

## Normális eloszlás paramétereire vonatkozó próbák (8. ea.)

Az alábbi próbák akkor használhatók, ha

- a megfigyelések függetlenek, és feltételezhetjük, hogy normális eloszlásúak
- a megfigyelések függetlenek, véges szórású eloszlásból származnak, és a minta mérete, azaz  $n$  "elég nagy", például  $n \geq 100$
- **z-próba** (vagy  $u$ -próba): **várható értékre** vonatkozó hipotézis esetén, ha  **$\sigma$  szórás ismert**
- **t-próba** (vagy Student-próba): **várható értékre** vonatkozó hipotézis esetén, ha  **$\sigma$  szórás nem ismert** (csak az  $s_n^*$  tapasztalati szórás)
- **F-próba**: **szórásra** vonatkozó hipotézis esetén

**Kapcsolat a konfidenciaintervallummal:** egymintás próbánál akkor fogadjuk el a nullhipotézist  $\alpha$  szignifikanciaszint mellett, ha a benne megadott érték (várható érték vagy szórás) az  $1 - \alpha$  megbízhatósági szintű konfidenciaintervallumba esik.

## Egymintás egyoldali z-próba (one-sample one-sided z test)

A próba a normális eloszlás várható értékére vonatkozik ismert szórás mellett. Torzítatlan, konzisztens, **legerősebb próba** egyoldali esetben (a Neyman–Pearson-lemma alapján bizonyítható).

- $X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(m, \sigma^2)$ , ahol  $m$  ismeretlen paraméter,  $\sigma > 0$  ismert.
- Próbastatisztika (eloszlása standard normális  $H_0$  mellett, ezt beláttuk):

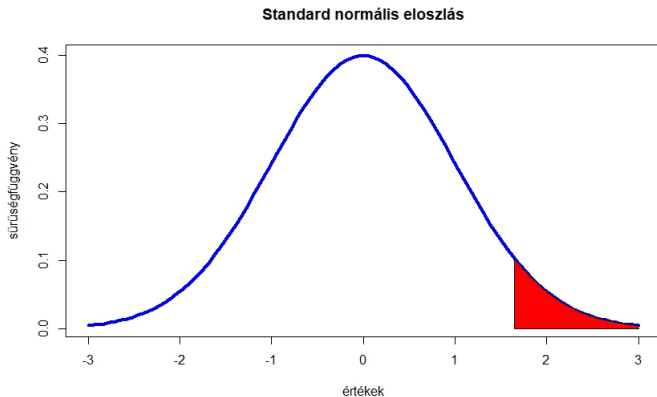
$$z = \frac{\bar{X} - m_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n}.$$

- **Egyoldali ellenhipotézis** (one-sided):  $H_0 : m \leq m_0$ ;  $H_1 : m > m_0$ .
- Ha  $z > \Phi^{-1}(1 - \alpha)$ , akkor elvetjük a nullhipotézist, különben elfogadjuk.
- A  $p$ -érték ilyenkor  $1 - \Phi(z)$ .

$p < 0,05$ : a várható érték szignifikánsan több  $m_0$ -nál.

$p \geq 0,05$ : a várható érték nem több szignifikánsan  $m_0$ -nál.

# Az egyoldali z-próba kritikus értéke



Az  $\alpha = 0,05$  szignifikanciaszintű egyoldali z-próba kritikus értéke:  
 $\Phi^{-1}(1 - \alpha) = \Phi^{-1}(0,95) = 1,645$ .

## Példa: egymintás egyoldali z-próba

Feltételezés: a testmagasság normális eloszlású.

- Az európai férfiak átlagos testmagassága 177,6 cm.
- Megmértük 90 holland férfi testmagasságát, a magasságok átlaga 181,7 cm lett. A szórást 8,5 cm-nek feltételezve mondhatjuk-e, hogy a holland férfiak testmagassága szignifikánsan több az európai átlagnál?

## Példa: egymintás egyoldali z-próba

Feltételezés: a testmagasság normális eloszlású.

- Az európai férfiak átlagos testmagassága 177,6 cm.
- Megmértük 90 holland férfi testmagasságát, a magasságok átlaga 181,7 cm lett. A szórást 8,5 cm-nek feltételezve mondhatjuk-e, hogy a holland férfiak testmagassága szignifikánsan több az európai átlagnál?

- $H_0 : m \leq 177,6$ ;       $H_1 : m > 177,6$ .

- 

$$z = \frac{\bar{X} - m_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n} = \frac{181,7 - 177,6}{8,5} \sqrt{90} = 4,57.$$

- $\alpha = 0,05$  szignifikanciaszint mellett  $\Phi^{-1}(1 - \alpha) = 1,645$ , így  $z > \Phi^{-1}(1 - \alpha)$ .  
 $p$ -érték:  $1 - \Phi(4,57) < 0,0001 < 0,05$ .
- Elutasítjuk a nullhipotézist. Az adatok alapján a holland férfiak testmagasságának várható értéke szignifikánsan több 177,6 cm-nél, vagyis az európai átlagnál.

## Egymintás kétoldali z-próba

A próba a normális eloszlás várható értékére vonatkozik ismert szórás mellett. Nem legerősebb (nincs legerősebb próba ebben a feladatban).

- $X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(m, \sigma^2)$ , ahol  $m$  ismeretlen paraméter,  $\sigma > 0$  ismert.
- Próbastatisztika (eloszlása standard normális  $H_0$  mellett):

$$z = \frac{\bar{X} - m_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n}.$$

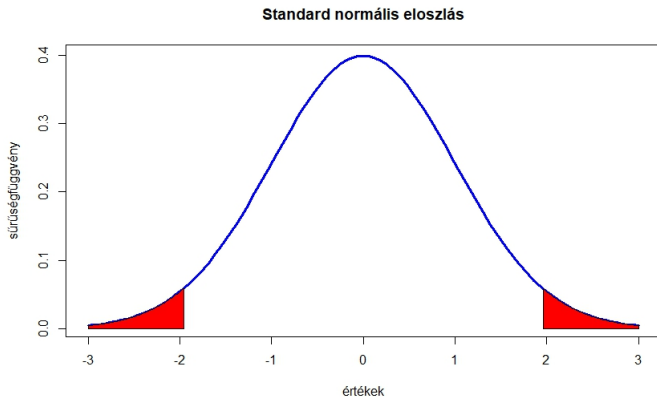
- **Kétoldali ellenhipotézis** (two-sided):  $H_0 : m = m_0$ ;  $H_1 : m \neq m_0$ .
- Ha  $|z| > \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$ , akkor elvetjük a nullhipotézist, különben elfogadjuk.
- A  $p$ -érték ilyenkor  $2 - 2\Phi(|z|)$ .

$\Phi$  a standard normális eloszlásfüggvény:  $\Phi(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$ .

$p < 0,05$ : a várható érték szignifikánsan eltér  $m_0$ -tól.

$p \geq 0,05$ : nincs szignifikáns eltérés  $m_0$ -tól.

## A kétoldali z-próba kritikus értéke



Az  $\alpha = 0,05$  szignifikanciaszintű kétoldali z-próba kritikus értéke:

$$\Phi^{-1}(1 - \alpha/2) = \Phi^{-1}(0,975) = 1,96.$$

## Példa: egymintás z-próba

Egy gyárban a minőségellenőrzésnél olyan mérleget használnak, melynél egy  $m$  tömegű tárgyat mérve a mérési eredmények független normális eloszlású valószínűségi változók  $m$  várható értékkel és  $\sigma = 3$  gramm szórással.

- A termékkatalógus szerint egy adott típusú kalapács fejének 364 g tömegűnek kell lennie.
- A fenti mérlegen megmérték 20 kalapács fejének tömegét. Az átlag 367,2 gramm lett. Ez alapján állítható-e, hogy a kalapácsok fejének tömege szignifikánsan eltér az előírt 364 grammtól?

## Példa: egymintás z-próba

Egy gyárban a minőségellenőrzésnél olyan mérleget használnak, melynél egy  $m$  tömegű tárgyat mérve a mérési eredmények független normális eloszlású valószínűségi változók  $m$  várható értékkel és  $\sigma = 3$  gramm szórással.

- A termékkatalógus szerint egy adott típusú kalapács fejének 364 g tömegűnek kell lennie.
- A fenti mérlegen megmérték 20 kalapács fejének tömegét. Az átlag 367,2 gramm lett. Ez alapján állítható-e, hogy a kalapácsok fejének tömege szignifikánsan eltér az előírt 364 grammtól?

- $H_0 : m = 364$ ;  $H_1 : m \neq 364$ .

- 

$$z = \frac{\bar{X} - m_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n} = \frac{367,2 - 364}{3} \sqrt{20} = 4,77.$$

- $\alpha = 0,05$  szignifikanciaszint mellett  $\Phi^{-1}(1 - \alpha/2) = 1,96$ .  $p = 1,84 \cdot 10^{-6} < 0,05$ .
- $|z| < \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$ , elutasítjuk a nullhipotézist. A kalapácsok fejének tömegének várható értéke a minta alapján szignifikánsan eltér az előírt 364 grammtól.

## Fisher–Bartlett-tétel

Valójában az eloszlás valódi szórása a legtöbb esetben nem ismert. A  $\sigma$  szórást az  $s_n^*$  korrigált tapasztalati szórással helyettesítjük. Kérdés, hogyan változik így az eloszlás.

### Tétel (Fisher–Bartlett)

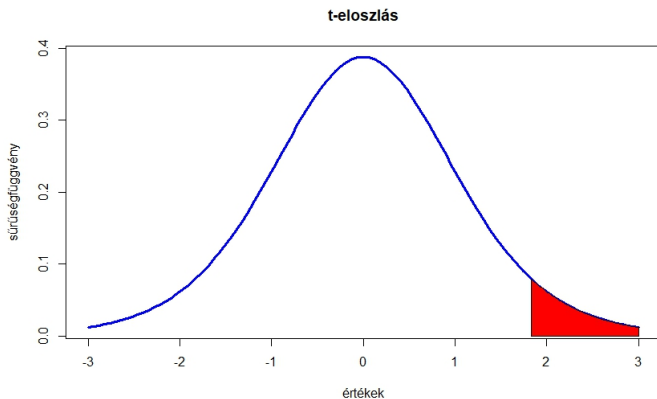
Tegyük fel, hogy  $X_1, X_2, \dots, X_n$  független  $m$  várható értékű,  $\sigma$  szórású, **normális eloszlású** valószínűségi változók. Ekkor

- 1  $\bar{X} \sim N(m, \frac{\sigma^2}{n})$ ;
- 2  $\bar{X}$  és  $s_n^*$  függetlenek;
- 3  $(n-1)s_n^{*2}/\sigma^2$  eloszlása  $n-1$  szabadsági fokú  $\chi^2$ -eloszlás;
- 4  $(\bar{X} - m)\sqrt{n}/s_n^*$  eloszlása  $n-1$  szabadsági fokú  $t$ -eloszlás.

Itt

$$s_n^* = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2} = \sqrt{\frac{n}{n-1} \left( \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^2 \right) - \bar{X}^2 \right)}.$$

## $t$ -eloszlás egyoldali kritikus értékei



Az  $f = 9$  szabadsági fokú  $\alpha = 0,05$  szignifikanciaszintű egyoldali  $t$ -próba kritikus értéke:  $\bar{t}_{9,0,05} = 1,83$ .

# Egymintás egyoldali $t$ -próba (one-sample one-sided $t$ -test)

- **A normális eloszlás várható értékére, ismeretlen szórás esetén – leg-erősebb próba.**
- $X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(m, \sigma^2)$ , ahol  $m, \sigma$  ismeretlen paraméterek.
- Próbastatisztika, aminek eloszlása  $t$ -eloszlás  $H_0$  mellett a Fisher–Bartlett-tétel szerint:

$$t = \frac{\bar{X} - m_0}{S_n^*} \cdot \sqrt{n}.$$

- **Egyoldali ellenhipotézis (one-sided):**  $H_0 : m \leq m_0$ ;  $H_1 : m > m_0$ .
- Ha  $t > \bar{t}_{n-1, \alpha}$ , azaz  $p < \alpha$ , elutasítjuk a nullhipotézist; ilyenkor a várható érték szignifikánsan több  $m_0$ -nál.
- Ha  $t \leq \bar{t}_{n-1, \alpha}$ , azaz  $p \geq \alpha$ , elfogadjuk a nullhipotézist, a várható érték nem több szignifikánsan  $m_0$ -nál az adatok alapján.
- A kritikus érték:  $\bar{t}_{n-1, \alpha}$  az  $f = n - 1$  szabadsági fokú (degree of freedom)  $t$ -eloszlás  $1 - \alpha$ -kvantilise, vagyis az  $f = n - 1$  szabadsági fokú egyoldali  $t$ -próba kritikus értéke  $\alpha$  szignifikanciaszint (level of significance) mellett.

## Példa: egymintás egyoldali $t$ -próba

Egy adott helyen vett tíz mintából megmértük az ivóvíz keménységét. Az alábbi eredmények adódtak (mg/l CaO):

351    370    352    340    362    363    366    355    374    347

Állíthatjuk-e az adatok alapján, hogy az ivóvíz keménységének várható értéke szignifikánsan meghaladja a 350 mg/l egészségügyi határértéket?

## Példa: egymintás egyoldali $t$ -próba

Egy adott helyen vett tíz mintából megmértük az ivóvíz keménységét. Az alábbi eredmények adódtak (mg/l CaO):

351    370    352    340    362    363    366    355    374    347

Állíthatjuk-e az adatok alapján, hogy az ivóvíz keménységének várható értéke szignifikánsan meghaladja a 350 mg/l egészségügyi határértéket?

$$n = 10; \quad \bar{X} = 358; \quad s_n^* = 10,77$$

Feltételezzük, hogy a mérési eredmények normális eloszlásúak, **az egymintás egyoldali  $t$ -próbát** alkalmazzuk:  $H_0 : m \leq 350$ ;  $H_1 : m > 350$ .

$$t = \frac{\bar{X} - m_0}{s_n^*} \cdot \sqrt{n} = \frac{358 - 350}{10,77} \sqrt{10} = 2,35.$$

Az  $f = n - 1 = 9$  szabadsági fokú egyoldali  $t$ -próba kritikus értéke  $\alpha = 0,05$  szignifikanciaszint mellett  $\bar{t}_{9;0,05} = 1,833$ .

## Példa: egymintás egyoldali $t$ -próba

Egy adott helyen vett tíz mintából megmértük az ivóvíz keménységét. Az alábbi eredmények adódtak (mg/l CaO):

351    370    352    340    362    363    366    355    374    347

Állíthatjuk-e az adatok alapján, hogy az ivóvíz keménységének várható értéke szignifikánsan meghaladja a 350 mg/l egészségügyi határértéket?

$$n = 10; \quad \bar{X} = 358; \quad s_n^* = 10,77$$

Feltételezzük, hogy a mérési eredmények normális eloszlásúak, **az egymintás egyoldali  $t$ -próbát** alkalmazzuk:  $H_0 : m \leq 350$ ;  $H_1 : m > 350$ .

$$t = \frac{\bar{X} - m_0}{s_n^*} \cdot \sqrt{n} = \frac{358 - 350}{10,77} \sqrt{10} = 2,35.$$

Az  $f = n - 1 = 9$  szabadsági fokú egyoldali  $t$ -próba kritikus értéke  $\alpha = 0,05$  szignifikanciaszint mellett  $\bar{t}_{9;0,05} = 1,833$ .

Mivel  $t > \bar{t}_{9;0,05}$ , **elutasítjuk a nullhipotézist**, a vízkeménység szignifikánsan meghaladja 350 mg/l határértéket. A  $p$ -érték:  $p = 0,0217 < 0,05$ .

# Hipotézisvizsgálat: példa az R szoftverben

Tíz mintából mértük meg a víz keménységét.

Nullhipotézis (null hypothesis,  $H_0$ ):  $m \leq 350$

Ellenhipotézis (alternative hypothesis,  $H_1$ ):  $m > 350$

```
> viz<-c(348, 367, 349, 337, 359, 360, 363, 352, 371, 344)
```

```
> t.test(viz, mu=350, alternative="greater")
```

## Hipotézisvizsgálat: példa az R szoftverben

Tíz mintából mértük meg a víz keménységét.

Nullhipotézis (null hypothesis,  $H_0$ ):  $m \leq 350$

Ellenhipotézis (alternative hypothesis,  $H_1$ ):  $m > 350$

```
> viz<-c(348, 367, 349, 337, 359, 360, 363, 352, 371, 344)
```

```
> t.test(viz, mu=350, alternative="greater")
```

One Sample t-test

```
data: viz
```

```
t = 2.3489, df = 9, p-value = 0.02169
```

```
alternative hypothesis: true mean is greater than 350
```

```
95 percent confidence interval: 351.7566 Inf
```

```
mean of x : 358
```

Most  $p = 0.02169 < 0,05 = \alpha$ , elutasítjuk a nullhipotézist.

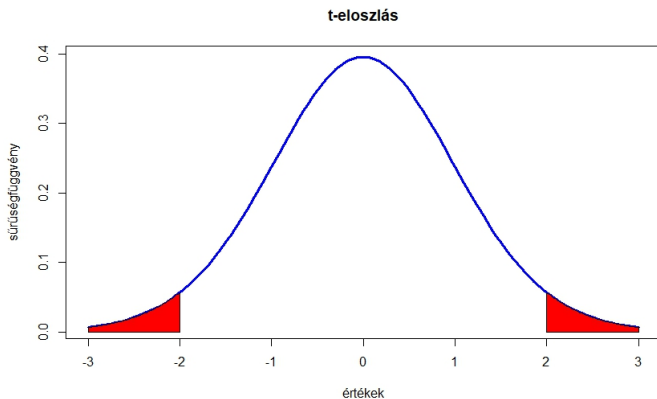
## Egymintás kétoldali $t$ -próba (one-sample two-sided $t$ -test)

- **A normális eloszlás várható értékére, ismeretlen szórás esetén.** Nem legerősebb (nincs ilyen).
- $X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(m, \sigma^2)$ , ahol  $m, \sigma$  ismeretlen paraméterek.
- Próbastatisztika (eloszlása  $t$ -eloszlás/Student-eloszlás  $H_0$  mellett):

$$t = \frac{\bar{X} - m_0}{s_n^*} \cdot \sqrt{n}.$$

- **Kétoldali ellenhipotézis** (two-sided):  $H_0 : m = m_0$ ;  $H_1 : m \neq m_0$ .
- Ha  $|t| > t_{n-1, \alpha}$ , azaz  $p < \alpha$ , akkor elutasítjuk a nullhipotézist, a várható érték szignifikánsan eltér  $m_0$ -tól.
- Ha  $|t| \leq t_{n-1, \alpha}$ , azaz  $p \geq \alpha$ , akkor elfogadjuk  $H_0$ -t, a várható érték nem tér el szignifikánsan  $m_0$ -tól.
- A kritikus érték:  $t_{n-1, \alpha}$  az  $f = n - 1$  szabadsági fokú (degree of freedom)  $t$ -eloszlás  $1 - \alpha/2$ -kvantilise, vagyis az  $f = n - 1$  szabadsági fokú (degree of freedom) kétoldali  $t$ -próba kritikus értéke  $\alpha$  szignifikanciaszint mellett.

## Kétoldali $t$ -próba kritikus értékei



Az  $f = 29$  szabadsági fokú  $\alpha = 0,05$  szignifikanciaszintű kétoldali  $t$ -próba kritikus értéke:  $t_{29;0,05} = 2,04$ .

## Példa: Egymintás kétoldali $t$ -próba

Egy gyógyszer hatóanyagtartalma a csomagolás szerint 10 mg. Harminc tablettát hatóanyag-tartalmát megmérve a mérések átlaga 9,8, korrigált tapasztalati szórása 0,62 lett. A szignifikanciaszintet  $\alpha = 0,05$ -nek választva az adatok alapján szignifikánsan eltér-e a hatóanyag-tartalom várható értéke a 10 mg-tól?

## Példa: Egymintás kétoldali $t$ -próba

Egy gyógyszer hatóanyagtartalma a csomagolás szerint 10 mg. Harminc tabletta hatóanyag-tartalmát megmérve a mérések átlaga 9,8, korrigált tapasztalati szórása 0,62 lett. A szignifikanciaszintet  $\alpha = 0,05$ -nek választva az adatok alapján szignifikánsan eltér-e a hatóanyag-tartalom várható értéke a 10 mg-tól?

$$n = 30; \quad \bar{X} = 9,8; \quad s_n^* = 0,62$$

**Egymintás kétoldali  $t$ -próbát** végezhetünk, normális eloszlást feltételezve.

$$H_0 : m = 10; \quad H_1 : m \neq 10; \quad \alpha = 0,05; \quad f = n - 1 = 29.$$

$$t = \frac{\bar{X} - m_0}{s_n^*} \cdot \sqrt{n} = \frac{9,8 - 10}{0,62} \cdot \sqrt{30} = -1,77.$$

A kritikus érték:  $t_{29,0,975} = 2,045 \Rightarrow |t| = 1,77 \leq 2,045$ , nincs szignifikáns eltérés.  
 $p$ -érték:  $p = 0,0867 \geq 0,05$ .

## Kétmintás, egyoldali, párosítatlan Student-féle $t$ -próba

A **várható érték összehasonlítására** azonos szórás esetén (two-sample one-sided unpaired Student  $t$ -test).

$X_1, \dots, X_{n_1}, Y_1, \dots, Y_{n_2}$  **független normális eloszlású azonos szórású** valószínűségi változók:  $X_i \sim N(m_1, \sigma^2)$ ,  $Y_i \sim N(m_2, \sigma^2)$ , ahol  $m_1, m_2, \sigma$  ismeretlen paraméterek.

**Egyoldali ellenhipotézis:**  $H_0 : m_1 \leq m_2$ ;  $H_1 : m_1 > m_2$ .

## Kétmintás, egyoldali, párosítatlan Student-féle $t$ -próba

A **várható érték összehasonlítására** azonos szórás esetén (two-sample one-sided unpaired Student  $t$ -test).

$X_1, \dots, X_{n_1}, Y_1, \dots, Y_{n_2}$  **független normális eloszlású azonos szórású** valószínűségi változók:  $X_i \sim N(m_1, \sigma^2)$ ,  $Y_i \sim N(m_2, \sigma^2)$ , ahol  $m_1, m_2, \sigma$  ismeretlen paraméterek.

**Egyoldali ellenhipotézis:**  $H_0 : m_1 \leq m_2$ ;  $H_1 : m_1 > m_2$ .

Próbastatisztika (eloszlása  $t$ -eloszlás  $m_1 = m_2$  mellett):

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(n_1 - 1)s_{n_1}^{*2}(X) + (n_2 - 1)s_{n_2}^{*2}(Y)}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}.$$

Ha  $t > \bar{t}_{n_1+n_2-2, \alpha}$ , akkor elvetjük a nullhipotézist, különben elfogadjuk. A  $\bar{t}_{n_1+n_2-2, \alpha}$  kritikus érték az  $f = n_1 + n_2 - 2$  szabadsági fokú **egyoldali**  $t$ -próba kritikus értéke  $\alpha$  szignifikanciaszint mellett (a megfelelő eloszlás  $1 - \alpha$ -kvantilise).

Ha  $p < \alpha$ : elvetjük  $H_0$ -t, az első várható érték szignifikánsan nagyobb a másodiknál.

## Kétmintás $t$ -próba: példa

Két különböző márkájú vaj tömegét mértük meg, az  $X$  típusúét tízszer, az  $Y$  típusúét nyolcszor. Az átlagok és korrigált tapasztalati szórások (kg-ban):

$$\bar{X} = 0,217, \quad s_n^*(X) = 0,027, \quad \bar{Y} = 0,203, \quad s_n^*(Y) = 0,03.$$

Állíthatjuk-e  $\alpha = 0,05$  szignifikanciaszint mellett, hogy az  $X$  típusú vajak tömege szignifikánsan több az  $Y$  típusú vajénál? Feltételezzük, hogy a mérések **szórása azonos**.

## Kétmintás $t$ -próba: példa

Két különböző márkájú vaj tömegét mértük meg, az  $X$  típusúét tízszer, az  $Y$  típusúét nyolcszor. Az átlagok és korrigált tapasztalati szórások (kg-ban):

$$\bar{X} = 0,217, \quad s_n^*(X) = 0,027, \quad \bar{Y} = 0,203, \quad s_n^*(Y) = 0,03.$$

Állíthatjuk-e  $\alpha = 0,05$  szignifikanciaszint mellett, hogy az  $X$  típusú vajak tömege szignifikánsan több az  $Y$  típusú vajénál? Feltételezzük, hogy a mérések **szórása azonos**.

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(n_1 - 1)s_{n_1}^{*2}(X) + (n_2 - 1)s_{n_2}^{*2}(Y)}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}.$$

Behelyettesítve:

$$t = \frac{0,217 - 0,203}{\sqrt{9 \cdot 0,027^2 + 7 \cdot 0,03^2}} \cdot \sqrt{\frac{80 \cdot 16}{18}} = 1,04.$$

## Kétmintás $t$ -próba: példa

Két különböző márkájú vaj tömegét mértük meg, az  $X$  típusúét tízszer, az  $Y$  típusúét nyolcszor. Az átlagok és korrigált tapasztalati szórások (kg-ban):

$$\bar{X} = 0,217, \quad s_n^*(X) = 0,027, \quad \bar{Y} = 0,203, \quad s_n^*(Y) = 0,03.$$

Állíthatjuk-e  $\alpha = 0,05$  szignifikanciaszint mellett, hogy az  $X$  típusú vajak tömege szignifikánsan több az  $Y$  típusú vajénál? Feltételezzük, hogy a mérések **szórása azonos**.

$$H_0 : m_1 \leq m_2, \quad H_1 : m_1 > m_2$$

A próbastatisztika értéke:  $t = 1,04$ .

Az  $f = n_1 + n_2 - 2 = 10 + 8 - 2 = 16$  szabadsági fokú egyoldali  $t$ -próba kritikus értéke  $\alpha = 0,05$  szignifikanciaszint mellett:  $\bar{t}_{16,0,05} = 1,746$ .

## Kétmintás $t$ -próba: példa

Két különböző márkájú vaj tömegét mértük meg, az  $X$  típusúét tízszer, az  $Y$  típusúét nyolcszor. Az átlagok és korrigált tapasztalati szórások (kg-ban):

$$\bar{X} = 0,217, \quad s_n^*(X) = 0,027, \quad \bar{Y} = 0,203, \quad s_n^*(Y) = 0,03.$$

Állíthatjuk-e  $\alpha = 0,05$  szignifikanciaszint mellett, hogy az  $X$  típusú vajak tömege szignifikánsan több az  $Y$  típusú vajénál? Feltételezzük, hogy a mérések **szórása azonos**.

$$H_0 : m_1 \leq m_2, \quad H_1 : m_1 > m_2$$

A próbastatisztika értéke:  $t = 1,04$ .

Az  $f = n_1 + n_2 - 2 = 10 + 8 - 2 = 16$  szabadsági fokú egyoldali  $t$ -próba kritikus értéke  $\alpha = 0,05$  szignifikanciaszint mellett:  $\bar{t}_{16,0,05} = 1,746$ .

Itt  $t = 1,04 < 1,746 = \bar{t}_{16,0,05}$ , ezért **elfogadjuk  $H_0$ -t**. Az  $X$  típusú vaj tömege **nem haladja meg szignifikánsan** az  $Y$  típusúét.

$p$ -érték:  $0,149 > 0,05$

## Kétmintás $t$ -próba: példa

Kétféle joghurt cukortartalmát szeretnénk összehasonlítani. Az elsőből  $n_1 = 20$ , a másodikból  $n_2 = 12$  dobozban mértük meg a cukortartalmat (grammban).

Az átlagok és korigált tapasztalati szórások grammban számolva ( $X_1, \dots, X_{20}$  az első minta,  $Y_1, \dots, Y_{12}$  a második):

$$\bar{X} = \mathbf{18,4}, \quad s_n^*(X) = 1,2, \quad \bar{Y} = \mathbf{19,9}, \quad s_n^*(Y) = 1,3.$$

Állíthatjuk-e  $\alpha = 0,05$  szignifikanciaszint mellett, hogy a kétféle joghurtban szignifikánsan eltérő a cukortartalom?

## Kétmintás, kétoldali, párosítatlan Student-féle $t$ -próba

A **várható érték összehasonlítására** azonos szórás esetén (two-sample two-sided unpaired Student  $t$ -test).

$X_1, \dots, X_{n_1}, Y_1, \dots, Y_{n_2}$  **független normális eloszlású azonos szórású** valószínűségi változók:  $X_i \sim N(m_1, \sigma^2)$ ,  $Y_i \sim N(m_2, \sigma^2)$ , ahol  $m_1, m_2, \sigma$  ismeretlen paraméterek.

**Kétoldali ellenhipotézis:**  $H_0 : m_1 = m_2$ ;  $H_1 : m_1 \neq m_2$ .

## Kétmintás, kétoldali, párosítatlan Student-féle $t$ -próba

A **várható érték összehasonlítására** azonos szórás esetén (two-sample two-sided unpaired Student  $t$ -test).

$X_1, \dots, X_{n_1}, Y_1, \dots, Y_{n_2}$  **független normális eloszlású azonos szórású** valószínűségi változók:  $X_i \sim N(m_1, \sigma^2)$ ,  $Y_i \sim N(m_2, \sigma^2)$ , ahol  $m_1, m_2, \sigma$  ismeretlen paraméterek.

**Kétoldali ellenhipotézis:**  $H_0 : m_1 = m_2$ ;  $H_1 : m_1 \neq m_2$ .

Próbastatisztika (eloszlása  $t$ -eloszlás  $H_0$  mellett):

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(n_1 - 1)s_{n_1}^{*2}(X) + (n_2 - 1)s_{n_2}^{*2}(Y)}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}.$$

Ha  $|t| > t_{n_1+n_2-2, 1-\alpha}$ , akkor elvetjük a nullhipotézist, különben elfogadjuk. A  $t_{n_1+n_2-2, 1-\alpha}$  kritikus érték az  $f = n_1 + n_2 - 2$  szabadsági fokú **kétoldali**  $t$ -próba kritikus értéke  $\alpha$  szignifikanciaszint mellett (a megfelelő eloszlás  $1-\alpha/2$ -kvantilise).

Ha  $p < \alpha$ : elvetjük  $H_0$ -t, az várható értékek szignifikánsan eltérnek egymástól.

## Kétmintás $t$ -próba: példa

Kétféle joghurt cukortartalmát szeretnénk összehasonlítani. Az elsőből  $n_1 = 20$ , a másodikból  $n_2 = 12$  dobozban mértük meg a cukortartalmat (grammban).

Az átlagok és korrigált tapasztalati szórások grammban számolva ( $X_1, \dots, X_{20}$  az első minta,  $Y_1, \dots, Y_{12}$  a második):

$$\bar{X} = 18,4, \quad s_n^*(X) = 1,2, \quad \bar{Y} = 19,9, \quad s_n^*(Y) = 1,3.$$

Állíthatjuk-e  $\alpha = 0,05$  szignifikanciaszint mellett, hogy a kétféle joghurtban szignifikánsan eltérő a cukortartalom? Feltételezzük, hogy a minták **függetlenek**, **normális eloszlásúak**, **azonos szórásúak**.

## Kétmintás $t$ -próba: példa

Kétféle joghurt cukortartalmát szeretnénk összehasonlítani. Az elsőből  $n_1 = 20$ , a másodikból  $n_2 = 12$  dobozban mértük meg a cukortartalmat (grammban).

Az átlagok és korrigált tapasztalati szórások grammban számolva ( $X_1, \dots, X_{20}$  az első minta,  $Y_1, \dots, Y_{12}$  a második):

$$\bar{X} = 18,4, \quad s_n^*(X) = 1,2, \quad \bar{Y} = 19,9, \quad s_n^*(Y) = 1,3.$$

Állíthatjuk-e  $\alpha = 0,05$  szignifikanciaszint mellett, hogy a kétféle joghurtban szignifikánsan eltérő a cukortartalom? Feltételezzük, hogy a minták **függetlenek**, **normális eloszlásúak**, **azonos szórásúak**.

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(n_1 - 1)s_{n_1}^{*2}(X) + (n_2 - 1)s_{n_2}^{*2}(Y)}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}.$$

Behelyettesítve:

$$t = \frac{18,4 - 19,9}{\sqrt{19 \cdot 1,2^2 + 11 \cdot 1,3^2}} \cdot \sqrt{\frac{20 \cdot 12 \cdot 30}{32}} = -3,3.$$

## Kétmintás $t$ -próba: példa

Kétféle joghurt cukortartalmát szeretnénk összehasonlítani. Az elsőből  $n_1 = 20$ , a másodiktól  $n_2 = 12$  dobozban mértük meg a cukortartalmat (grammban).

Az átlagok és korrigált tapasztalati szórások grammban számolva ( $X_1, \dots, X_{20}$  az első minta,  $Y_1, \dots, Y_{12}$  a második):

$$\bar{X} = 18,4, \quad s_n^*(X) = 1,2, \quad \bar{Y} = 19,9, \quad s_n^*(Y) = 1,3.$$

Állíthatjuk-e  $\alpha = 0,05$  szignifikanciaszint mellett, hogy a kétféle joghurtban szignifikánsan eltérő a cukortartalom? Feltételezzük, hogy a minták **függetlenek, normális eloszlásúak, azonos szórásúak**.

$$H_0 : m_1 = m_2, \quad H_1 : m_1 \neq m_2$$

A próbastatisztika értéke:  $t = -3,3$ .

Az  $f = n_1 + n_2 - 2 = 20 + 12 - 2 = 30$  szabadsági fokú **kétoldali**  $t$ -próba kritikus értéke  $\alpha = 0,05$  szignifikanciaszint mellett:  $t_{16,0,05} = 2,042$ .

## Kétmintás $t$ -próba: példa

Kétféle joghurt cukortartalmát szeretnénk összehasonlítani. Az elsőből  $n_1 = 20$ , a másodikból  $n_2 = 12$  dobozban mértük meg a cukortartalmat (grammban).

Az átlagok és korrigált tapasztalati szórások grammban számolva ( $X_1, \dots, X_{20}$  az első minta,  $Y_1, \dots, Y_{12}$  a második):

$$\bar{X} = 18,4, \quad s_n^*(X) = 1,2, \quad \bar{Y} = 19,9, \quad s_n^*(Y) = 1,3.$$

Állíthatjuk-e  $\alpha = 0,05$  szignifikanciaszint mellett, hogy a kétféle joghurtban szignifikánsan eltérő a cukortartalom? Feltételezzük, hogy a minták **függetlenek, normális eloszlásúak, azonos szórásúak**.

$$H_0 : m_1 = m_2, \quad H_1 : m_1 \neq m_2$$

A próbastatisztika értéke:  $t = -3,3$ .

Az  $f = n_1 + n_2 - 2 = 20 + 12 - 2 = 30$  szabadsági fokú **kétoldali**  $t$ -próba kritikus értéke  $\alpha = 0,05$  szignifikanciaszint mellett:  $t_{16,0,05} = 2,042$ .

Itt  $|t| = 3,3 > 2,042 = t_{30,0,05}$ , ezért **elutasítjuk  $H_0$ -t**. A kétféle joghurt cukortartalma **szignifikánsan különböző**

## Kétmintás $t$ -próba: példa

Kétféle joghurt cukortartalmát szeretnénk összehasonlítani. Az elsőből  $n_1 = 20$ , a másodikkból  $n_2 = 12$  dobozban mértük meg a cukortartalmat (grammban).

Az átlagok és korrigált tapasztalati szórások grammban számolva ( $X_1, \dots, X_{20}$  az első minta,  $Y_1, \dots, Y_{12}$  a második):

$$\bar{X} = 18,4, \quad s_n^*(X) = 1,2, \quad \bar{Y} = 19,9, \quad s_n^*(Y) = 1,3.$$

Állíthatjuk-e  $\alpha = 0,05$  szignifikanciaszint mellett, hogy a kétféle joghurtban szignifikánsan eltérő a cukortartalom? Feltételezzük, hogy a minták **függetlenek, normális eloszlásúak, azonos szórásúak**.

$$H_0 : m_1 = m_2, \quad H_1 : m_1 \neq m_2$$

A próbastatisztika értéke:  $t = -3,3$ .

Az  $f = n_1 + n_2 - 2 = 20 + 12 - 2 = 30$  szabadsági fokú **kétoldali**  $t$ -próba kritikus értéke  $\alpha = 0,05$  szignifikanciaszint mellett:  $t_{16,0,05} = 2,042$ .

Itt  $|t| = 3,3 > 2,042 = t_{30,0,05}$ , ezért **elutasítjuk  $H_0$ -t**. A kétféle joghurt cukortartalma **szignifikánsan különböző** – ha a szórások azonosak, és a próba alkalmazható (ezt eddig feltettük).

# F-próba

**Független** normális eloszlású minták **szórásának** összehasonlítására.

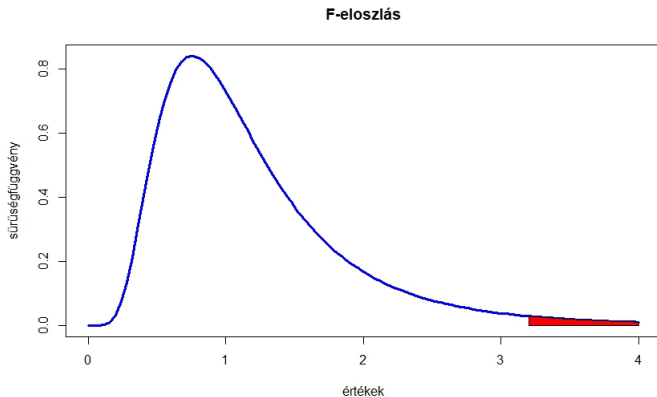
- Legyenek most  $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}, Y_1, \dots, Y_{n_2}$  független normális eloszlású valószínűségi változók, ahol  $X_i \sim N(m_1, \sigma_1^2)$ ,  $Y_i \sim N(m_2, \sigma_2^2)$ . Itt  $m_1, m_2, \sigma_1, \sigma_2$  ismeretlen paraméterek.
- Kétoldali ellenhipotézis:  $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$ ;  $H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$ .
- Próbastatisztika (eloszlása  $F$ -eloszlás  $H_0$  mellett):

$$F = \frac{s_{n_1}^{*2}}{s_{n_2}^{*2}}.$$

- Ha  $F > F_{n_1-1, n_2-1}$  vagy  $1/F > F_{n_2-1, n_1-1}$ , akkor elvetjük a nullhipotézist, különben elfogadjuk, ahol  $F_{f_1, f_2}$  az  $f_1, f_2$  szabadsági fokú az  $F$ -eloszlás  $1 - \alpha/2$ -kvantilise.

$p < 0,05$ : a szórások szignifikánsan eltérnek.

## Az $F$ -próba kritikus értéke



Az  $F$ -próba kritikus értéke:  $F_{19,11} = 3,24$ , ez az eloszlás  $1 - \alpha/2 = 0,975$ -kvantilise

## Kétmintás $F$ -próba: példa

Kétféle joghurt cukortartalmát szeretnénk összehasonlítani. Az elsőből  $n_1 = 20$ , a másodikból  $n_2 = 12$  dobozban mértük meg a cukortartalmat (grammban). Az átlagok és korrigált tapasztalati szórások ( $X_1, \dots, X_{20}$  az első minta,  $Y_1, \dots, Y_{12}$  a második):

$$\bar{X} = 18,4, \quad s_n^*(X) = 1,2, \quad \bar{Y} = 19,9, \quad s_n^*(Y) = 1,3.$$

Állíthatjuk-e  $\alpha = 0,05$  szignifikanciaszint mellett, hogy a kétféle joghurtban szignifikánsan eltérő a cukortartalom szórása? Feltételezzük, hogy a minták **függetlenek, normális eloszlásúak**.

## Kétmintás $F$ -próba: példa

Kétféle joghurt cukortartalmát szeretnénk összehasonlítani. Az elsőből  $n_1 = 20$ , a másodiktól  $n_2 = 12$  dobozban mértük meg a cukortartalmat (grammban). Az átlagok és korrigált tapasztalati szórások ( $X_1, \dots, X_{20}$  az első minta,  $Y_1, \dots, Y_{12}$  a második):

$$\bar{X} = 18,4, \quad s_n^*(X) = 1,2, \quad \bar{Y} = 19,9, \quad s_n^*(Y) = 1,3.$$

Állíthatjuk-e  $\alpha = 0,05$  szignifikanciaszint mellett, hogy a kétféle joghurtban szignifikánsan eltérő a cukortartalom szórása? Feltételezzük, hogy a minták **függetlenek, normális eloszlásúak**.

$$H_0 : \sigma_1 = \sigma_2, \quad H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$$

A próbastatisztika értéke:  $F = \frac{s_{n_1}^{*2}}{s_{n_2}^{*2}} = \frac{1,2^2}{1,3^2} = 0,85$ , és  $\frac{1}{F} = \frac{1,3^2}{1,2^2} = 1,17$ .

Az  $(f_1, f_2) = (n_1 - 1, n_2 - 1) = (19, 11)$  szabadsági fokú  $F$ -próba kritikus értéke  $\alpha = 0,05$  esetén: 3,24, míg az  $(f_2, f_1) = (n_2 - 1, n_1 - 1) = (11, 19)$  szabadsági fok esetén 2,76.

## Kétmintás $F$ -próba: példa

Kétféle joghurt cukortartalmát szeretnénk összehasonlítani. Az elsőből  $n_1 = 20$ , a másodiktól  $n_2 = 12$  dobozban mértük meg a cukortartalmat (grammban). Az átlagok és korrigált tapasztalati szórások ( $X_1, \dots, X_{20}$  az első minta,  $Y_1, \dots, Y_{12}$  a második):

$$\bar{X} = 18,4, \quad s_n^*(X) = 1,2, \quad \bar{Y} = 19,9, \quad s_n^*(Y) = 1,3.$$

Állíthatjuk-e  $\alpha = 0,05$  szignifikanciaszint mellett, hogy a kétféle joghurtban szignifikánsan eltérő a cukortartalom szórása? Feltételezzük, hogy a minták **függetlenek, normális eloszlásúak**.

$$H_0 : \sigma_1 = \sigma_2, \quad H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$$

A próbastatisztika értéke:  $F = \frac{s_{n_1}^{*2}}{s_{n_2}^{*2}} = \frac{1,2^2}{1,3^2} = 0,85$ , és  $\frac{1}{F} = \frac{1,3^2}{1,2^2} = 1,17$ .

Az  $(f_1, f_2) = (n_1 - 1, n_2 - 1) = (19, 11)$  szabadsági fokú  $F$ -próba kritikus értéke  $\alpha = 0,05$  esetén: 3,24, míg az  $(f_2, f_1) = (n_2 - 1, n_1 - 1) = (11, 19)$  szabadsági fok esetén 2,76.

Mivel  $F < 3,24$  és  $1/F < 2,76$ , **elfogadjuk a nullhipotézist**, a szórások nem térnek el szignifikánsan, és **a kétmintás  $t$ -próba valóban alkalmazható**.

# Normális eloszlásra vonatkozó kétmintás próbák

Az alábbiakat kell ellenőrizni kétmintás próbáknál:

- A minta **normális eloszlású**, vagy a mintaelemszám elég nagy és a szórás feltehetően véges (a centrális határeloszlástétel alapján az átlag közel normális eloszlású).

# Normális eloszlásra vonatkozó kétmintás próbák

Az alábbiakat kell ellenőrizni kétmintás próbánál:

- A minta **normális eloszlású**, vagy a mintaelemszám elég nagy és a szórás feltehetően véges (a centrális határeloszlástétel alapján az átlag közel normális eloszlású).
- Kétmintás esetben: a **két minta egymástól független** ("unpaired" eset). Ha a két minta természetes módon párosítható, **párosított** ("paired") próba alkalmazható. Példa: megmérjük húsz ember vérnyomását egy adott napon reggel és este. Igaz-e, hogy a reggeli érték jelentősen eltér az estitől?
- Ha a **szórásokról feltételezhetjük, hogy megegyeznek**: a Student-féle  $t$ -próba alkalmazható.
- Ha a **szórásokról nem tételezhetjük fel, hogy megegyeznek**: a Welch-féle  $t$ -próba alkalmazható.

## Példa: párosított $t$ -próba

1991 és 2010 között feljegyezték az éves csapadékösszeget Budapesten, illetve Szegeden. Az átlag Budapesten 533 mm, a korrigált tapasztalati szórás 139, Szegeden az átlag 540 mm, a korrigált tapasztalati szórás 143 lett (forrás: OMSZ). Állíthatjuk-e, hogy Szegeden szignifikánsan nagyobb a csapadékmennyiség várható értéke?

év	1991	1992	1993	1994	1995	...	átlag	$s_n^*$
Budapest	594	364	505	481	575	...	<b>533</b>	139
Szeged	617	457	408	399	562	...	<b>540</b>	143

## Példa: párosított $t$ -próba

1991 és 2010 között feljegyezték az éves csapadékösszeget Budapesten, illetve Szegeden. Az átlag Budapesten 533 mm, a korrigált tapasztalati szórás 139, Szegeden az átlag 540 mm, a korrigált tapasztalati szórás 143 lett (forrás: OMSZ). Állíthatjuk-e, hogy Szegeden szignifikánsan nagyobb a csapadékmennyiség várható értéke?

év	1991	1992	1993	1994	1995	...	átlag	$s_n^*$
Budapest	594	364	505	481	575	...	<b>533</b>	139
Szeged	617	457	408	399	562	...	<b>540</b>	143

A két adatsor **nem független**, mert egy éven belül a két város időjárása nem független (az egyes minták sem teljesen függetlenek, és nem biztos, hogy normális eloszlásúak). Ezért **párosított** (paired)  $t$ -próba alkalmazható, egyoldali nullhipotézissel.

$H_0 : m_1 \geq m_2$ ,  $H_1 : m_1 < m_2$ , ahol  $m_1$  a budapesti,  $m_2$  a szegedi csapadékmennyiség várható értéke.

## Példa: párosított $t$ -próba

1991 és 2010 között feljegyezték az éves csapadékösszeget Budapesten, illetve Szegeden. Az átlag Budapesten 533 mm, a korrigált tapasztalati szórás 139, Szegeden az átlag 540 mm, a korrigált tapasztalati szórás 143 lett (forrás: OMSZ). Állíthatjuk-e, hogy Szegeden szignifikánsan nagyobb a csapadékmennyiség várható értéke?

év	1991	1992	1993	1994	1995	...	átlag	$s_n^*$
Budapest	594	364	505	481	575	...	<b>533</b>	139
Szeged	617	457	408	399	562	...	<b>540</b>	143

A két adatsor **nem független**, mert egy éven belül a két város időjárása nem független (az egyes minták sem teljesen függetlenek, és nem biztos, hogy normális eloszlásúak). Ezért **párosított** (paired)  $t$ -próba alkalmazható, egyoldali nullhipotézissel.

$H_0 : m_1 \geq m_2$ ,  $H_1 : m_1 < m_2$ , ahol  $m_1$  a budapesti,  $m_2$  a szegedi csapadékmennyiség várható értéke.

A próbát elvégezve a  $p$ -értékre 0,366 adódott.

## Példa: párosított $t$ -próba

1991 és 2010 között feljegyezték az éves csapadékösszeget Budapesten, illetve Szegeden. Az átlag Budapesten 533 mm, a korrigált tapasztalati szórás 139, Szegeden az átlag 540 mm, a korrigált tapasztalati szórás 143 lett (forrás: OMSZ). Állíthatjuk-e, hogy Szegeden szignifikánsan nagyobb a csapadékmennyiség várható értéke?

év	1991	1992	1993	1994	1995	...	átlag	$s_n^*$
Budapest	594	364	505	481	575	...	<b>533</b>	139
Szeged	617	457	408	399	562	...	<b>540</b>	143

A két adatsor **nem független**, mert egy éven belül a két város időjárása nem független (az egyes minták sem teljesen függetlenek, és nem biztos, hogy normális eloszlásúak). Ezért **párosított** (paired)  $t$ -próba alkalmazható, egyoldali nullhipotézissel.

$H_0 : m_1 \geq m_2$ ,  $H_1 : m_1 < m_2$ , ahol  $m_1$  a budapesti,  $m_2$  a szegedi csapadékmennyiség várható értéke.

A próbát elvégezve a  $p$ -értékre 0,366 adódott.

**Elfogadjuk** a nullhipotézist, az adatok alapján Szegeden nem több szignifikánsan a csapadékmennyiség várható értéke, mint Budapesten.

## Welsh-féle $t$ -próba

A **várható érték összehasonlítására** párosítatlan esetben (two-sample two-sided unpaired Welch  $t$ -test). Legyenek  $X_1, \dots, X_{n_1}, Y_1, \dots, Y_{n_2}$  **független normális eloszlású** valószínűségi változók:  $X_i \sim N(m_1, \sigma_1^2)$ ,  $Y_j \sim N(m_2, \sigma_2^2)$ , ahol  $m_1, m_2, \sigma_1, \sigma_2$  ismeretlen paraméterek.

**Kétoldali ellenhipotézis:**  $H_0 : m_1 = m_2$ ;  $H_1 : m_1 \neq m_2$ .

Próbastatisztika:

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{s_{n_1}^{*2}(X)}{n_1} + \frac{s_{n_2}^{*2}(Y)}{n_2}}}.$$

Ha  $|t| > t_{f, 1-\alpha}$ , akkor elvetjük a nullhipotézist, különben elfogadjuk. A  $t_{f, 1-\alpha}$  kritikus érték az  $f$  szabadsági fokú **kétoldali**  $t$ -próba kritikus értéke  $\alpha$  szignifikanciaszint mellett (a megfelelő eloszlás  $1 - \alpha/2$ -kvantilise).

Szabadsági fok:

$$f \approx \frac{\frac{s_{n_1}^{*2}(X)}{n_1} + \frac{s_{n_2}^{*2}(Y)}{n_2}}{\frac{s_{n_1}^{*4}(X)}{n_1^2(n_1-1)} + \frac{s_{n_2}^{*4}(Y)}{n_2^2(n_2-1)}}.$$

Ha  $p < \alpha$ : elvetjük  $H_0$ -t, az várható értékek szignifikánsan eltérnek egymástól.

## $\chi^2$ -próba: illeszkedésvizsgálat

Legyen  $A_1, A_2, \dots, A_r$  teljes eseményrendszer,  $p_1, p_2, \dots, p_r$  pedig olyan nemnegatív számok, melyek összege 1.

$H_0 : \mathbb{P}(A_k) = p_k$  minden  $k = 1, 2, \dots, r$ -re.

$H_1 : \mathbb{P}(A_k) \neq p_k$  valamelyik  $k = 1, 2, \dots, r$ -re.

- $n$  független megfigyelést végzünk.
- $N_k$ : hányszor következett be  $A_k$ .
- Ha van  $k$ , hogy  $N_k < 4$ : néhány osztályt össze kell vonnunk, hogy a próbát alkalmazhassuk (vagyis  $A_j$  és  $A_k$  helyett  $A_j \cup A_k$ -t és  $p_j + p_k$ -t tekintjük).
- Próbastatisztika:

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^r \frac{(N_k - n \cdot p_k)^2}{n \cdot p_k}.$$

## $\chi^2$ -próba

Adott  $(A_k)_{k=1}^r$  teljes eseményrendszer, és  $(p_k)_{k=1}^r$  számok:  $\sum_{k=1}^r p_k = 1$ .

$H_0 : \mathbb{P}(A_k) = p_k$  minden  $k = 1, 2, \dots, r$ -re.  $H_1$ : a nullhipotézis nem igaz

Próbastatisztika (feltéve, hogy  $N_k \geq 4$  minden  $k$ -ra):

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^r \frac{(N_k - n \cdot p_k)^2}{n \cdot p_k}.$$

## $\chi^2$ -próba

Adott  $(A_k)_{k=1}^r$  teljes eseményrendszer, és  $(p_k)_{k=1}^r$  számok:  $\sum_{k=1}^r p_k = 1$ .

$H_0 : \mathbb{P}(A_k) = p_k$  minden  $k = 1, 2, \dots, r$ -re.  $H_1$ : a nullhipotézis nem igaz

Próbastatisztika (feltéve, hogy  $N_k \geq 4$  minden  $k$ -ra):

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^r \frac{(N_k - n \cdot p_k)^2}{n \cdot p_k}.$$

Legyen  $c_{\text{krit}}$  az  $f = r - 1$  szabadsági fokú  $\chi^2$ -próba kritikus értéke  $\alpha$  szignifikanciaszint mellett.

$\chi^2 > c_{\text{krit}}$  vagy  $p < \alpha$ : elutasítjuk  $H_0$ -t, az eloszlás **szignifikánsan eltér**  $(p_k)$ -től.

$\chi^2 \leq c_{\text{krit}}$  vagy  $p \geq \alpha$ : elfogadjuk  $H_0$ -t, az eloszlás **nem tér el szignifikánsan**  $(p_k)$ -től.

## $\chi^2$ -próba

Adott  $(A_k)_{k=1}^r$  teljes eseményrendszer, és  $(p_k)_{k=1}^r$  számok:  $\sum_{k=1}^r p_k = 1$ .

$H_0 : \mathbb{P}(A_k) = p_k$  minden  $k = 1, 2, \dots, r$ -re.  $H_1$ : a nullhipotézis nem igaz

Próbastatisztika (feltéve, hogy  $N_i \geq 4$  minden  $k$ -ra):

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^r \frac{(N_k - n \cdot p_k)^2}{n \cdot p_k}.$$

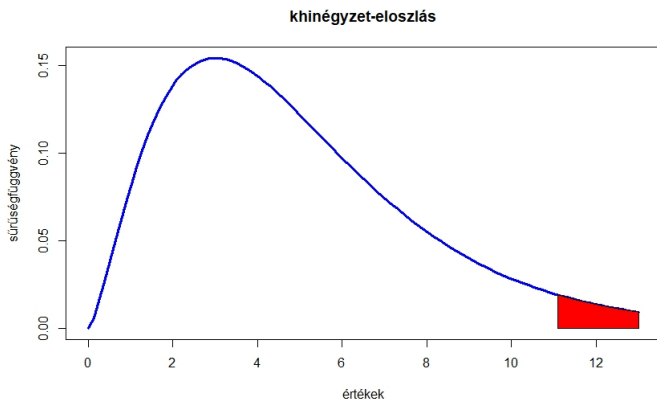
Legyen  $c_{\text{krit}}$  az  $f = r - 1$  szabadsági fokú  $\chi^2$ -próba kritikus értéke  $\alpha$  terjedelem (szignifikanciaszint) mellett.

Ez az  $f = r - 1$  szabadsági fokú  $\chi^2$ -eloszlás  $1 - \alpha$ -kvantilise, vagyis

$$\mathbb{P}(Z_1^2 + \dots + Z_f^2 < c_{\text{krit}}) = 1 - \alpha,$$

ahol  $Z_1, \dots, Z_f$  független standard normális eloszlású valószínűségi változók.

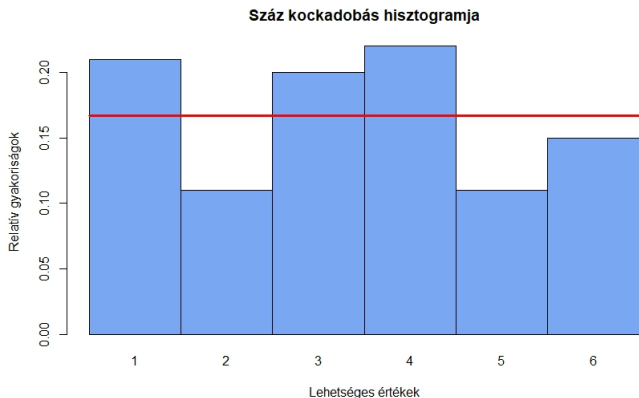
# $\chi^2$ -próba kritikus értéke



Az  $f = 5$  szabadsági fokú  $\chi^2$ -eloszlás sűrűségfüggvénye. Az  $\alpha = 0,05$  szignifikanciaszintű próba kritikus értéke:  $c_{\text{krit}} = 11,1$ .

## $\chi^2$ -próba: példa

Dobókockával dobunk százszor. A terjedelmet  $\alpha = 0,05$ -nek választva elfogadható-e, hogy szabályos a dobókocka?



## $\chi^2$ -próba: példa

Dobókockával dobunk százszor. A terjedelmet  $\alpha = 0,05$ -nek választva elfogadható-e, hogy szabályos a dobókocka?

érték	1	2	3	4	5	6
gyakoriság	21	11	20	22	11	15

## $\chi^2$ -próba: példa

Dobókockával dobunk százszor. A terjedelmet  $\alpha = 0,05$ -nek választva elfogadható-e, hogy szabályos a dobókocka?

érték	1	2	3	4	5	6
gyakoriság	21	11	20	22	11	15

Minden szám legalább négyszer előfordult, alkalmazhatjuk a  $\chi^2$ -próbát.  $A_i$ :  $i$ -t dobunk,  $r = 6$ ,  $p_k = 1/6$ ,  $k = 1, 2, \dots, 6$ .

$H_0 : \mathbb{P}(A_k) = 1/6$  minden  $k$ -ra;       $H_1 : \mathbb{P}(A_k) \neq 1/6$  valamelyik  $k$ -ra

## $\chi^2$ -próba: példa

Dobókockával dobunk százszor. A terjedelmet  $\alpha = 0,05$ -nek választva elfogadható-e, hogy szabályos a dobókocka?

érték	1	2	3	4	5	6
gyakoriság	21	11	20	22	11	15

Minden szám legalább négyszer előfordult, alkalmazhatjuk a  $\chi^2$ -próbát.  $A_i$ :  $i$ -t dobunk,  $r = 6$ ,  $p_k = 1/6$ ,  $k = 1, 2, \dots, 6$ .

$H_0 : \mathbb{P}(A_k) = 1/6$  minden  $k$ -ra;       $H_1 : \mathbb{P}(A_k) \neq 1/6$  valamelyik  $k$ -ra

$$\begin{aligned}\chi^2 &= \sum_{k=1}^r \frac{(N_k - n \cdot p_k)^2}{n \cdot p_k} = \frac{(21 - 100 \cdot 1/6)^2}{100 \cdot 1/6} + \frac{(11 - 100 \cdot 1/6)^2}{100 \cdot 1/6} \\ &+ \dots + \frac{(15 - 100 \cdot 1/6)^2}{100 \cdot 1/6} = 7,52.\end{aligned}$$

## $\chi^2$ -próba: példa

Dobókockával dobunk százszor. A terjedelmet  $\alpha = 0,05$ -nek választva elfogadható-e, hogy szabályos a dobókocka?

érték	1	2	3	4	5	6
gyakoriság	21	11	20	22	11	15

## $\chi^2$ -próba: példa

Dobókockával dobunk százszor. A terjedelmet  $\alpha = 0,05$ -nek választva elfogadható-e, hogy szabályos a dobókocka?

érték	1	2	3	4	5	6
gyakoriság	21	11	20	22	11	15

$H_0 : \mathbb{P}(A_k) = 1/6$  minden  $k$ -ra;       $H_1 : \mathbb{P}(A_k) \neq 1/6$  valamelyik  $k$ -ra

$$\chi^2 = 7,52; \quad f = r - 1 = 5; \quad \alpha = 0,05; \quad c_{\text{krit}} = 11,1$$

## $\chi^2$ -próba: példa

Dobókockával dobunk százszor. A terjedelmet  $\alpha = 0,05$ -nek választva elfogadható-e, hogy szabályos a dobókocka?

érték	1	2	3	4	5	6
gyakoriság	21	11	20	22	11	15

$H_0 : \mathbb{P}(A_k) = 1/6$  minden  $k$ -ra;       $H_1 : \mathbb{P}(A_k) \neq 1/6$  valamelyik  $k$ -ra

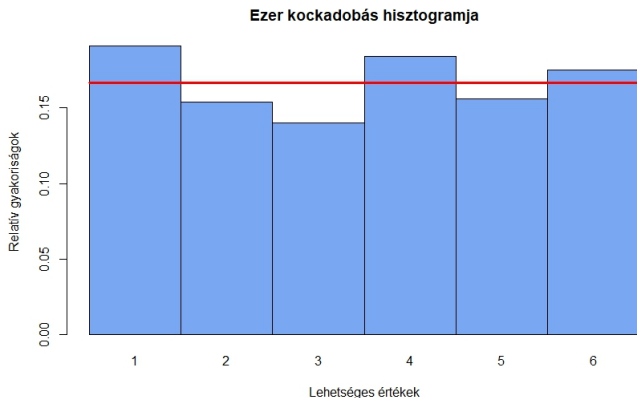
$$\chi^2 = 7,52; \quad f = r - 1 = 5; \quad \alpha = 0,05; \quad c_{\text{krit}} = 11,1$$

$\chi^2 = 7,52 < c_{\text{krit}} = 11,1$ , illetve a  $p$ -értékre  $0,1847 > 0,05$ .

Elfogadjuk  $H_0$ -t, elfogadható, hogy a dobókocka szabályos, **nincs szignifikáns eltérés** az egyenletes eloszlástól.

## $\chi^2$ -próba: példa

Dobókockával dobunk ezerszer. A terjedelmet  $\alpha = 0,05$ -nek választva elfogadható-e, hogy szabályos a dobókocka?



## $\chi^2$ -próba: példa

Ha ezerszer dobunk, és az alábbi eredmények adódnak:

érték	1	2	3	4	5	6
gyakoriság	191	154	140	184	156	175

$H_0 : \mathbb{P}(A_k) = 1/6$  minden  $k$ -ra;       $H_1 : \mathbb{P}(A_k) \neq 1/6$  valamelyik  $k$ -ra

$$\chi^2 = 11,68; \quad f = r - 1 = 5; \quad \alpha = 0,05; \quad c_{\text{krit}} = 11,1$$

## $\chi^2$ -próba: példa

Ha ezerszer dobunk, és az alábbi eredmények adódnak:

érték	1	2	3	4	5	6
gyakoriság	191	154	140	184	156	175

$H_0 : \mathbb{P}(A_k) = 1/6$  minden  $k$ -ra;       $H_1 : \mathbb{P}(A_k) \neq 1/6$  valamelyik  $k$ -ra

$$\chi^2 = 11,68; \quad f = r - 1 = 5; \quad \alpha = 0,05; \quad c_{\text{krit}} = 11,1$$

$\chi^2 = 11,68 > c_{\text{krit}} = 11,1$ , illetve a  $p$ -értékre  $0,039 < 0,05$ .

Elutasítjuk  $H_0$ -t, nem fogadható el, hogy a dobókocka szabályos, a minta alapján az eloszlás **szignifikánsan eltér** az egyenletes eloszlástól.

## Házi feladat április 10., 9:00-ig

Tekintsünk egy tetszőleges valószínűségeloszlást, azaz hat pozitív számot, aminek az összege 1. Legyenek ezek  $p_1, p_2, \dots, p_6$ , és egyik se legyen  $1/6$ -dal egyenlő, és egyik se legyen  $1/10$ -nél kisebb.

- Tekintsünk 100000 független kockadobást, ahol az  $i$  szám valószínűsége a fent választott  $p_i$ . Csoportosítsuk százasával a mintaelemeket, és minden százas csoportban számítsuk ki a  $\chi^2$ -statisztika értékét:

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^r \frac{(N_k - n \cdot p_k)^2}{n \cdot p_k}.$$

Készítsünk hisztogramot az így kapott ezer értékből, és hasonlítsuk ezt össze az  $f = 5$  szabadsági fokú  $\chi^2$ -eloszlás sűrűségfüggvényével.

- Tekintsünk 5000 független standard normális eloszlású valószínűségi változót. Csoportosítsuk ötösével a mintaelemeket, és minden ötös csoportban számítsuk ki az elemek négyzetének összegét. Készítsünk hisztogramot az így kapott ezer értékből, és hasonlítsuk ezt össze az  $f = 5$  szabadsági fokú  $\chi^2$ -eloszlás sűrűségfüggvényével.

## Házi feladat április 3., 9:00-ig

Tekintsük a testmagasságokból kapott húszelemű adatsort. Tegyük fel, hogy a testmagasság eloszlása normális.

- $\alpha = 0,05$  szignifikanciaszint mellett állíthatjuk-e, hogy a vizsgált mintában a testmagasság szignifikánsan eltér a 170 cm-es magyar átlagtól?
- $\alpha = 0,01$  szignifikanciaszint mellett állíthatjuk-e, hogy a férfiak testmagasságának várható értéke szignifikánsan több a nőkénel?
- $\alpha = 0,01$  szignifikanciaszint mellett állíthatjuk-e, hogy a férfiak testmagasságának szórása szignifikánsan több a nőkénel?

## Házi feladat április 3-ig, megoldás

$\alpha = 0,05$  szignifikanciaszint mellett állíthatjuk-e, hogy a vizsgált mintában a testmagasság szignifikánsan eltér a 170 cm-es magyar átlagtól?

$H_0 : m = 170$ ;  $H_1 : m \neq 170$ , ahol  $m$  a testmagasság várható értéke

egymintás kétoldali  $t$ -próba;

```
> t.test(magassag, mu=170, alternative="two.sided")
```

One Sample t-test; data: magassag

$t = 3.2254$ ,  $df = 79$ ,  $p\text{-value} = 0.001831$

alternative hypothesis: true mean is not equal to 170

95 percent confidence interval: 171.4597 176.1653

sample estimates: mean of x 173.8125

mivel  $p = 0,0018 < \alpha = 0,05$ , a várható érték szignifikánsan eltér a magyar átlagtól ( $n = 80$ ,  $\bar{X} = 173,81$ ,  $s_n^* = 10,57$ )

## Házi feladat április 3-ig, megoldás

$\alpha = 0,01$  szignifikanciaszint mellett állíthatjuk-e, hogy a férfiak testmagasságának várható értéke szignifikánsan több a nőkénel?

$H_0 : m_1 \leq m_2$ ;  $H_1 : m_1 > m_2$ , ahol  $m_1$  a férfiak,  $m_2$  a nők testmagasságának várható értéke

kétmintás egyoldali  $t$ -próba

```
> t.test(ferfi, no, alternative="greater")
```

Welch Two Sample t-test; data: ferfi and no

$t = 8.5952$ ,  $df = 72.206$ ,  $p\text{-value} = 5.809e-13$

alternative hypothesis: true difference in means is greater than 0

95 percent confidence interval: 11.88507 Inf

sample estimates: mean of x mean of y 181.5526 166.8095

mivel  $p = 5,8 \cdot 10^{-13} < 0,01$ , a férfiak szignifikánsan magasabak a nőknél (38 férfi és 42 nő adatai alapján)

## Házi feladat április 3-ig, megoldás

$\alpha = 0,01$  szignifikanciaszint mellett állíthatjuk-e, hogy a férfiak testmagasságának szórása szignifikánsan több a nőkéénél?

$H_0 : \sigma_1 \leq \sigma_2$ ;  $H_1 : \sigma_1 > \sigma_2$ , ahol  $\sigma_1$  a férfiak,  $\sigma_2$  a nők testmagasságának szórása

sd(ferfi): 8.297; sd(no): 6.890

kétmintás egyoldali  $F$ -próba

```
> var.test(ferfi, no, alternative="greater")
```

F test to compare two variances; data: ferfi and no

F = 1.4502, num df = 37, denom df = 41, p-value = 0.1235

alternative hypothesis: true ratio of variances is greater than 1

95 percent confidence interval: 0.853803 Inf

sample estimates: ratio of variances 1.450205

mivel  $p = 0,12 > 0,01$ , nem állíthatjuk, hogy a férfiak magasságának szórása szignifikánsan több a nőkéénél (38 férfi és 42 nő adatai alapján)