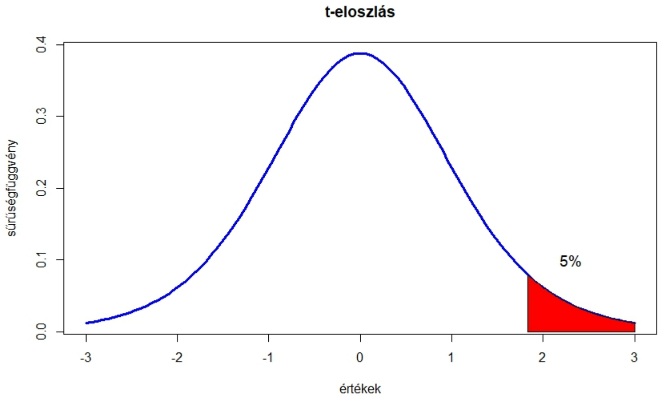
```
pt(t, df=f, lower.tail=FALSE)
```

Ha `lower.tail=TRUE` lenne, az annak valószínűségét adná, hogy a t-eloszlás a t-nél kisebb, ez a t-től balra eső terület (a teljes görbe alatti terület 1, így a kettő összege is 1).

Példa: egymintás egyoldali t-próba

Egy adott helyen vett tíz mintából megmértük az ivóvíz keménységét. Az alábbi eredmények adódtak (mg/l CaO):

351	370	352	340	362	363	366	355	374	347



5. ábra. Az $f = 9$ szabadsági fokú $\alpha = 0,05$ szignfikianciaszintű egyoldali t-próba kritikus értéke: $\bar{t}_{9,0,05} = 1,83$.

Állíthatjuk-e az adatok alapján, hogy az ivóvíz keménységének várható értéke szignifikánsan meghaladja a 350 mg/l egészségügyi határértéket?

$$n = 10; \qquad \overline{X} = 358; \qquad s_n^* = 10,77$$

Feltételezzük, hogy a mérési eredmények normális eloszlásúak, **az egymintás egyoldali t-próbát** alkalmazzuk: $H_0 : m \leq 350$; $H_1 : m > 350$.

$$t = \frac{\overline{X} - m_0}{s_n^*} \cdot \sqrt{n} = \frac{358 - 350}{10,77}\sqrt{10} = 2,35.$$

Az $f = n - 1 = 9$ szabadsági fokú egyoldali t-próba kritikus értéke $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett $\bar{t}_{9;0,05} = 1,833$.

Mivel $t > \bar{t}_{9;0,05}$, **elutasítjuk a nullhipotézist**, a vízkeménység szignifikánsan meghaladja 350 mg/l határértéket. A p-érték: $p = 0,0217 < 0,05$.

Ez az R-ben így számítható ki:

```
pt(2.35, df=9, lower.tail=FALSE)
[1] 0.02165254
```

Megoldás az R-ben:

```
> viz<-c(348, 367, 349, 337, 359, 360, 363, 352, 371, 344)
> t.test(viz, mu=350, alternative="greater")
One Sample t-test
data:  viz
t = 2.3489, df = 9, p-value = 0.02169
alternative hypothesis:  true mean is greater than 350
95 percent confidence interval:  351.7566 Inf
mean of x :  358
```

Most $p = 0.02169 < 0,05 = \alpha$, elutasítjuk a nullhipotézist (emlékeztető, minél kisebb a p-érték, annál szignifikánsabb az eltérés, és akkor utasítjuk el a nullhipotézist, ha $p < \alpha$.

2.2. Egymintás kétoldali t-próba (one-sample two-sided t-test)

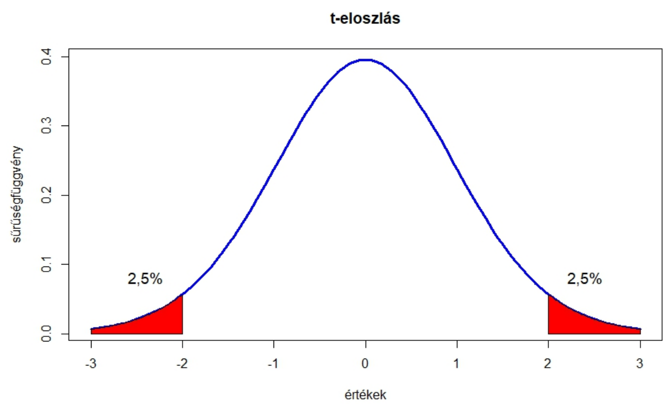
- **A normális eloszlás várható értékére, ismeretlen szórás esetén.** Nem legerősebb (nincs ilyen).
- $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim N(m, \sigma^2)$, ahol m, σ ismeretlen paraméterek.
- Próbastatisztika (eloszlása t-eloszlás/Student-eloszlás H_0 mellett):

$$t = \frac{\overline{X} - m_0}{s_n^*} \cdot \sqrt{n}.$$

- **Kétoldali ellenhipotézis** (two-sided): $H_0 : m = m_0$; $H_1 : m \neq m_0$.
- Ha $|t| > t_{n-1,\alpha}$, azaz $p < \alpha$, akkor elutasítjuk a nullhipotézist, a várható érték szignifikánsan eltér m_0-tól.
- Ha $|t| \leq t_{n-1,\alpha}$, azaz $p \geq \alpha$, akkor elfogadjuk H_0-t, a várható érték nem tér el szignifikánsan m_0-tól.
- A kritikus érték: $t_{n-1,\alpha}$ az $f = n-1$ szabadsági fokú (degree of freedom) t-eloszlás $1-\alpha/2$-kvantilise, vagyis az $f = n-1$ szabadsági fokú (degree of freedom) kétoldali t-próba kritikus értéke α szignifikanciaszint mellett.

Legyenek $Z_0, Z_1, \ldots, Z_n$ független $N(0,1)$ eloszlásúak, és $t_{f,\alpha}$ az f szabadsági fokú α szignifikanciaszintű kétoldali t-próba kritikus értéke, azaz az f szabadsági fokú t-eloszlás $1-\alpha/2$-kvantilise:

$$1 - \alpha/2 = \mathbb{P}(Y \leq t_{f,\alpha}) = \mathbb{P}\left(\frac{Z_0}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_f^2}} \leq t_{f,\alpha} \right).$$



6. ábra. Az $f = 29$ szabadsági fokú $\alpha = 0,05$ szignfikianciaszintű kétoldali t-próba kritikus értéke: $t_{29;0,05} = 2,04$.

A p-érték ilyenkor annak valószínűsége, hogy a t eloszlás abszolút értéke több t-nél. Ez a 6. ábrán a $|t|$-től jobbra eső terület kétszerese. Minél nagyobb a t abszolút értéke, annál kisebb lesz ez a terület, vagyis annál szignifikánsabb az eltérés. Az R-ben ez így számolható:

```
2*pt(abs(t), df=f, lower.tail=FALSE)
```

Erre közelítő táblázat van: t értéke valójában tetszőleges lehet, és a szabadsági fok is sokféle, így a t értékét csak kerekítve tudjuk figyelembe venni a táblázatban. Ha a szabadsági fok legalább 30, akkor a t-eloszlás a standard normális eloszláshoz van közel, így ehelyett az $1 - \Phi^{-1}(t)$-t is használhatjuk közelítésként.

Példa: Egymintás kétoldali t-próba

Egy gyógyszer hatóanyagtartalma a csomagolás szerint 10 mg. Harminc tabletta hatóanyagtartalmát megmérve a mérések átlaga $9,8$, korrigált tapasztalati szórása $0,62$ lett. A szignifikanciaszintet $\alpha = 0,05$-nek választva az adatok alapján szignifikánsan eltér-e a hatóanyag-tartalom várható értéke a 10 mg-tól?

$$n = 30; \qquad \overline{X} = 9,8; \qquad s_n^* = 0,62$$

Egymintás kétoldali t-próbát végezhetünk, normális eloszlást feltételezve.

$$H_0 : m = 10; \qquad H_1 : m \neq 10; \qquad \alpha = 0,05; \qquad f = n - 1 = 29.$$

$$t = \frac{\overline{X} - m_0}{s_n^*} \cdot \sqrt{n} = \frac{9,8 - 10}{0,62} \cdot \sqrt{30} = -1,77.$$

A kritikus érték: $t_{29,0,975} = 2,045 \Rightarrow |t| = 1,77 \leq 2,045$, nincs szignifikáns eltérés. p-érték: $p = 0,0867 \geq 0,05$.

A p-érték kiszámítása az R-ben:

```
2*pt(abs(-1.77), df=29, lower.tail=FALSE)
[1] 0.08724161
```

3. Kétmintás z-próba

Gyakran előfordul, hogy két különböző csoportba tartozó egyedeket akarunk összehasonlítani. Ebben az esetben azt tesszük fel, hogy a mérési eredmények függetlenek (minden mérés mindegyik másiktól), normális eloszlásúak, a várható érték az egyik csoportban m_1, a másikban m_2, a szórás az egyik csoportban σ_1, a másikban σ_2. Ezután kérdezhetjük, hogy a két várható érték szignifikánsan eltér-e, vagy hogy az egyik szignifikánsan nagyobb-e a másiknál. A z-próba akkor végezhető, ha a szórások ismertek, a hipotézis a várható értékekre vonatkozik.

Legyenek most $X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}, Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ független normális eloszlású valószínűségi változók, ahol $X_i \sim N(m_1, \sigma_1^2)$, $Y_i \sim N(m_2, \sigma_2^2)$. Itt m_1, m_2 ismeretlen paraméterek, σ_1, σ_2 ismertek.

A próbastatisztika, ami alapján a döntést hozzuk:

$$z = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}}.$$

A $H_0 : m_1 = m_2$ hipotézis mellett az u statisztika standard normális eloszlású.

Ha α a próba szignifikanciaszintje, akkor az alábbi eljárást végezhetjük.

- Kétoldali ellenhipotézis: $H_0 : m_1 = m_2; \qquad H_1 : m_1 \neq m_2.$

  Ha $|z| > \Phi^{-1}(1-\alpha/2)$, akkor elutasítjuk a nullhipotézist (a két várható érték szignifikánsan eltér), különben elfogadjuk (nincs szignifikáns eltérés a várható értékek között).

- Egyoldali ellenhipotézis, balról:

  $H_0 : m_1 \leq m_2; \qquad H_1 : m_1 > m_2.$

  Ha $z > \Phi^{-1}(1-\alpha)$, akkor elutasítjuk a nullhipotézist (az első várható érték szignifikánsan nagyobb a másodiknál), különben elfogadjuk (nem igaz, hogy az első várható érték szignifikánsan nagyobb a másodiknál).

Példa: z**-próba.** Megmérték nyolc beagle fajtájú kutya testtömegét, az alábbi eredmények adódtak (kg):

16,9 11,5 9,7 14,2 12,0 10,8 13,9 15,6

Tegyük fel, hogy a beagle esetén a testtömeg normális eloszlású, és 2 a szórása.

(a) Elfogadható-e az a hipotézis $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett, hogy a beagle testtömegének várható értéke 12?

egymintás kétoldali z-próba; $H_0 : m = 12$; $H_1 : m \neq 12$.

$$|z| = \frac{\overline{X} - m_0}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{13,075 - 12}{2}\sqrt{8} = 1,52 \Rightarrow |z| < \Phi^{-1}(1-\alpha/2) = \Phi^{-1}(0,975) = 1,96.$$

Elfogadható a nullhipotézis, a várható érték nem tér el szignifikánsan 12-től. A p-érték $0,12 > 0,05$.

(b) Elfogadható-e $\alpha = 0,02$ szignifikanciaszint mellett ugyanez a hipotézis?

$$|z| = 1,52 < \Phi^{-1}(1-\alpha/2) = \Phi^{-1}(0,99) = 2,33.$$

Így is elfogadható a nullhipozézis. Általában is, ha magasabb szignifikanciaszint mellett elfogadjuk a nullhipotézist, akkor minden alacsonyabb szignifikanciaszint mellett is.

(c) Elfogadható-e 95%-os megbízhatósági szinten (azaz 5%-os terjedelem mellett) az a hipotézis, hogy a beagle testtömegének várható értéke nem több 13-nál?

egymintás egyoldai z-próba: $H_0 : m \leq 13$; $H_1 : m > 13$

$$z = \frac{\overline{X} - m_0}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{13,075 - 13}{2}\sqrt{8} = 0,11 \Rightarrow z < \Phi^{-1}(1-\alpha) = \Phi^{-1}(0,95) = 1,65.$$

Vagyis elfogadjuk a nullhipotézist, a beagle-k testtömege a megadott minta alapján nem haladja meg szignifikánsan a 13 kg-ot.

(d) Néhány terrier testtömegét is megmérték:

$12,0 \quad 11,9 \quad 9,6 \quad 10,6 \quad 14,5$

Itt a mérések szórását 1,2-nek feltételezzük. Állíthatjuk-e $\alpha = 0,05$ terjedelem mellett, hogy a beagle fajtájú kutyák nehezebbek a terriereknél?

Kétmintás egyoldali z-próba; $H_0 : m_1 \leq m_2$, $H_1 : m_1 > m_2$.

$$z = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{13,075 - 11,72}{\sqrt{\frac{2^2}{8} + \frac{1,2^2}{5}}} = 0,94 \Rightarrow z < \Phi^{-1}(0,95) = 1,65.$$

Elfogadjuk a nullhipotézist, nem állíthatjuk, hogy a beagle kutyák nehezebbek.

Házi feladat április 14., szerda, 9:00-ig Egy tárgy hőmérsékletét vizsgálják egy olyan hőmérővel, melynél a mérési hiba normális eloszlású, 0 várható értékű, $0,1$ szórású. Az elvégzett mérések száma n, ezek egymástól függetlennek tekinthetők. Tegyük fel, hogy a nullhipotézsi az, hogy a tárgy hőmérséklete 0 fok, azaz $m = 0$, az ellenhipotézis az, hogy a hőmérséklet ettől eltérő, azaz $m \neq 0$.

Ábrázoljuk az elvégzett próba erőfüggvényét $m \in [-0,3;\ 0,3] \setminus 0$ esetén, legalább három különböző mintaelemszámra, amik közül a legkisebb legyen 10 és 100 között, a legnagyobb pedig legalább 1000, ha a szignifikanciaszint mindegyik esetben $\alpha = 0,05$. Hasonlítsuk össze az így kapott görbéket (lehet egy ábrán ábrázolni, vagy különböző ábrákon, de az ábrák egy-két mondatos értelmezése is a megoldás része).