Matematikai statisztika előadás, 7. hét, április 1.

A normális eloszlás paramétereire vonatkozó próbák

Az alábbi próbák akkor használhatók, ha

- a megfigyelések függetlenek, és feltételezhetjük, hogy normális eloszlásúak
- a megfigyelések függetlenek, véges szórású eloszlásból származnak, és a minta mérete, azaz n "elég nagy", például $n \geq 100$; ez a **centrális határeloszlástételen** múlik: tetszőleges véges szórású, független azonos eloszlású valószínűségi változók átlagának eloszlása normális eloszláshoz hasonló, ha nagy a mintaelemszám

- **z-próba** (vagy u-próba): **várható értékre** vonatkozó hipotézis esetén, ha **a σ szórás ismert** – egymintás esetben legerősebb próba
- **t-próba** (vagy Student-próba): **várható értékre** vonatkozó hipotézis esetén, ha **a σ szórás nem ismert** (csak az s_n^* tapasztalati szórás)
- **F-próba**: **szórásra** vonatkozó hipotézis esetén

Az egymintás egyoldali z-próba legerősebb próba ebben a feladatban, ismert szórás esetén. A többi próbára jellemző lehet, hogy túl nagy mintaelemszám esetén kis eltérést is szignifikánsnak tekintenek.

1. t-próba

A t-próba **várható értékre** vonatkozó hipotézis esetén, ha **a σ szórás nem ismert** (csak az s_n^* tapasztalati szórás). Tehát $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független azonos eloszlású valószínűségi változók, normális eloszlásúak, azaz sem a várható érték, sem a szórás nem ismert: $X_j \sim N(m, \sigma^2)$, ahol m és $\sigma > 0$ is ismeretlen paraméterek. Például: tegyük fel, hogy egy biztosítás esetén a kárnagyság logaritmusa normális eloszlású (lognormális eloszlást feltételezünk), de ennek a normális eloszlásnak sem a várható értékét, sem a szórását nem ismerjük. Lehetséges null– és ellenhipotézisek:

$H_0 : m \leq 8$, azaz a várható érték legfeljebb 8; **$H_1 : m > 8$, azaz a várható érték több 8-nál.**

A nullhipotézis elfogadása azt jelenti, hogy a várható érték nem szignifikánsan több 8-nál (de nem jelenti azt, hogy biztosan kevesebb), az elutasítása azt jelenti, hogy a várható érték szignifikánsan több 8-nál.

$H_0 : m = 5$, azaz a várható érték 5; **$H_1 : m \neq 5$, azaz a várható érték eltér öttől.**

A nullhipotézis elfogadása azt jelenti, hogy a várható érték nem tér el szignifikánsan öttől (de nem jelenti azt, hogy pontosan meg is egyezik vele), az elutasítása azt jelenti, hogy a várható érték szignifikánsan eltér 5-től.

Emlékeztetőül: a z-próba esetében σ ismert volt. Ilyenkor

$$z = \frac{\overline{X} - m_0}{\sigma}\sqrt{n},$$

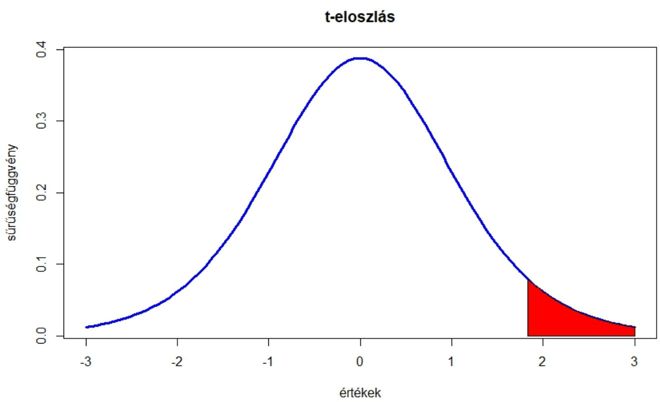
és ez a nullhipotézis teljesülése esetén standard normális eloszlású volt. Most m_0 és n továbbra is ismert, viszont σ-t nem ismerjük. Ezt a korrigált tapasztalati szórással helyettesítve az alábbi tétel mondja meg, hogy a standard normális eloszlás helyett milyen eloszlást használhatunk.

1.1. Tétel (Fisher–Bartlett). *Tegyük fel, hogy $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független m várható értékű, σ szórású,* **normális eloszlású** *valószínűségi változók. Ekkor*

(1) $\overline{X} \sim N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$;

(2) $\overline{X}$ *és* s_n^* *függetlenek;*

(3) $(n-1)s_n^{*2}/\sigma^2$ *eloszlása* $n-1$ *szabadsági fokú* χ^2*-eloszlás;*



1. ábra. Az $f = 9$ szabadsági fokú $\alpha = 0,05$ szignfikianciaszintű egyoldali t-próba kritikus értéke: $\bar{t}_{9,0,05} = 1,83$.

(4) $\frac{\overline{X}-m}{s_n^*} \cdot \sqrt{n}$ *eloszlása* $n-1$ *szabadsági fokú* t*-eloszlás.*

Itt

$$s_n^* = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X})^2\Big)} = \sqrt{\frac{n}{n-1}\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j^2\right) - \overline{X}^2\right)}$$

a korrigált tapasztalati szórás.

Emlékeztető: legyenek $Z_0, Z_1, \ldots, Z_n$ független $N(0,1)$ eloszlásúak. Ekkor $\frac{Z_0}{\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_f^2}}$ eloszlása f szabadsági fokú **t-eloszlás**.

2. Egymintás egyoldali t-próba (one-sample one-sided t-test)

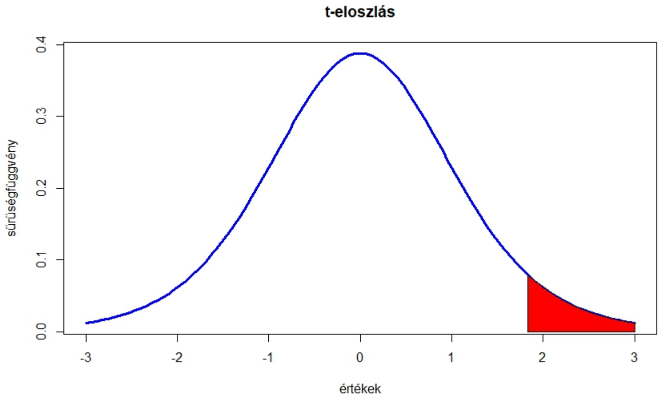
- **A normális eloszlás várható értékére, ismeretlen szórás esetén – legerősebb próba.**
- $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim N(m, \sigma^2)$, ahol m, σ ismeretlen paraméterek.
- Próbastatisztika, aminek eloszlása t-eloszlás H_0 mellett a Fisher–Bartlett-tétel szerint:

$$t = \frac{\overline{X} - m_0}{s_n^*} \cdot \sqrt{n}.$$

- **Egyoldali ellenhipotézis** (one-sided): $H_0 : m \leq m_0$; $\quad H_1 : m > m_0$.
- Ha $t > \bar{t}_{n-1,\alpha}$, azaz $p < \alpha$, elutasítjuk a nullhipotézist; ilyenkor a várható érték szignifikánsan több m_0-nál.
- Ha $t \leq \bar{t}_{n-1,\alpha}$, azaz $p \geq \alpha$, elfogadjuk a nullhipotézist, a várható érték nem több szignifikánsan m_0-nál az adatok alapján.
- A kritikus érték: $\bar{t}_{n-1,\alpha}$ az $f = n-1$ szabadsági fokú (degree of freedom) t-eloszlás $1-\alpha$-kvantilise, vagyis az $f = n-1$ szabadsági fokú egyoldali t-próba kritikus értéke α szignifikanciaszint (level of significance) mellett.

A $\bar{t}_{n-1,\alpha}$ az $f = n-1$ szabadsági fokú t-eloszlás felső $1-\alpha$-kvantilise:

$$1 - \alpha = \mathbb{P}(Y \leq \bar{t}_{f,\alpha}) = \mathbb{P}\left(\frac{Z_0}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_f^2}} \leq \bar{t}_{f,\alpha}\right).$$



2. ábra. Az $f = 9$ szabadsági fokú $\alpha = 0,05$ szignfikianciaszintű egyoldali t-próba kritikus értéke: $\bar{t}_{9,0,05} = 1,83$.

A p-érték ebben az esetben annak valószínűsége, hogy az adott szabadsági fokú t-eloszlás értéke t-nél nagyobb. Ez a 2. ábrán a t értékétől jobbra lévő terület. Minél nagyobb a t, annál kisebb lesz a p, vagyis annál szignifikánsabb az eltérés. A p-érték az R-ben így számolható ki:

```
pt(t, df=f, lower.tail=FALSE)
```

Ha `lower.tail=TRUE` lenne, az annak valószínűségét adná, hogy a t-eloszlás a t-nél kisebb, ez a t-től balra eső terület (a teljes görbe alatti terület 1, így a kettő összege is 1).

Példa: egymintás egyoldali t-próba

Egy adott helyen vett tíz mintából megmértük az ivóvíz keménységét. Az alábbi eredmények adódtak (mg/l CaO):

351	370	352	340	362	363	366	355	374	347

Állíthatjuk-e az adatok alapján, hogy az ivóvíz keménységének várható értéke szignifikánsan meghaladja a 350 mg/l egészségügyi határértéket?

$$n = 10; \qquad \overline{X} = 358; \qquad s_n^* = 10,77$$

Feltételezzük, hogy a mérési eredmények normális eloszlásúak, **az egymintás egyoldali t-próbát** alkalmazzuk: $H_0 : m \leq 350$; $H_1 : m > 350$.

$$t = \frac{\overline{X} - m_0}{s_n^*} \cdot \sqrt{n} = \frac{358 - 350}{10,77}\sqrt{10} = 2,35.$$

Az $f = n - 1 = 9$ szabadsági fokú egyoldali t-próba kritikus értéke $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett $\bar{t}_{9;0,05} = 1,833$.

Mivel $t > \bar{t}_{9;0,05}$, **elutasítjuk a nullhipotézist**, a vízkeménység szignifikánsan meghaladja 350 mg/l határértéket. A p-érték: $p = 0,0217 < 0,05$.

Ez az R-ben így számítható ki:

```
pt(2.35, df=9, lower.tail=FALSE)
[1] 0.02165254
```

Megoldás az R-ben:

```
> viz<-c(348, 367, 349, 337, 359, 360, 363, 352, 371, 344)
> t.test(viz, mu=350, alternative="greater")
One Sample t-test
data:  viz
t = 2.3489, df = 9, p-value = 0.02169
```

```
alternative hypothesis:  true mean is greater than 350
95 percent confidence interval:  351.7566 Inf
mean of x :  358
```

Most $p = 0.02169 < 0,05 = \alpha$, elutasítjuk a nullhipotézist (emlékeztető, minél kisebb a p-érték, annál szignifikánsabb az eltérés, és akkor utasítjuk el a nullhipotézist, ha $p < \alpha$.

3. Egymintás kétoldali t-próba (one-sample two-sided t-test)

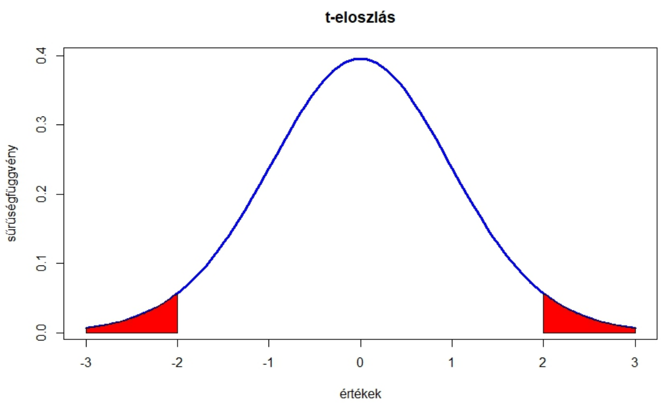
- **A normális eloszlás várható értékére, ismeretlen szórás esetén.** Nem legerősebb (nincs ilyen).
- $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim N(m, \sigma^2)$, ahol m, σ ismeretlen paraméterek.
- Próbastatisztika (eloszlása t-eloszlás/Student-eloszlás H_0 mellett):

$$t = \frac{\overline{X} - m_0}{s_n^*} \cdot \sqrt{n}.$$

- **Kétoldali ellenhipotézis** (two-sided): $H_0 : m = m_0$; $\qquad H_1 : m \neq m_0$.
- Ha $|t| > t_{n-1,\alpha}$, azaz $p < \alpha$, akkor elutasítjuk a nullhipotézist, a várható érték szignifikánsan eltér m_0-tól.
- Ha $|t| \leq t_{n-1,\alpha}$, azaz $p \geq \alpha$, akkor elfogadjuk H_0-t, a várható érték nem tér el szignifikánsan m_0-tól.
- A kritikus érték: $t_{n-1,\alpha}$ az $f = n-1$ szabadsági fokú (degree of freedom) t-eloszlás $1-\alpha/2$-kvantilise, vagyis az $f = n-1$ szabadsági fokú (degree of freedom) kétoldali t-próba kritikus értéke α szignifikanciaszint mellett.

Legyenek $Z_0, Z_1, \ldots, Z_n$ független $N(0,1)$ eloszlásúak, és $t_{f,\alpha}$ az f szabadsági fokú α terjedelmű kétoldali t-próba kritikus értéke, azaz az f szabadsági fokú t-eloszlás $1-\alpha/2$-kvantilise:

$$1 - \alpha/2 = \mathbb{P}(Y \leq t_{f,\alpha}) = \mathbb{P}\left(\frac{Z_0}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_f^2}} \leq t_{f,\alpha}\right).$$



3. ábra. Az $f = 29$ szabadsági fokú $\alpha = 0,05$ szignfikianciaszintű kétoldali t-próba kritikus értéke: $t_{29;0,05} = 2,04$.

A p-érték ilyenkor annak valószínűsége, hogy a t eloszlás abszolút értéke több t-nél. Ez a 3. ábrán a $|t|$-től jobbra eső terület kétszerese. Minél nagyobb a t abszolút értéke, annál kisebb lesz ez a terület, vagyis annál szignifikánsabb az eltérés. Az R-ben ez így számolható:

```
2*pt(abs(t), df=f, lower.tail=FALSE)
```

Erre közelítő táblázat van: t értéke valójában tetszőleges lehet, és a szabadsági fok is sokféle, így a t értékét csak kerekítve tudjuk figyelembe venni a táblázatban. Ha a szabadsági fok legalább 30, akkor a t-eloszlás a standard normális eloszláshoz van közel, így ehelyett az $1-\Phi^{-1}(t)$-t is használhatjuk közelítésként.

Példa: Egymintás kétoldali t-próba

Egy gyógyszer hatóanyagtartalma a csomagolás szerint 10 mg. Harminc tabletta hatóanyag-tartalmát megmérve a mérések átlaga $9,8$, korrigált tapasztalati szórása $0,62$ lett. A szignifikanciaszintet $\alpha = 0,05$-nek választva az adatok alapján szignifikánsan eltér-e a hatóanyag-tartalom várható értéke a 10 mg-tól?

$$n = 30; \qquad \overline{X} = 9,8; \qquad s_n^* = 0,62$$

Egymintás kétoldali t-próbát végezhetünk, normális eloszlást feltételezve.

$$H_0 : m = 10; \qquad H_1 : m \neq 10; \qquad \alpha = 0,05; \qquad f = n-1 = 29.$$

$$t = \frac{\overline{X} - m_0}{s_n^*} \cdot \sqrt{n} = \frac{9,8-10}{0,62} \cdot \sqrt{30} = -1,77.$$

A kritikus érték: $t_{29,0,975} = 2,045 \Rightarrow |t| = 1,77 \leq 2,045$, nincs szignifikáns eltérés. p-érték: $p = 0,0867 \geq 0,05$.

A p-érték kiszámítása az R-ben:

```
2*pt(abs(-1.77), df=29, lower.tail=FALSE)
[1] 0.08724161
```

4. Kétmintás z-próba

Gyakran előfordul, hogy két különböző csoportba tartozó egyedeket akarunk összehasonlítani. Ebben az esetben azt tesszük fel, hogy a mérési eredmények függetlenek (minden mérés mindegyik másiktól), normális eloszlásúak, a várható érték az egyik csoportban m_1, a másikban m_2, a szórás az egyik csoportban σ_1, a másikban σ_2. Ezután kérdezhetjük, hogy a két várható érték szignifikánsan eltér-e, vagy hogy az egyik szignifikánsan nagyobb-e a másiknál. A z-próba akkor végezhető, ha a szórások ismertek, a hipotézis a várható értékekre vonatkozik.

Legyenek most $X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}, Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ független normális eloszlású valószínűségi változók, ahol $X_i \sim N(m_1, \sigma_1^2)$, $Y_i \sim N(m_2, \sigma_2^2)$. Itt m_1, m_2 ismeretlen paraméterek, σ_1, σ_2 ismertek.

A próbastatisztika, ami alapján a döntést hozzuk:

$$z = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}}.$$

A $H_0 : m_1 = m_2$ hipotézis mellett az u statisztika standard normális eloszlású.

Ha α a próba terjedelme (szignifikanciaszintje), akkor az alábbi eljárást végezhetjük.

- Kétoldali ellenhipotézis: $H_0 : m_1 = m_2; \qquad H_1 : m_1 \neq m_2.$

  Ha $|z| > \Phi^{-1}(1-\alpha/2)$, akkor elutasítjuk a nullhipotézist (a két várható érték szignifikánsan eltér), különben elfogadjuk (nincs szignifikáns eltérés a várható értékekt között).

- Egyoldali ellenhipotézis, balról:

  $H_0 : m_1 \leq m_2; \qquad H_1 : m_1 > m_2.$

  Ha $z > \Phi^{-1}(1-\alpha)$, akkor elutasítjuk a nullhipotézist (az első várható érték szignifikánsan nagyobb a másodiknál), különben elfogadjuk (nem igaz, hogy az első várható érték szignifikánsan nagyobb a másodiknál).

Példa: z**-próba.** Megmérték nyolc beagle fajtájú kutya testtömegét, az alábbi eredmények adódtak (kg):

16,9 11,5 9,7 14,2 12,0 10,8 13,9 15,6

Tegyük fel, hogy a beagle esetén a testtömeg normális eloszlású, és 2 a szórása.

(a) Elfogadható-e az a hipotézis $\alpha = 0,05$ terjedelem mellett, hogy a beagle testtömegének várható értéke 12?

egymintás kétoldali z-próba; $H_0 : m = 12$; $H_1 : m \neq 12$.

$$|z| = \frac{\overline{X} - m_0}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{13,075 - 12}{2}\sqrt{8} = 1,52 \;\Rightarrow\; |z| < \Phi^{-1}(1-\alpha/2) = \Phi^{-1}(0,975) = 1,96.$$

Elfogadható a nullhipotézis, a várható érték nem tér el szignifikánsan 12-től. A p-érték $0,12 > 0,05$.

(b) Elfogadható-e $\alpha = 0,02$ terjedelem mellett ugyanez a hipotézis?

$$|z| = 1,52 < \Phi^{-1}(1-\alpha/2) = \Phi^{-1}(0,99) = 2,33.$$

Így is elfogadható a nullhipozézis. Általában is, ha magasabb terjedelem mellett elfogadjuk a nullhipotézist, akkor minden alacsonyabb terjedelem mellett is.

(c) Elfogadható-e 95%-os szinten az a hipotézis, hogy a beagle testtömegének várható értéke nem több 13-nál?

egymintás egyoldai z-próba: $H_0 : m \leq 13$; $H_1 : m > 13$

$$z = \frac{\overline{X} - m_0}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{13,075 - 13}{2}\sqrt{8} = 0,11 \;\Rightarrow\; z < \Phi^{-1}(1-\alpha) = \Phi^{-1}(0,95) = 1,65.$$

Vagyis elfogadjuk a nullhipotézist, a beagle-k testtömege a megadott minta alapján nem haladja meg szignifikánsan a 13 kg-ot.

(d) Néhány terrier testtömegét is megmérték:

$$12,0 \qquad 11,9 \qquad 9,6 \qquad 10,6 \qquad 14,5$$

Itt a mérések szórását 1,2-nek feltételezzük. Állíthatjuk-e $\alpha = 0,05$ terjedelem mellett, hogy a beagle fajtájú kutyák nehezebbek a terriereknél?

Kétmintás egyoldali z-próba; $H_0 : m_1 \leq m_2$, $H_1 : m_1 > m_2$.

$$z = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{13,075 - 11,72}{\sqrt{\frac{2^2}{8} + \frac{1,2^2}{5}}} = 0,94 \Rightarrow z < \Phi^{-1}(0,95) = 1,65.$$

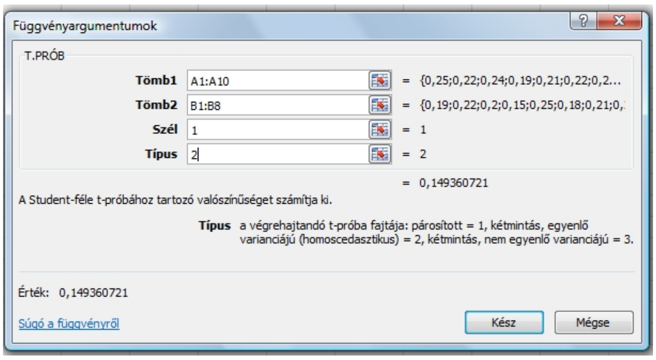
Elfogadjuk a nullhipotézist, nem állíthatjuk, hogy a beagle kutyák nehezebbek.

5. Kétmintás, egyoldali, párosítatlan Student-féle t-próba

Ez a próba a **várható érték összehasonlítására** szolgál **azonos szórás esetén** (two-sample one-sided unpaired Student t-test).

Két különböző csoportra jellemző várható értékek összehasonlításánál is gyakori, hogy a szórásokat valójában nem ismerjük, csak a mintából kiszámítható korrigált tapasztalati szórásokat. Viszont Student-féle t-próba feltételei közé tartozik az is, hogy a szórások, bár nem ismertek, a két csoportban azonosak. Például: két tárgy, élőlény stb. valamilyen jellemzőjét mérjük ugyanazzal a mérési eljárással, és feltesszük, hogy a mérési eredmények szórása a mérési eljárástól függ, nem a mért érték várható értékétől.

$X_1, \ldots, X_{n_1}, Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ **független normális eloszlású** **azonos szórású** valószínűségi változók: $X_i \sim N(m_1, \sigma^2)$, $Y_i \sim N(m_2, \sigma^2)$, ahol m_1, m_2, σ ismeretlen paraméterek.



4. ábra. Kétmintás t-próba: egyoldali, azonos szórással; a válasz a p-érték

Egyoldali ellenhipotézis: $H_0 : m_1 \leq m_2$; $H_1 : m_1 > m_2$.

Próbastatisztika (eloszlása t-eloszlás $m_1 = m_2$ mellett):

$$t = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{(n_1-1)s_{n_1}^{*2}(X) + (n_2-1)s_{n_2}^{*2}(Y)}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}}.$$

Ha $t > \bar{t}_{n_1+n_2-2,\,\alpha}$, akkor elvetjük a nullhipotézist, különben elfogadjuk. A $\bar{t}_{n_1+n_2-2,\,\alpha}$ kritikus érték az $f = n_1 + n_2 - 2$ szabadsági fokú **egyoldali** t-próba kritikus értéke α szignifikanciaszint mellett (a megfelelő eloszlás $1-\alpha$-kvantilise, 2. ábra)

Ha $p < \alpha$: elutasítjuk H_0-t, az első várható érték szignifikánsan nagyobb a másodiknál.

***t*-próba: példa** Egy napon tíz budapesti helyszínen megmérték a NO_2-koncentrációt. Az átlag 352 μg/m^3, a korrigált tapasztalati szórás 8 lett.

(a) 5%-os szignifikanciaszint mellett elfogadható-e az a hipotézis, hogy a koncentráció a 350 μg/m^3 tájékoztatási küszöbérték alatt van? egymintás egyoldali t-próba, $n = 10$, $f = n - 1 = 9$, $\alpha = 0,05$

$$t = \frac{\overline{X} - m_0}{s_n^*}\sqrt{n} = \frac{352-350}{8}\sqrt{10} = 0,79 < t_{\text{krit}} = 1,83.$$

elfogatható a nullhipotézis

(b) Elfogadható-e ugyanez a hipotézis 1%-os szignifikanciaszint mellett?

$t_{\text{krit}} = 2,81 > 0,79$, elfogadható a hipotézis.

(c) Londonban 20 mérésből az átlagos koncentráció 376, a korrigált tapasztalati szórás 16 lett. $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint (terjedelem) mellett állíthatjuk-e, hogy Londonban szignifikánsan nagyobb a NO_2 koncentrációja?

kétmintás egyoldali t-próba, $f = n_1 + n_2 - 2 = 10 + 20 - 2 = 28$, $\alpha = 0,05$, $t_{\text{krit}} = 1,701$.

$$t = \frac{\overline{Y} - \overline{X}}{\sqrt{(n_1-1){s_{n_1}^*}^2(X) + (n_2-2){s_{n_2}^*}^2(Y)}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}} = \frac{376-352}{\sqrt{9 \cdot 8^2 + 19 \cdot 16^2}} \cdot \sqrt{\frac{10 \cdot 20 \cdot 28}{30}} = 4,44.$$

Londonban szignifikánsan nagyobb a NO_2 koncentrációja. A p-érték: $p = 6,4 \cdot 10^{-5}$.

Ez a kétmintás egyoldali t-próba R-ben: `t.test(budapest, london, alternative ="less"), paired = FALSE, var.equal = TRUE)`

6. Kétmintás, kétoldali, párosítatlan Student-féle *t*-próba

A **várható érték összehasonlítására** azonos szórás esetén (two-sample two-sided unpaired Student t-test).

$X_1,\dots,X_{n_1},Y_1,\dots,Y_{n_2}$ **független normális eloszlású** **azonos szórású** valószínűségi változók: $X_i \sim N(m_1,\sigma^2)$, $Y_i \sim N(m_2,\sigma^2)$, ahol m_1,m_2,σ ismeretlen paraméterek.

Kétoldali ellenhipotézis: $H_0: m_1 = m_2$; $H_1: m_1 \neq m_2$.

Próbastatisztika (eloszlása t-eloszlás H_0 mellett):

$$t = \frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{(n_1-1)s_{n_1}^{*2}(X)+(n_2-1)s_{n_2}^{*2}(Y)}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}}.$$

Ha $|t| > t_{n_1+n_2-2,1-\alpha}$, akkor elvetjük a nullhipotézist, különben elfogadjuk. A $t_{n_1+n_2-2,1-\alpha}$ kritikus érték az $f = n_1+n_2-2$ szabadsági fokú **kétoldali** t-próba kritikus értéke α szignifikanciaszint mellett (a megfelelő eloszlás $1-\alpha/2$-kvantilise: 3. ábra).

Ha $p < \alpha$: elutasítjuk H_0-t, az várható értékek szignifikánsan eltérnek egymástól.

Ez a kétmintás kétoldali t-próba R-ben: `t.test(x, y, alternative ="equal"), paired = FALSE, var.equal = TRUE)`

Kétmintás t-próba: példa

Tegyük fel, hogy egy biztosító kétféle termékén az összkár lognormális eloszlású, azaz a logaritmusa normális eloszlású (ezután csak a logaritmust tekintjük). Az első terméknél $n_1 = 20$, a másodiknál $n_2 = 12$ éven át figyelték meg az összkár logaritmusát.

Az átlagok és korrigált tapasztalati szórások: ($X_1,\dots,X_{20}$ az első minta, $Y_1,\dots,Y_{12}$ a második):

$$\overline{X} = \mathbf{18,4}, \qquad s_n^*(X) = 1,2, \qquad \overline{Y} = \mathbf{19,9}, \qquad s_n^*(Y) = 1,3.$$

Állíthatjuk-e $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett, hogy a kétféle termék esetén szignifikánsan eltérő az összkár? Feltételezzük, hogy a minták **függetlenek, normális eloszlásúak**, **azonos szórásúak**.

$$t = \frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{(n_1-1)s_{n_1}^{*2}(X)+(n_2-1)s_{n_2}^{*2}(Y)}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}}.$$

Behelyettesítve:

$$t = \frac{18,4-19,9}{\sqrt{19\cdot 1,2^2 + 11\cdot 1,3^2}} \cdot \sqrt{\frac{20\cdot 12\cdot 30}{32}} = -3,3.$$

Az $f = n_1+n_2-2 = 20+12-2 = 30$ szabadsági fokú **kétoldali** t-próba kritikus értéke $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett: $t_{30,0,05} = 2,042$.

Itt $|t| = 3,3 > 2,042 = t_{30,0,05}$, ezért **elutasítjuk H_0-t**. A kétféle összkár logaritmusának várható értéke **szignifikánsan különböző** – ha a szórások azonosak, és a próba alkalmazható (ezt eddig feltettük).

A p-érték: $p = 0,0025 < 0,05$, az eltérés szignifikáns.

7. Normális eloszlásra vonatkozó kétmintás próbák

Az alábbiakat kell ellenőrizni kétmintás próbáknál:

- A minta **normális eloszlású**, vagy a mintaelemszám elég nagy és a szórás feltehetően véges (a centrális határeloszlástétel alapján az átlag közel normális eloszlású).
- Kétmintás esetben: a **két minta egymástól független** ("unpaired" eset). Ha a két minta természetes módon párosítható, **párosított** ("paired") próba alkalmazható. Példa: megfigyeljük húsz ember egyhavi kiadását januárban és áprilisban. Igaz-e, hogy a januári szignifikánsan eltér az áprilisitól?
- Ha a **szórásokról feltételezhetjük, hogy megegyeznek**: a Student-féle t-próba alkalmazható.
- Ha a **szórásokról nem tételezhetjük fel, hogy megegyeznek**: a Welch-féle t-próba alkalmazható.

7.1. Példa: párosított t-próba

1991 és 2010 között feljegyezték az éves csapadékösszeget Budapesten, illetve Szegeden. Az átlag Budapesten 533 mm, a korrigált tapasztalati szórás 139, Szegeden az átlag 540 mm, a korrigált tapasztalati szórás 143 lett (forrás: Országos Meteorológiai Szolgálat). Állíthatjuk-e, hogy Szegeden szignifikánsan nagyobb a csapadékmennyiség várható értéke?

év	1991	1992	1993	1994	1995	...	átlag	s_n^*
Budapest	594	364	505	481	575	...	**533**	139
Szeged	617	457	408	399	562	...	**540**	143

A két adatsor **nem független**, mert egy éven belül a két város időjárása nem független (az egyes minták sem teljesen függetlenek, és nem biztos, hogy normális eloszlásúak). Ezért **párosított** (paired) t-próba alkalmazható, egyoldali nullhipotézissel.

$H_0 : m_1 \geq m_2$, $H_1 : m_1 < m_2$, ahol m_1 a budapesti, m_2 a szegedi csapadékmennyiség várható értéke.

A próbát elvégezve a p-értékre $0,366$ adódott. Ez több, mint $\alpha = 0,05$.

Elfogadjuk a nullhipotézist, az adatok alapján Szegeden nem több szignifikánsan a csapadékmennyiség várható értéke, mint Budapesten.

Ez a kétmintás kétoldali t-próba R-ben: `t.test(x, y, alternative ="equal"), paired = TRUE, var.equal = TRUE)`

7.2. Welch-féle t-próba

A **várható érték összehasonlítására** párosítatlan esetben (two-sample two-sided unpaired Welch t-test). Legyenek $X_1, \ldots, X_{n_1}, Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ **független normális eloszlású** valószínűségi változók: $X_i \sim N(m_1, \sigma_1^2)$, $Y_i \sim N(m_2, \sigma_2^2)$, ahol $m_1, m_2, \sigma_1, \sigma_2$ ismeretlen paraméterek.

Kétoldali ellenhipotézis: $H_0 : m_1 = m_2$; $H_1 : m_1 \neq m_2$.

Próbastatisztika:

$$t = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{s_{n_1}^{*2}(X)}{n_1} + \frac{s_{n_2}^{*2}(Y)}{n_2}}}.$$

Ha $|t| > t_{f,1-\alpha}$, akkor elvetjük a nullhipotézist, különben elfogadjuk. A $t_{f,1-\alpha}$ kritikus érték az f szabadsági fokú **kétoldali** t-próba kritikus értéke α szignifikanciaszint mellett (a megfelelő eloszlás $1 - \alpha/2$-kvantilise).

Szabadsági fok:

$$f \approx \frac{\left(\frac{s_{n_1}^{*2}(X)}{n_1} + \frac{s_{n_2}^{*2}(Y)}{n_2}\right)^2}{\frac{s_{n_1}^{*4}(X)}{n_1^2(n_1-1)} + \frac{s_{n_2}^{*4}(Y)}{n_2^2(n_2-1)}}.$$

Ha $p < \alpha$: elutasítjuk H_0-t, az várható értékek szignifikánsan eltérnek egymástól.

Ez a kétmintás kétoldali t-próba R-ben: `t.test(x, y, alternative ="equal"), paired = FALSE, var.equal = FALSE)`

Egyoldali ellenhipotézis: $H_0 : m_1 \leq m_2$; $H_1 : m_1 > m_2$.

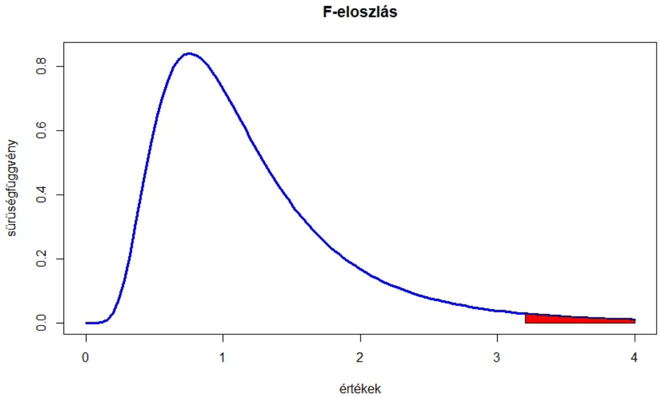
Próbastatisztika: ugyanaz, mint az előbb

Ha $t > \bar{t}_{f,1-\alpha}$, akkor elvetjük a nullhipotézist, különben elfogadjuk. A $\bar{t}_{f,1-\alpha}$ kritikus érték az f szabadsági fokú **egyoldali** t-próba kritikus értéke α szignifikanciaszint mellett (a megfelelő eloszlás $1 - \alpha$-kvantilise).

Szabadsági fok: ugyanúgy, mint az előbb.

Ha $p < \alpha$: elutasítjuk H_0-t, az várható értékek szignifikánsan eltérnek egymástól.

Ez a kétmintás egyoldali t-próba R-ben: `t.test(x, y, alternative ="greater"), paired = FALSE, var.equal = FALSE)`



5. ábra. Az F-próba kritikus értéke: $F_{19,11} = 3,24$, ez az eloszlás $1 - \alpha/2 = 0,975$-kvantilise

8. F-próba

Független normális eloszlású minták **szórásának** összehasonlítására. Ugyanis az is előfordulhat, hogy nem (csak) a várható értéket, hanem a szórást is össze akarjuk hasonlítani. Például: igaz-e, hogy a havi kiadások szórása nagyobb Budapesten, mint más településeken, vagy hogy két mérési eljárás közül az egyiknek szignifikánsan nagyobb a szórása.

- Legyenek most $X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}, Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ független normális eloszlású valószínűségi változók, ahol $X_i \sim N(m_1, \sigma_1^2)$, $Y_i \sim N(m_2, \sigma_2^2)$. Itt $m_1, m_2, \sigma_1, \sigma_2$ ismeretlen paraméterek.
- Kétoldali ellenhipotézis: $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$; $\quad H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$.
- Próbastatisztika (eloszlása F-eloszlás H_0 mellett):
$$F = \frac{s_{n_1}^{*2}}{s_{n_2}^{*2}}.$$
- Ha $F > F_{n_1-1,n_2-1}$ vagy $1/F > F_{n_2-1,n_1-1}$, akkor elvetjük a nullhipotézist, különben elfogadjuk, ahol F_{f_1,f_2} az f_1, f_2 szabadsági fokú az F-eloszlás $1 - \alpha/2$-kvantilise.

$p < 0,05$: a szórások szignifikánsan eltérnek.

Kétmintás F-próba: példa

A korábbi példában az összkár logaritmusának szórását szeretnénk összehasonlítani. Az első termék esetében $n_1 = 20$, a második esetében $n_2 = 12$ éven át figyelték meg az összkárt. Az átlagok és korrigált tapasztalati szórások ($X_1, \ldots, X_{20}$ az első minta, $Y_1, \ldots, Y_{12}$ a második):

$$\overline{X} = 18,4, \qquad s_n^*(X) = 1,2, \qquad \overline{Y} = 19,9, \qquad s_n^*(Y) = 1,3.$$

Állíthatjuk-e $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett, hogy a kétféle termék esetében szignifikánsan eltérő az összkár szórása? Feltételezzük, hogy a minták **függetlenek, normális eloszlásúak**.

$H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$, $H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$

A próbastatisztika értéke: $F = \frac{s_{n_1}^{*2}}{s_{n_2}^{*2}} = \frac{1,2^2}{1,3^2} = 0,85$, és $\frac{1}{F} = \frac{1,3^2}{1,2^2} = 1,17$.

Az $(f_1, f_2) = (n_1 - 1, n_2 - 1) = (19, 11)$ szabadsági fokú F-próba kritikus értéke $\alpha = 0,05$ esetén: $3,24$, míg az $(f_2, f_1) = (n_2 - 1, n_1 - 1) = (11, 19)$ szabadsági fok esetén $2,76$.

Mivel $F < 3,24$ és $1/F < 2,76$, **elfogadjuk a nullhipotézist**, a szórások nem térnek el szignifikánsan. (Vagyis, a fent alkalmazott kétmintás t-próbánál nem volt teljesen helytelen a feltételezés, hogy a szórások megegyeznek, de általában, ha nem biztos, hogy a szórások lényegében azonosak, akkor inkább a nem feltétlenül egyenlő szórásokra vonatkozó eljárást érdemes használni).

Házi feladat április 8., 8:15-ig Az utazási időkre vonatkozó mintáról feltételezve, hogy a megfigyelések normális eloszlásúak (noha a kerekítések miatt nem azok, és a mintaelemszám sem igazán nagy) mit mondhatunk az alábbi kérdésekről:

- igaz-e, hogy a nők utazási idejének várható értéke szignifikánsan több a férfiakénál?
- igaz-e, hogy a férfiak és a nők utazási idejének szórása szignifikánsan eltérő?

Házi feladat április 1-ig, megoldás. Az ismerősöktől gyűjtött adatok alapján állíthatjuk-e, hogy az ismerősök utazási idejének várható értéke szignifikánsan több 60 percnél? Ehhez feltételezzük, hogy az utazási idő szórása 30 perc, és az utazási idő normális eloszlású (még ha a kerekítések miatt nem is az).

Egymintás egyoldali z-próbát végzünk, hiszen a szórás ismert. $H_0 : m \leq 60$; $H_1 : m > 60$.

```
> utazas<-c(0, 45, 120, 120, 60, 60, 30, 60, 100, 70, 180, 40, 60, 100, 80, 90, 120, 60,
30, 70, 60, 20, 60, 10, 120, 60, 120, 130)
```

A z értéke:

```
> (mean(utazas)-60)/30*sqrt(length(utazas))
```

```
[1] 2.488266
```

A kritikus érték: $\Phi^{-1}(1-\alpha)$

```
> qnorm(0.95)
```

```
[1] 1.644854
```

Mivel $z > \Phi^{-1}(1-\alpha)$, elutasítjuk H_0-t, az utazási idő várható értéke szignifikánsan több 60 percnél.

A p-érték:

```
> 1-pnorm(2.488)
```

```
[1] 0.006423187
```

Excelben a kritikus érték: NORM.S.INV(0.95), és a p-érték: 1-NORM.S.DIST(2.488, TRUE)