

Hipotézisvizsgálat (7. előadás)

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ paraméteres statisztikai mező, azaz $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$ valamilyen Θ paraméterterrel. A paraméterteret bontsuk fel két diszjunkt halmaz uniójára: $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$, ahol tehát $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$.

Nullhipotézis. $H_0 : \vartheta \in \Theta_0$.

Ellenhipotézis. $H_1 : \vartheta \in \Theta_1$.

Hipotézisvizsgálat (7. előadás)

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ paraméteres statisztikai mező, azaz $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$ valamilyen Θ paraméterterrel. A paraméterteret bontsuk fel két diszjunkt halmaz uniójára: $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$, ahol tehát $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$.

Nullhipotézis. $H_0 : \vartheta \in \Theta_0$.

Ellenhipotézis. $H_1 : \vartheta \in \Theta_1$.

A minta $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$, a mintatér legyen B (vagyis (X_1, \dots, X_n) a $B \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz egy véletlen eleme). A mintatérrel is felbontjuk két diszjunkt halmaz uniójára: $B = B_0 \cup B_1$, ahol $B_0 \cap B_1 = \emptyset$.

Elfogadási tartomány: B_0 . Ha $(X_1, \dots, X_n) \in B_0$, akkor H_0 -t elfogadjuk.

Elutasítási (kritikus) tartomány: B_1 . Ha $(X_1, \dots, X_n) \in B_1$, akkor H_0 -t elutasítjuk.

Tehát a nullhipotézist akkor fogadjuk el, ha a minta az elfogadási tartományba esik, különben elutasítjuk.

Hipotézisvizsgálat

Nullhipotézis (null hypothesis). $H_0 : \vartheta \in \Theta_0$.

Ellenhipotézis (alternative hypothesis). $H_1 : \vartheta \in \Theta_1$.

- **Elsőfajú hibát** vétünk, ha H_0 igaz, és elutasítjuk.
- A próba **szignifikanciaszintje vagy terjedelme** (level of significance):

$$\alpha = \sup_{\vartheta \in \Theta_0} \mathbb{P}_{\vartheta}(\underline{X} \in B_1).$$

- **Másodfajú hibát** vétünk, ha H_0 nem igaz, és elfogadjuk.
- A próba **erőfüggvénye** az alábbi $\beta : \Theta_1 \rightarrow [0, 1]$ függvény:

$$\beta(\vartheta) = \mathbb{P}_{\vartheta}(\underline{X} \in B_1) \quad (\vartheta \in \Theta_1).$$

Hipotézisvizsgálat: p -érték

Definíció

Egy hipotézisvizsgálati feladatban a p -érték (p -value) a legnagyobb olyan szignifikanciaszint, ami mellett H_0 -t elfogadjuk.

Vagyis ha α a szignifikanciaszint, akkor

$p < \alpha$ esetén elutasítjuk H_0 -t, szignifikáns eltérés H_0 -tól.

$p \geq \alpha$ esetén elfogadjuk H_0 -t, nincs szignifikáns eltérés H_0 -tól, nem volt elég bizonyíték H_1 -re.

A szokásos $\alpha = 0,05$ értékkel: $p < 0,05$ esetén **elutasítjuk a nullhipotézist, szignifikáns eltérés van**, különben elfogadjuk a nullhipotézist, nincs szignifikáns eltérés.

Nagy mintaelemszám esetén kis eltérés is szignifikáns. A próba ereje használható annak ellenőrzésére, hogy nem volt-e túl érzékeny az eljárás.

Próbák tulajdonságai

- A próba **szignifikanciaszintje vagy terjedelme** (level of significance) az elsőfajú hiba valószínűségének szuprémuma:

$$\alpha = \sup_{\vartheta \in \Theta_0} \mathbb{P}_{\vartheta}(\underline{X} \in B_1).$$

- A próba **erőfüggvénye** az alábbi $\beta : \Theta_1 \rightarrow [0, 1]$ függvény:

$$\beta(\vartheta) = \mathbb{P}_{\vartheta}(\underline{X} \in B_1) \quad (\vartheta \in \Theta_1).$$

- Azonos terjedelmű próbák közül az az **erősebb**, amelynek az erőfüggvénye minden $\vartheta \in \Theta_1$ -re nagyobb vagy egyenlő, mint a másiké:

$$\beta^*(\vartheta) = \mathbb{P}_{\vartheta}(\underline{X} \in B_1^*) \geq \beta(\vartheta) = \mathbb{P}_{\vartheta}(\underline{X} \in B_1) \quad (\vartheta \in \Theta_1).$$

- Egy próba **konzisztens**, ha az erőfüggvénye 1-hez tart minden $\vartheta \in \Theta_1$ -re.
- Egy próba **torzítatlan**, ha

$$\mathbb{P}_{\vartheta_0}(\underline{X} \in B_1) \leq \mathbb{P}_{\vartheta_1}(\underline{X} \in B_1)$$

minden $\vartheta_0 \in \Theta_0$ -ra és $\vartheta_1 \in \Theta_1$ -re.

Neyman–Pearson-lemma

Tegyük fel, hogy a paraméterter két elemből áll: $\Theta = \{\vartheta_0, \vartheta_1\}$. A likelihood-függvények: $L_{n,0}$ illetve $L_{n,1}$.

Likelihood-hányados próba: válasszunk egy c számot. Ha

$$\frac{L_{n,1}(X_1, \dots, X_n)}{L_{n,0}(X_1, \dots, X_n)} \geq c$$

akkor utasítsuk el a nullhipotézist, különben fogadjuk el.

Lemma (Neyman–Pearson-lemma, 1. rész)

Tegyük fel, hogy a likelihood-hányados próba szignifikanciaszintje α . Ekkor a likelihood-hányados próba a legerősebb próba a legfeljebb α szignifikanciaszintű próbák között.

Például: ϑ_0 esetén indikátor eloszlás 0,2 paraméterrel, ϑ_1 esetén indikátor eloszlás 0,9 paraméterrel. Ha 10 megfigyelésből k -nál következik be az esemény:

$$\frac{L_{n,1}(X_1, \dots, X_n)}{L_{n,0}(X_1, \dots, X_n)} = \frac{\binom{10}{k} 0,9^k 0,1^{n-k}}{\binom{10}{k} 0,2^k 0,8^{n-k}} = \left(\frac{0,9}{0,2}\right)^k \left(\frac{0,1}{0,8}\right)^{n-k}.$$

Ez annál nagyobb, minél nagyobb k . Elutasítjuk H_0 -t, ha $k \geq k_0$ megfelelő k_0 -al.

Neyman–Pearson-lemma

Például: ϑ_0 esetén indikátor eloszlás 0,2 paraméterrel, ϑ_1 esetén indikátor eloszlás 0,9 paraméterrel. Legyen X az, hogy 10 megfigyelésből hányszor következik be az esemény. A Neyman–Pearson-lemma szerint akkor utasítjuk el H_0 -t, ha $X \geq k_0$ megfelelő k_0 -al.

Ha $k_0 = 5$: az elsőfajú hiba valószínűsége még megfelelő:

$$\mathbb{P}_0(X \geq 5) = \sum_{j=5}^{10} \binom{10}{j} 0,2^j 0,8^{10-j} = 0,033 \leq 0,05.$$

Ha $k_0 = 4$: az elsőfajú hiba valószínűsége túl nagy:

$$\mathbb{P}_0(X \geq 4) = \sum_{j=4}^{10} \binom{10}{j} 0,2^j 0,8^{10-j} = 0,12 > 0,05.$$

Neyman–Pearson-lemma

Például: ϑ_0 esetén indikátor eloszlás 0,2 paraméterrel, ϑ_1 esetén indikátor eloszlás 0,9 paraméterrel. Legyen X az, hogy 10 megfigyelésből hányszor következik be az esemény. A Neyman–Pearson-lemma szerint akkor utasítjuk el H_0 -t, ha $X \geq k_0$ megfelelő k_0 -al.

Ha $k_0 = 5$: az elsőfajú hiba valószínűsége még megfelelő:

$$\mathbb{P}_0(X \geq 5) = \sum_{j=5}^{10} \binom{10}{j} 0,2^j 0,8^{10-j} = 0,033 \leq 0,05.$$

Ha $k_0 = 4$: az elsőfajú hiba valószínűsége túl nagy:

$$\mathbb{P}_0(X \geq 4) = \sum_{j=4}^{10} \binom{10}{j} 0,2^j 0,8^{10-j} = 0,12 > 0,05.$$

Pontosan $\alpha = 0,05$ terjedelem: $X \geq 5$ esetén biztosan, $X = 4$ esetén 19% valószínűséggel utasítjuk el a nullhipotézist ($0,19 \cdot \mathbb{P}_0(X = 4) = 0,05 - 0,03$). Ez legerősebb próba a legfeljebb $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszintű próbák között, és erősebb, mint a $k_0 = 5$ -tel kapott determinisztikus próbáé.

Véletlenített próba

Tegyük fel, hogy a paramétertér két elemből áll: $\Theta = \{\vartheta_0, \vartheta_1\}$. A likelihood-függvények: $L_{n,0}$ illetve $L_{n,1}$.

Likelihood-hányados próba: válasszunk egy c számot. Ha

$$\frac{L_{n,1}(X_1, \dots, X_n)}{L_{n,0}(X_1, \dots, X_n)} > c$$

akkor utasítsuk el a nullhipotézist. Ha a hányados egyenlő c -vel, akkor p valószínűséggel utasítsuk el, és $1 - p$ valószínűséggel fogadjuk el. Ha kisebb c -nél, fogadjuk el a nullhipotézist.

Lemma (Neyman–Pearson-lemma, 2. rész)

Legyen $\alpha \in (0, 1)$ tetszőleges. Ekkor lehet olyan c és p számokat választani, hogy a likelihood-hányados próba a szignifikanciaszintje éppen α , és így ez a legerősebb próba a legfeljebb α szignifikanciaszintű próbák között.

Szekvenciális próbák

A valószínűséghányados n elemű mintából:

$$V_n = \frac{L_{n,1}(X_1, \dots, X_n)}{L_{n,0}(X_1, \dots, X_n)} = \frac{\prod_{j=1}^n f_1(X_j)}{\prod_{j=1}^n f_0(X_j)},$$

ha az eloszlás abszolút folytonos.

A, B rögzített, a próbára jellemző számok. Addig veszünk mintaelemeket, amíg $V_n \geq B$ vagy $V_n \leq A$ nem teljesül. Vagyis:

- ha $V_n \geq B$, elutasítjuk H_0 -t;
- ha $V_n \leq A$, elfogadjuk H_0 -t;
- ha $A < V_n < B$: új mintaelemet veszünk.

Kétlépcsős változat: n_1 elemű mintát veszünk. Ha $V_{n_1} \geq B$, elutasítjuk H_0 -t, ha $V_{n_1} \leq A$, elfogadjuk H_0 -t, különben további n_2 darab mintaelemet veszünk, és akkor utasítjuk el a nullhipotézist, ha $V_{n_1+n_2} > C$ teljesül.

Neyman–Pearson-lemma

Példa: legyen $\Theta = \{m_0, m_1\}$, és \mathcal{P} álljon az $N(m_1, \sigma)$ és $N(m_0, \sigma)$ eloszlásokból. A likelihood-hányados:

$$\begin{aligned}\frac{L_{n,1}(X_1, \dots, X_n)}{L_{n,0}(X_1, \dots, X_n)} &= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\right)^n \prod_{j=1}^n \exp(-(X_j - m_1)^2/(2\sigma^2))}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\right)^n \prod_{j=1}^n \exp(-(X_j - m_0)^2/(2\sigma^2))} = \\ &= \exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^n (X_j - m_1)^2}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{j=1}^n (X_j - m_0)^2}{2\sigma^2}\right) = \\ &= \exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^n (X_j^2 - 2m_1X_j + m_1^2)}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{j=1}^n (X_j^2 - 2m_0X_j + m_0^2)}{2\sigma^2}\right) = \\ &= \exp\left(\frac{2(m_1 - m_0) \sum_{j=1}^n X_j + (m_0^2 - m_1^2)n}{2\sigma^2}\right).\end{aligned}$$

Ha $m_1 > m_0$: akkor utasítjuk el a nullhipotézist, ha $\frac{L_{n,1}}{L_{n,0}}$ nagyobb egy c kritikus értéknél, vagyis ha $\sum_{j=1}^n X_j$ nagyobb egy c' kritikus értéknél. Ezért a lesz a z-próba legerősebb próba: ez is ilyen alakú.

Normális eloszlás paramétereire vonatkozó próbák

Az alábbi próbák akkor használhatók, ha

- a megfigyelések függetlenek, és feltételezhetjük, hogy normális eloszlásúak
- a megfigyelések függetlenek, véges szórású eloszlásból származnak, és a minta mérete, azaz n "elég nagy", például $n \geq 100$

Normális eloszlás paramétereire vonatkozó próbák

Az alábbi próbák akkor használhatók, ha

- a megfigyelések függetlenek, és feltételezhetjük, hogy normális eloszlásúak
- a megfigyelések függetlenek, véges szórású eloszlásból származnak, és a minta mérete, azaz n "elég nagy", például $n \geq 100$
- **z -próba** (vagy u -próba): **várható értékre** vonatkozó hipotézis esetén, ha **μ** **σ szórás ismert**

Normális eloszlás paramétereire vonatkozó próbák

Az alábbi próbák akkor használhatók, ha

- a megfigyelések függetlenek, és feltételezhetjük, hogy normális eloszlásúak
- a megfigyelések függetlenek, véges szórású eloszlásból származnak, és a minta mérete, azaz n "elég nagy", például $n \geq 100$
- **z -próba** (vagy u -próba): **várható értékre** vonatkozó hipotézis esetén, ha **σ szórás ismert**
- **t -próba** (vagy Student-próba): **várható értékre** vonatkozó hipotézis esetén, ha **σ szórás nem ismert** (csak az s_n^* tapasztalati szórás)
- **F -próba**: **szórásra** vonatkozó hipotézis esetén

Kapcsolat a konfidenciaintervallummal: egymintás próbánál akkor fogadjuk el a nullhipotézist α terjedelem mellett, ha a benne megadott érték (várható érték vagy szórás) az $1 - \alpha$ megbízhatósági szintű konfidenciaintervallumba esik.

Házi feladat április 3., 9:00-ig

Tekintsük a testmagasságokból kapott húszelemű adatsort. Tegyük fel, hogy a testmagasság eloszlása normális.

- $\alpha = 0,05$ terjedelem állíthatjuk-e, hogy a vizsgált mintában a testmagasság szignifikánsan eltér a 170 cm-es magyar átlagtól?
- $\alpha = 0,01$ terjedelem mellett állíthatjuk-e, hogy a férfiak testmagasságának várható értéke szignifikánsan több a nőkénél?
- $\alpha = 0,01$ terjedelem mellett állíthatjuk-e, hogy a férfiak testmagasságának szórása szignifikánsan több a nőkénél?

Házi feladat március 27., 9:00-ig

Tegyük fel, hogy az emberek testmagassága normális eloszlású, várható értéke m ismeretlen paraméter, szórása $s = 10$. Az m paraméterről tegyük fel, hogy az apriori eloszlása normális, várható értéke μ , szórása σ .

- Határozzuk meg az m paraméter Bayes-bebecslését a húszelemű mintából (ez μ -nek és σ -nak egy függvénye).
- A kapott kifejezést ábrázoljuk μ függvényében, egy tetszőlegesen rögzített, de 15-nél nem nagyobb σ mellett.
- A kapott kifejezést ábrázoljuk σ függvényében, egy tetszőlegesen rögzített, 170 és 180 közötti μ érték mellett.

Házi feladat március 27-ig: megoldás

A sűrűségfüggvény, ha a paraméter m :

$$f_m(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 10} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{200}\right).$$

A priori sűrűségfüggvény az m -re:

$$\pi(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \exp\left(-\frac{(m-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Az a posteriori eloszlás sűrűségfüggvénye (itt L_m a likelihood-függvény, és f_π a prediktív eloszlás sűrűségfüggvénye):

$$\begin{aligned}\pi^*(m|X=x) &= \frac{L_m(X_1, \dots, X_n)\pi(m)}{f_\pi(X_1, \dots, X_n)} \\ &= \frac{1}{f_\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}10}\right)^n \exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^n (X_j - m)^2}{200}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(m-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\end{aligned}$$

Házi feladat március 27-ig: megoldás

Az a posteriori eloszlás sűrűségfüggvénye (az m -től nem függő részeket nem számoljuk ki)

$$\begin{aligned}\pi^*(m|X = x) &= \frac{L_m(X_1, \dots, X_n)\pi(m)}{f_\pi(X_1, \dots, X_n)} = \\ &= \frac{1}{f_\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}10} \right)^n \exp \left(- \frac{\sum_{j=1}^n (X_j - m)^2}{200} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left(- \frac{(m - \mu)^2}{2\sigma^2} \right) = \\ &= C_{X_1, \dots, X_n} \exp \left(- \frac{\sum_{j=1}^n (X_j - m)^2 \cdot \sigma^2 + (m - \mu)^2 \cdot 100}{200 \cdot \sigma^2} \right) = \\ &= C'_{X_1, \dots, X_n} \exp \left(- \frac{m^2(\sigma^2 n + 100) - 2m(\sum_{j=1}^n X_j \sigma^2 + 100\mu)}{200 \cdot \sigma^2} \right) = \\ &= C'_{X_1, \dots, X_n} \exp \left(- \frac{m^2 - 2m \frac{\sum_{j=1}^n X_j \sigma^2 + 100\mu}{\sigma^2 n + 100}}{200 \cdot \sigma^2 \cdot (\sigma^2 n + 100)} \right) = \\ &= C''_{X_1, \dots, X_n} \exp \left(- \frac{\left(m - \frac{\sum_{j=1}^n X_j \sigma^2 + 100\mu}{\sigma^2 n + 100} \right)^2}{200 \cdot \sigma^2 \cdot (\sigma^2 n + 100)} \right)\end{aligned}$$

Házi feladat március 27-ig: megoldás

Az a posteriori eloszlás sűrűségfüggvénye (az m -től nem függő részeket nem számoljuk ki)

$$\begin{aligned}\pi^*(m|X = x) &= \frac{L_m(X_1, \dots, X_n)\pi(m)}{f_\pi(X_1, \dots, X_n)} = \\ &= C''_{X_1, \dots, X_n} \exp\left(-\frac{\left(m - \frac{\sum_{j=1}^n X_j \sigma^2 + 100\mu}{\sigma^2 n + 100}\right)^2}{200 \cdot \sigma^2 \cdot (\sigma^2 n + 100)}\right)\end{aligned}$$

Tehát az a posteriori eloszlás egy olyan normális eloszlás, melynek várható értéke

$$\frac{\sum_{j=1}^n X_j \sigma^2 + 100\mu}{\sigma^2 n + 100},$$

szórása

$$10\sigma\sqrt{\sigma^2 n + 100}.$$

Négyzetes veszteségfüggvény esetén a Bayes-becslés az a posteriori eloszlás várható értéke, vagyis

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{j=1}^n X_j \sigma^2 + 100\mu}{\sigma^2 n + 100}.$$

Házi feladat március 27-ig: megoldás

```
testmagassag<-c(186,180,197,191,181,178,193,177,167,163,164,170,178,152,207,155
```

```
> length(testmagassag)
```

```
[1] 94
```

```
> sum(testmagassag)
```

```
[1] 16428
```

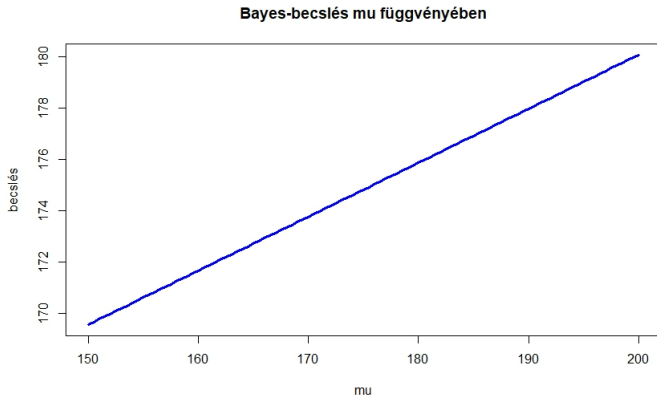
```
> bayes1<-function(m){(16428*4+100*m)/(94*4+100)}
```

```
> plot(bayes1,col="blue", lwd="3", xlim=c(150,200), main="Bayes-beclés mu  
függvényében", xlab="mu", ylab="becslés")
```

```
> bayes2<-function(s){(16428*s2+100*175)/(94*s2+100)}
```

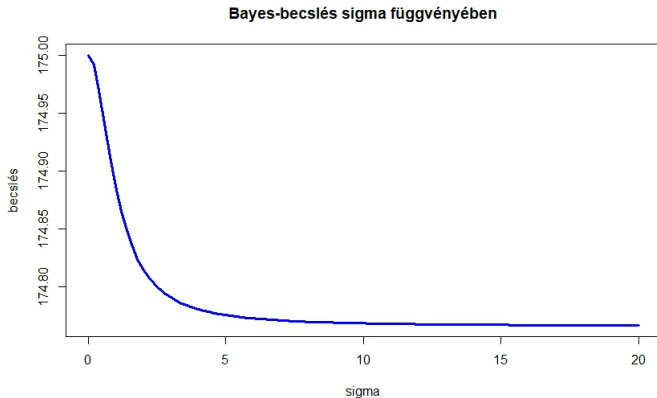
```
> plot(bayes2,col="blue", lwd="3", xlim=c(0,20), main="Bayes-beclés sigma  
függvényében", xlab="sigma", ylab="becslés")
```

Bayes-becslés σ függvényében



Bayes-becslés μ függvényében, ahol az a priori eloszlás $N(\mu, 2^2)$. A mintaátlag 174,77 cm.

Bayes-becslés μ függvényében



Bayes-becslés σ függvényében, ahol az a priori eloszlás $N(175, \sigma^2)$. A mintaátlag 174,77 cm. Ha σ végtelenhez tart, a becslés limesze a mintaátlag.